TOÁN TỪ TÂM

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Chương 03

Bài 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. Lý thuyết

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa: *Giới hạn dãy số = 0*

- Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn là* 0 khi $n \to +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa: *Giới hạn dãy số = số thực khác 0*

- Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn là* a khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$

  » **Kí hiệu:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Lưu ý

Từ nay về sau, thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

Tính chất

(1) $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

(3) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lý

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì
  - $\lim(u_n + v_n) = a + b$; $\lim(u_n - v_n) = a - b$
  - $\lim(u_n . v_n) = a.b$; $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).
- Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$.
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

- CSN vô hạn (u_n) có công bội q $\left(|q|<1\right)$ được gọi là ***cấp số nhân lùi vô hạn.***

Định lý

- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q (với $|q|<1$).

  Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ là tổng vô hạn của (u_n). Khi đó $\boxed{S=\dfrac{u_1}{1-q}}$

4. Giới hạn vô cực

Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim(u_n)=+\infty$ hoặc $\lim u_n=+\infty$ hoặc $u_n\to+\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn số âm tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim(u_n)=-\infty$ hoặc $\lim u_n=-\infty$ hoặc $u_n\to-\infty$.

⁂ ***Nhận xét.*** $\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$.

Tính chất

(1) $\lim n^k=+\infty$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n=+\infty$ (nếu $q>1$).

5. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Định lý 1

- Nếu $\lim u_n=a$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

Định lý 2

- Nếu $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim(u_nv_n)$ được cho bằng:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Định lý 3

- Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = a \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho bằng:

$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Định lý 4

- Nếu $\lim u_n = a \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho bằng:

Dấu của a	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Phương pháp

(1) Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh

$$\forall a > 0 \text{ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số } n_a \text{ sao cho } |u_n| < a \ \forall n > n_a$$

(2) Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$

(3) Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh

$$\forall M > 0 \text{ lớn tùy ý luôn tồn tại một số } n_M \text{ sao cho } u_n > M \ \forall n > n_M$$

(4) Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$

(5) Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Ví dụ 1.1.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

(2) $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim \dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

(2) $\lim \dfrac{6n+2}{n+5}=6$

(3) $\lim \dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

(4) $\lim \dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$

Lời giải

Ví dụ 1.3.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim\left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

(2) $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

Dạng 2. Giới hạn dãy số: dạng phân thức

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n.

☑ **Bước 1:** Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.

☑ **Bước 2:** Áp dụng kết quả $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0 \to \lim \dfrac{f(n)}{g(n)} = \ldots$.

Ví dụ 2.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

(2) $\lim \dfrac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$

(3) $\lim \dfrac{n+2}{n^2 + n + 1}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tìm giới hạn của các dãy số sau:

(1) $u_n = \dfrac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n}$. (2) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$ (3) $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$

Lời giải

Ví dụ 2.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$

(2) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

(3) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

(4) $\lim (2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

Lời giải

Dạng 3. Giới hạn dãy số: dạng lũy thừa

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các lũy thừa dạng X^n

☑ **Bước 1:** Đưa biểu thức về cùng số mũ n.

☑ **Bước 2:** Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.

☑ **Bước 3:** Áp dụng kết quả " Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$".

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(2^n + 3^n\right)$.

(2) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right]$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3.3^n + 2^n}\right)$

(2) $\lim\left(\dfrac{4.3^n - 2^n}{2.5^n + 4^n}\right)$

(3) $\lim\left(\dfrac{7^n + 1}{-2.3^n - 3.6^n}\right)$

(4) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1} - 4^n + 1}{2.5^n - 6^n}\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

(2) $\lim \dfrac{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n), xác định bởi

(1) $u_1=1; u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}.\ \forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{u_n+1}{u_n+4}$

(2) $u_1=3, u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}, \forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Giới hạn dãy số: dạng căn thức

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ chứa căn thức

Ở dạng này ta thường gặp 2 trường hợp:

» **Trường hợp 1:** Đơn giản – Chỉ rút nhân tử chung (như dạng 2)

Lưu ý: $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{khi } n \ge 0 \\ -n & \text{khi } n < 0 \end{cases}$, ở đây ta chỉ có $n \to +\infty$ nên $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$

» **Trường hợp 2:** Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định: $\dfrac{0}{0}; 0.\infty; \dfrac{\infty}{\infty}$

- $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
- $\sqrt{A} - B = \dfrac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$
- $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A - B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A - B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.B + (B)^2}$

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất để tính được kết quả của giới hạn:

(1) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

(3) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

Ví dụ 4.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$.

(2) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

(2) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$.

(2) $\lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

» Câu 2. Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 3. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0\ (|q| > 1)$.

C. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0\ (k > 1)$.

» Câu 4. $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

» Câu 5. $\lim \dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

» Câu 6. Tìm $I = \lim \dfrac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

» Câu 7. $\lim \dfrac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{-3}{5}$. **D.** -3.

» Câu 8. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L = -\infty$. **B.** $L = -2$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = 0$.

» Câu 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

» Câu 10. Giá trị của $\lim\dfrac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

» Câu 11. $\lim\dfrac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\dfrac{19}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{19}$.

» Câu 12. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\dfrac{1}{n}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

» Câu 13. Tìm $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 4.

» Câu 14. $\lim\dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{2}{11}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

» Câu 15. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{3-n}, n\in\mathbb{N}^*$ là:

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

» Câu 16. Tính $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

» Câu 17. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$; $v_n=\dfrac{3}{n+3}$. Tính $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

» Câu 18. $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$ bằng.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

» Câu 19. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1,0001)^n$. **D.** $(1,2345)^n$.

» Câu 20. $\lim\dfrac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\dfrac{1}{100}$. **D.** 0.

» Câu 21. $\lim\left(3^n-4^n\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

» Câu 22. Tính giới hạn $\lim \dfrac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** -6.

» Câu 23. Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A. $T=0$. **B.** $T=\dfrac{1}{4}$. **C.** $T=\dfrac{1}{8}$. **D.** $T=\dfrac{1}{16}$.

» Câu 24. Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n-2|<\dfrac{1}{n^3}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n=1$.
C. $\lim u_n=0$. **D.** $\lim u_n=2$.

» Câu 25. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

» Câu 26. Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a.b$

A. 192 **B.** 68 **C.** 32 **D.** 128

» Câu 27. Biết $\lim\dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2}=\dfrac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng

A. -12. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

» Câu 28. Giới hạn $\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

» Câu 29. Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{n}$. **D.** 0.

» Câu 30. $\lim(2-3n)^4(n+1)^3$ là:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 81 **D.** 2

» Câu 31. Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

» Câu 32. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

» Câu 33. $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

» **Câu 34.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim \frac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. B. $\lim \frac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. D. $\lim \frac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

» **Câu 35.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

A. $+\infty$. B. 1. C. $-\infty$. D. $\frac{9}{4}$.

» **Câu 36.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

A. $+\infty$. B. -7. C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

» **Câu 37.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

A. $+\infty$. B. $\frac{25}{4}$. C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

» **Câu 38.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

A. $+\infty$. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

» **Câu 39.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

A. $+\infty$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{5}{3}$.

» **Câu 40.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

A. $+\infty$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.

» **Câu 41.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

» **Câu 42.** Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. B. $S=\frac{3}{2}$. C. $S=1$. D. $S=\frac{2}{3}$.

» **Câu 43.** Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$. B. 3. C. 4. D. 2.

» **Câu 44.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555...=3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

A. $\frac{63}{20}$. B. $\frac{142}{45}$. C. $\frac{1}{18}$. D. $\frac{7}{2}$.

» **Câu 45.** Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

» **Câu 46.** Cho dãy số $(u_n); n\in\mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=-\frac{u_n}{5} \end{cases}$. Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{2}$.

» **Câu 47.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $\lim\frac{n}{u_n}$.

A. $L=\frac{1}{3}$. **B.** $L=\frac{1}{2}$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$

» **Câu 48.** Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n=\frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n=n\left(\sqrt{n^2+2018}-\sqrt{n^2+2016}\right)$.

C. $\begin{cases} u_1=2017 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+1), \quad n=1,2,3... \end{cases}$. **D.** $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

» **Câu 49.** Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n=\frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1,\ 2,...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

» **Câu 50.** Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_n=3u_{n-1}-1, \forall n\geq 2 \end{cases}$, khi đó $L=\lim\frac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\frac{5}{6}$. **D.** $L=0$.

» **Câu 51.** Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1}=4v_n-2, v_{n+1}=u_n+1$ với mọi $\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

» **Câu 52.** Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét

B. Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét

C. Chiều cao mô hình dưới 2 mét.

D. Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

» **Câu 53.** Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao $8m$ so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

A. $57m$. **B.** $54m$. **C.** $56m$. **D.** $58m$.

» Câu 54. Với mỗi số nguyên dương n, gọi s_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$. (nếu $a\ne b$ thì hai cặp số $(a;b)$ và $(b;a)$ khác nhau). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=2$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=4$.

» Câu 55. Tính giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

» Câu 56. Tìm $L=\lim\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+...+\dfrac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\dfrac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\dfrac{3}{2}$.

» Câu 57. Tổng $S=\dfrac{100}{10.15.20}+\dfrac{100}{15.20.25}+\dfrac{100}{20.25.30}+...+\dfrac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{93}{1380}$ **B.** $\dfrac{91}{13800}$ **C.** $\dfrac{9}{138}$ **D.** $\dfrac{91}{1380}$

» Câu 58. Giá trị của tổng: $S=\dfrac{12}{4.16}+\dfrac{20}{16.36}+\dfrac{28}{36.64}+...+\dfrac{84}{400.484}$ là:

A. $\dfrac{31}{121}$ **B.** $\dfrac{30}{121}$ **C.** $\dfrac{32}{121}$ **D.** $\dfrac{33}{121}$

» Câu 59. Cho $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **B.** $\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}$ **C.** $\dfrac{2^n-1}{2^n}$ **D.** $\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}}$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 60. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.		
(b)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.		
(c)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên		
(d)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$		

» Câu 61. Đặt $I=\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta biến đổi được $I=\lim\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$		
(b)	Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn		
(c)	Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1		

(d)	Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$		

» Câu 62. Biết $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có tất cả 3 giá trị a thỏa mãn		
(b)	Tổng các giá trị a tìm được bằng 0		
(c)	Có 2 giá trị nguyên âm a thỏa mãn		
(d)	Tích các giá trị a tìm được bằng -4		

» Câu 63. Cho giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		
(b)	Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$		
(c)	Khi $a>0$ thì $L>0$		
(d)	Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$		

» Câu 64. Cho giới hạn $L=\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=2$ khi $a=1$		
(b)	$L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn		
(c)	$L>3$ khi $a>6$		
(d)	Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.		

» Câu 65. Biết $\lim\dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2$ và $\lim\dfrac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=b$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của $a=2$		
(b)	Giá trị của $b=4$		
(c)	$2a-b=0$		
(d)	Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân		

» Câu 66. Cho dãy số (u_n) với $u_n=an^2+n-1$ với $a\in\mathbb{R}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.		
(b)	Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.		
(c)	Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		
(d)	Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		

» Câu 67. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng		
(b)	Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng		
(c)	Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n, sau n chu kì năm công tác là: $u_n=5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^n$ đồng		
(d)	Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 68. Giới hạn $\lim\frac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim\frac{a\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{b+\frac{2}{\sqrt{n}}}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $P=a+b^2$

Điền đáp số: ☐

» Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)=\lim\frac{a.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+b.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+1}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=(a+b)^2$

Điền đáp số: ☐

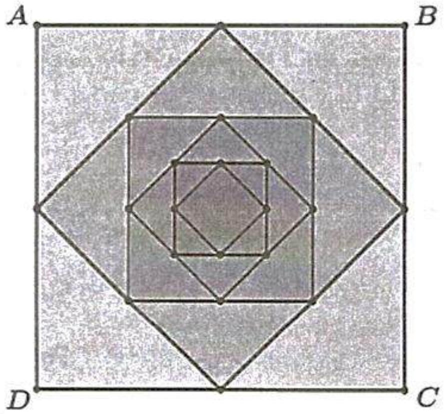
» Câu 70. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}$

Điền đáp số: ☐

» Câu 71. Tìm giới hạn $\lim\frac{n\cdot\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$

Điền đáp số: ☐

» Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó. $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*



Điền đáp số:

» **Câu 73.** Giới hạn $\lim\sqrt[3]{\dfrac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\dfrac{1-3.a^n}{8+\dfrac{1}{6}.b^n}}$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$

Điền đáp số:

» **Câu 74.** Tìm giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Điền đáp số:

» **Câu 75.** Tìm tổng $S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$

Điền đáp số:

» **Câu 76.** Giá trị của tổng $T=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ldots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\ldots=a+\sqrt{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=(a+b)^2$

Điền đáp số:

» **Câu 77.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{m}{n}$ với $m;n$ là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n-3m$

Điền đáp số:

» **Câu 78.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{a}{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b-2a|$

Điền đáp số:

» **Câu 79.** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=-2\\u_n=3u_{n-1}-1,\forall n\ge 2\end{cases}$, tính $\lim\dfrac{u_n}{3^n}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 80.** Biết rằng giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right)=\lim\left(\dfrac{5-a.n}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+b\right)$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=a^b$

Điền đáp số:

» **Câu 81.** Biết rằng giới hạn $\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)=\lim\left(a+\dfrac{n-7}{b.n+c.\sqrt{9n^2-n+7}}\right)$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a-b|+c$

Điền đáp số:

» **Câu 82.** Biết giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\dfrac{a}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\dfrac{b}{n+\sqrt{n^2+2}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $T=2a+3b$.

Điền đáp số:

» **Câu 83.** Giới hạn dãy số $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$ có dạng $\lim\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2+b^2+c^2$

Điền đáp số:

» **Câu 84.** Biết giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}-b\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

Điền đáp số:

» **Câu 85.** Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

------------------------------------ Hết ------------------------------------

Chương 03

Bài 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa:

- Cho khoảng K chứa x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc $K\setminus\{x_0\}$.
- Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x)\to L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

  Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0;\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (với c là hằng số).

Định lý về giới hạn hữu hạn:

⁂ Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, khi đó:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L+M$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L-M$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

⁂ Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}=\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x\neq x_0$)

2. Giới hạn một bên

Định nghĩa:

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

Số thực L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$, hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.

Số thực L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$, hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Định lý

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Chú ý

Nguyên lí kẹp:

Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0.

Nếu $g(x) \le f(x) \le h(x)\ \forall x \in K$ và $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

3. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa:

⁂ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có ***giới hạn là số thực*** L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

⁂ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có ***giới hạn là số thực*** L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Lưu ý

(1) Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x \to \pm\infty} c = c$; $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$.

(2) Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to \pm\infty$.

4. Giới hạn vô cực của hàm số

» Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về *giới hạn hữu hạn*.

» Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: *Giới hạn vô cực*

⁂ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a, x_n \to +\infty$, ta có $(f(x_n)) \to -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Tính chất

(1) $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(2) $\lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

(3) $\lim_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn.

5. Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to+\infty, x\to-\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x):

» Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương f(x)/g(x):

» Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

» Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giới hạn của hàm số tại 1 điểm

Phương pháp

⁂ Tử & mẫu là ĐA THỨC:

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các ***đa thức*** và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
- Giả sử $f(x)=(x-x_0).f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0).g_1(x)$
- Khi đó: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

✓ ***Nhận xét:***

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.
- Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

⁂ Tử & mẫu là CĂN THỨC:

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các ***căn thức*** và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

✓ ***Nhận xét:***

- Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.

✓ ***Chú ý:*** Các hằng đẳng thức:

(1) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

(2) $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

(3) $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

Ví dụ 1.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2+x-6\right)^2}{-x^3+2x^2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$

Lời giải

Ví dụ 1.4.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

(4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$

Lời giải

Dạng 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Phương pháp

Dạng 1: $I=\lim_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là các đa thức hoặc các hàm số.

- Gọi $p=\deg P(x), q=\deg Q(x)$ và $m=\min(p,q)$.

  Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

- Khi đó:

  » Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn.

  » Nếu $p>q$ thì không tồn tại giới hạn.

Deg = bậc của đa thức

Dạng 2: Giới hạn $\infty-\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Các công thức liên hợp thường gặp:

- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.B+(B)^2}$

Ví dụ 2.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $A=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

(2) $B=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

(3) $C=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

(4) $D=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

Lời giải

Ví dụ 2.4.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp

» Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=\begin{cases}+\infty & \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)>0\\ -\infty & \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)<0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)>0\\ -\infty & \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)<0\end{cases}$

» $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$

(2) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

(1) $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{khi } x>3\end{cases}$ khi $x\to 3$

(2) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{4\left(3x^2-5x+2\right)} & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

(3) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$

A. $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

» Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 3. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$ **D.** 2019.

» Câu 4. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

» Câu 5. Cho $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 9.

» Câu 6. Biểu thức $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** 1.

» Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

» Câu 8. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

» Câu 9. Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3+2x+3\right)$. **C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x-1}{4-x}$.

» Câu 10. $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

» Câu 11. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 0

» Câu 12. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-2x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

» **Câu 13.** Tính giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\infty$.

» **Câu 14.** Biết $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

» **Câu 15.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

» **Câu 16.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

» **Câu 17.** Tính $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

» **Câu 18.** Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

» **Câu 19.** Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

» **Câu 20.** Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}, x<-2\\ x+1, x\ge -2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2. Tính $3a-b$?

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

» **Câu 21.** Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

» **Câu 22.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

» **Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=-4$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-8$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

» **Câu 24.** Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2$. Khi đó

A. $-1\le a\le 2$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\ge 5$. **D.** $2<a<5$.

» **Câu 25.** Cho $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

» **Câu 26.** Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

» **Câu 27.** Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

» **Câu 28.** Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 29.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

» **Câu 30.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

» **Câu 31.** Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

» **Câu 32.** Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của a^2-b^2.

A. 4037. **B.** 4035. **C.** -4035. **D.** 4033.

» **Câu 33.** $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 34.** Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$ với $a,\,b$ là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=a+b$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 4.

» **Câu 35.** Biết $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8.\ (b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

A. $P=-13$. **B.** $P=-11$. **C.** $P=5$. **D.** $P=-12$.

» **Câu 36.** Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2+1}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

» **Câu 37.** Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3,b=0$. **B.** $a=3,b=0$.
C. $a=0,b=-9$. **D.** không tồn tại cặp (a,b).

» Câu 38. Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

A. 18. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 5.

» Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

A. $\dfrac{83}{49}$. **B.** $\dfrac{105}{49}$. **C.** $\dfrac{15}{49}$. **D.** $\dfrac{83}{98}$.

» Câu 40. Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{45}{16}$ **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$

» Câu 41. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $T=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$

A. $T=\dfrac{12}{25}$. **B.** $T=\dfrac{4}{25}$. **C.** $T=\dfrac{4}{15}$. **D.** $T=\dfrac{6}{25}$.

» Câu 42. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a$; $b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

» Câu 43. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

» Câu 44. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

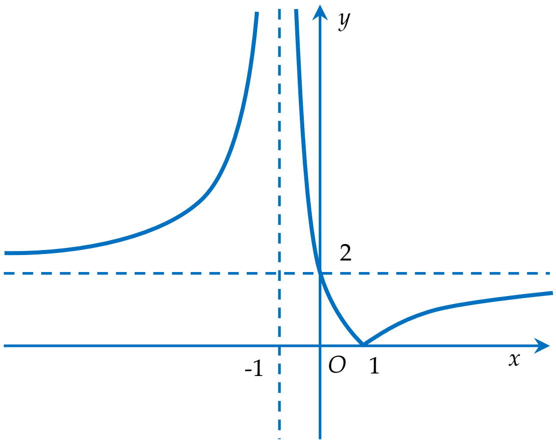
» Câu 45. Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=5$ khi $a=-10$		
(b)	$L>0$ khi $a>0$		
(c)	$L<0$ khi $a>0$		
(d)	$L=-1$ thì a là một nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$		

» Câu 46. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a>0$		
(b)	$b>0$		
(c)	$a>b$		
(d)	$P=4a+b=2$		

» Câu 47. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$		
(b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
(c)	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$		
(d)	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$		

» Câu 48. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	a là số lẻ		
(b)	$b>0$		
(c)	$a.b<0$		
(d)	$a-4b=5$		

» Câu 49. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a=9$		
(b)	$b=3c$		
(c)	$a=3c$		
(d)	$P=a+b+5c=14$		

» Câu 50. Cho a, b là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=3\ khi\ \dfrac{a-1}{b}=3$		
(b)	$L=6\ khi\ \dfrac{a-1}{b}=4$		
(c)	$L=2\ khi\ a+2b=1$		
(d)	$L=1\ khi\ a+b=1$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 51. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-a.x}{b.x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2$

Điền đáp số: ☐

» Câu 52. Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 & \text{khi } t<0\\ 1 & \text{khi } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)+\lim\limits_{t\to0^+}H(t)$.

Điền đáp số: ☐

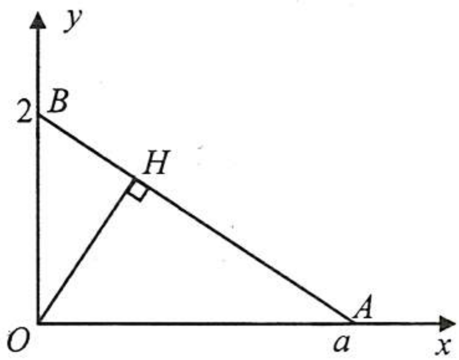
» Câu 53. Một cái hồ chứa $600l$ nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối $30\,g/l$ vào hồ với tốc độ $15l$/phút. Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30.15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}(g/l)$. Khi đó nồng độ muối trong hồ sẽ bằng bao nhiêu (g/l) khi t dần về dương vô cùng?

Điền đáp số: ☐

» Câu 54. Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{\sqrt{x+9}+b}+\dfrac{c}{\sqrt{x+16}+d}\right]$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Điền đáp số: ☐

» Câu 55. Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy. Giả sử hoành độ điểm A là $a>0$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB được tính theo công thức $\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?



Điền đáp số: ☐

» Câu 56. Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{a}{b.\sqrt{5x-1}+3}-\dfrac{c}{4+d.\sqrt{9x-2}}\right)$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Điền đáp số: ☐

» Câu 57. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2}+a\right)^5\cdot\left(b-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-c\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính tích các số $a;b;c;d$

Điền đáp số:

» Câu 58. Biến đổi giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^a\cdot\dfrac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$ với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

Điền đáp số:

» Câu 59. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^b}{\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^a\cdot\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính $S=a-b$

Điền đáp số:

» Câu 60. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x=1$

Điền đáp số:

-------------------------------- Hết --------------------------------

Chương 03

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. Lý thuyết

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

  Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

  Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

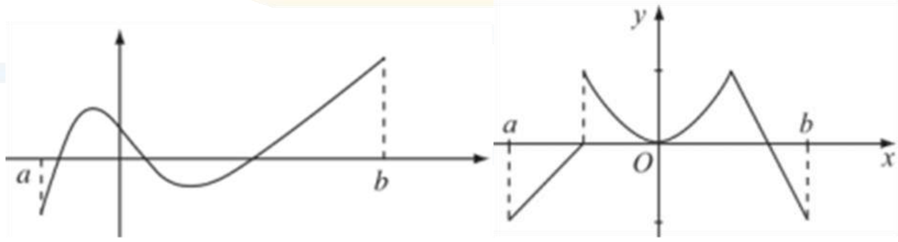
Định nghĩa:

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)=f(b)$.

Chú ý

(1) Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b];[a;b);(-\infty;b];[a;+\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự.

(2) Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền" trên khoảng đó.



3. Một số định lí

Định lí 1.

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.

Định lí 2.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0.

Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 3.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

⁂ Lưu ý:

Định lí này thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Có thể phát biểu Định lí 3 dưới một dạng khác như sau:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a;b)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm

Phương pháp

⁂ **Bài toán:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Tính $f(x_0)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

  Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

  Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

Ví dụ 1.1.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x>0 \\ x & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0=0$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ tại $x=1$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{khi } x\ne 1\\ -2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.5.

Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x\ne 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục – gián đoạn tại 1 điểm

Phương pháp

- **Bước 1.** Tính $f(x_o)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x); \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

» *Hàm số $f(x)$ **liên tục** tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*

» *Hàm số $f(x)$ **gián đoạn** tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$*

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 2.1.

Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m^2+5m & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x_0=1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.4.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,\text{khi } x>1\\ x^2+3 & ,\text{khi } x<1\\ k^2 & ,\text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.6.

Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 14a.x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.7.

Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.8.

Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ***ít nhất một nghiệm*** trên D.

  Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

  » Liên tục trên D và

  » Có hai số sao cho $f(a).f(b)<0$.

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ***k nghiệm*** trên D.

  Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

  » Liên tục trên D và

  » Tồn tại k khoảng dời nhau $(a_i;a_{i+1})(i=1,2,...,\text{k})$ nằm trong D: $f(a_i).f(a_{i+1})<0$

Ví dụ 3.1.

Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng phương trình $6x^3+2x^2-31x+10=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Chứng minh rằng phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Chứng minh rằng phương trình $x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.5.

Chứng minh rằng phương trình $x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.6.

Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.7.

Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.8.

Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

B. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

D. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

» Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a;b)$.

» Câu 3. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, & \text{khi } x<1\\ 1, & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

A. y liên tục phải tại $x=1$.

B. y liên tục tại $x=1$.

C. y liên tục trái tại $x=1$.

D. y liên tục trên $\mathbb{R}$.

» Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$.

D. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

» Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục tại $x=0$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

» Câu 6. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$:

A. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

B. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

C. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$.

D. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

» Câu 7. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=(x+1)(x^2+2)$.

B. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{x}{x-1}$.

D. $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

» Câu 8. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=2$?

A. $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$ **D.** $y=\tan x$.

» Câu 9. Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

» Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$. **B.** $f(\sqrt{2})<0$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x=0$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

» Câu 11. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

» Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2m+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ là:

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

» Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ a & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $a=0$. **B.** $a=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

» Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=?$

A. -1. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

» Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m^2+m-1 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

» Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ \ x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\ \ x\le 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

» Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

» Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi a bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

» Câu 19. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & khi\, x>4\\ mx+1 & khi\, x\le 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

A. $m=\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$.

» Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-m}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ n & khi\, x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì giá trị của biểu thức $\left(m+n\right)$ tương ứng bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

» Câu 21. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & khi\quad x\neq 3\\ mx+2 & khi\quad x=3\end{cases}$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi m bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

» Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi x >2}\\ mx-4 & \text{khi x} \le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

» Câu 23. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ mx-2m^2 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left\{1\right\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$..

» Câu 24. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & khi\;\, x<2\\ mx+m+1 & khi\;\, x\ge 2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=2$.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 25.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x\neq\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{2} & \text{khi } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Biết hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$. Tính $S=abc$.

A. $S=-36$. **B.** $S=18$. **C.** $S=36$. **D.** $S=-18$.

» **Câu 26.** Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi} \quad x\neq1\\ a & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=1$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

» **Câu 27.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại x=2.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

» **Câu 28.** Để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2\left(x-1\right)} & khi \quad x\neq1\\ m & khi \quad x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ thì giá trị m bằng

A. $0,5$. **B.** $1,5$. **C.** 1. **D.** 2.

» **Câu 29.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } \left(x>1\right)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } \left(x\leq1\right)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m\in\left\{0;1\right\}$. **B.** $m\in\left\{0;-1\right\}$. **C.** $m\in\left\{1\right\}$. **D.** $m\in\left\{0\right\}$.

» **Câu 30.** Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a & \text{khi} \quad x\leq1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi} \quad x>1.\end{cases}$

A. $a=-2$. **B.** $a=1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

» **Câu 31.** Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & khi \ x>-1\\ mx+2 & khi \ x\leq-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

» **Câu 32.** Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\geq2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$, $\left(2;+\infty\right)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

» Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & khi\ \ x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ \ x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

» Câu 34. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P=\dfrac{5}{6}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

» Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi} \quad x>4\\ mx+1 & \text{khi} \quad x\le 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=8$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=\dfrac{7}{4}$.

C. $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$ hoặc $m=\dfrac{7}{4}$.

» Câu 36. Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x<-5\\ x+17 & \text{khi} -5\le x\le 10\\ ax+b+10 & \text{khi } x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

» Câu 37. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

A. $2x^2-3x+4=0$. **B.** $(x-1)^5-x^7-2=0$.

C. $3x^4-4x^2+5=0$. **D.** $3x^{2017}-8x+4=0$.

» Câu 38. Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-10;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

» Câu 39. Cho phương trình $2x^3-8x-1=0$ (1). Khẳng định nào **sai**?

A. Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.
B. Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.
C. Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.
D. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

» Câu 40. Cho số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\ 8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $g(x)=x^2-3x+1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		
(c)	Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$		
(d)	Hàm số $y=f(x)+g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		

» Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x>-2\\ 4-x^2 & \text{khi } x\le -2\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\ne -2\\ 2x+a & \text{khi } x=-2\end{cases}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{5}{26}$		
(b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$		
(c)	Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$ thì $a=1$		
(d)	Khi $a=-1$ thì hàm số $y=f(x).g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0=-2$		

» Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & khi\ x>2\\ x^2+ax+3b & khi\ x<2\\ 2a+b-6 & khi\ x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a>0$		
(b)	$b>0$		
(c)	$a>b$		
(d)	$I=a+b=\dfrac{19}{32}$		

» Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{11}{2}$		
(b)	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$		
(c)	Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $a=-\dfrac{1}{2}$		

(d)	Biết a là giá trị để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x_0=2$, thì bất phương trình $-x^2+ax+\frac{7}{4}>0$ có 1 nghiệm nguyên		

» Câu 45. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi} \quad x\neq 1\\ 2ax-1 & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f\left(1\right)=2a-1$		
(b)	$a>0$		
(c)	$b>0$		
(d)	$a-b=6$		

» Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+ax+b \text{ khi } x<-5\\ x+17 \quad \text{khi} -5\leq x\leq 10\\ ax+b+10 \text{ khi } x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f\left(-5\right)=12$; $f\left(10\right)=17$		
(b)	$a>0$		
(c)	$a>0$		
(d)	$a+b=2$		

» Câu 47. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi} \quad x>-2\\ mx+n & \text{khi} \quad x\leq -2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f\left(x\right)=-2$		
(b)	Khi $m=1$ thì $n=2$		
(c)	Khi $m=2$ thì $n=5$		
(d)	Khi $m=3$ thì $n=7$		

» Câu 48. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi} \quad x\neq \pm 3\\ -\dfrac{1}{9} & \text{khi} \quad x=\pm 3\end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $\left(-3;3\right)$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=-3$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=3$.		
(d)	Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		

» **Câu 49.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & khi\ x<1, x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\\ \sqrt{x} & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm điểm thuộc $\mathbb{R}$.		
(d)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 50.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m^2x & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Điền đáp số:

» **Câu 51.** Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.

Điền đáp số:

» **Câu 52.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 2\\ \dfrac{4mx-1}{3} & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0=2$

Điền đáp số:

» **Câu 53.** Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$

Điền đáp số:

» **Câu 54.** Tìm giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng.

Điền đáp số:

» Câu 55. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

---------------------------- Hết ----------------------------

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 03

Bài 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A Lý thuyết

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa: *Giới hạn dãy số = 0*

- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn là*** 0 khi $n \to +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa: *Giới hạn dãy số = số thực khác 0*

- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn là*** a khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$

  » **Kí hiệu:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Lưu ý

Từ nay về sau, thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

Tính chất

(1) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

(3) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lý

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì
  - $\lim(u_n + v_n) = a + b$; $\lim(u_n - v_n) = a - b$
  - $\lim(u_n.v_n) = a.b$; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).
- Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim|u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$.
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

- CSN vô hạn (u_n) có công bội q $(|q|<1)$ được gọi là ***cấp số nhân lùi vô hạn.***

Định lý

- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q (với $|q|<1$).

  Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ là tổng vô hạn của (u_n). Khi đó $\boxed{S=\dfrac{u_1}{1-q}}$

4. Giới hạn vô cực

Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim(u_n)=+\infty$ hoặc $\lim u_n=+\infty$ hoặc $u_n\to+\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn số âm tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  » **Kí hiệu:** $\lim(u_n)=-\infty$ hoặc $\lim u_n=-\infty$ hoặc $u_n\to-\infty$.

⁂ ***Nhận xét.*** $\lim u_n=+\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n)=-\infty$.

Tính chất

(1) $\lim n^k=+\infty$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n=+\infty$ (nếu $q>1$).

5. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Định lý 1

- Nếu $\lim u_n=a$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

Định lý 2

- Nếu $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim(u_nv_n)$ được cho bằng:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Định lý 3

- Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = a \neq 0$ thì $\lim\left(u_n v_n\right)$ được cho bằng:

$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim\left(u_n v_n\right)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Định lý 4

- Nếu $\lim u_n = a \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho bằng:

Dấu của a	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Phương pháp

(1) Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh

$$\forall a > 0 \text{ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số } n_a \text{ sao cho } |u_n| < a\ \forall n > n_a$$

(2) Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$

(3) Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh

$$\forall M > 0 \text{ lớn tùy ý luôn tồn tại một số } n_M \text{ sao cho } u_n > M\ \forall n > n_M$$

(4) Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$

(5) Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Ví dụ 1.1.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

(2) $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

(1) $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

Ta có: $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1} - (-1)\right) = \lim\left(\dfrac{1}{n^3+1}\right)$ Vì $0 \le \left|\dfrac{1}{n^3+1}\right| < \dfrac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{1}{n^3+1}\right) = 0$. Do đó $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

(2) $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$

Ta có: $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n} - \dfrac{1}{2}\right) = \lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}$

Vì $0 < \left|\dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}\right| < \dfrac{5n+5}{2n(n+1)} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim\left(\dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{5}{2} \cdot \lim \dfrac{1}{n} = 0$

Nên suy ra $\lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)} = 0$. Do đó: $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 1.2.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim \frac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

(2) $\lim \frac{6n+2}{n+5}=6$

(3) $\lim \frac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

(4) $\lim \frac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$

Lời giải

(1) $\lim \frac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

Ta có $\lim\left(\frac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=\lim \frac{n-8}{n^2+4}$.

Vì $0\le\left|\frac{n-8}{n^2+4}\right|\le\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$.

Mà $\lim \frac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\left(\frac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=0$.

Do đó $\lim \frac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

(2) $\lim \frac{6n+2}{n+5}=6$

Ta có $\lim\left(\frac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim \frac{-28}{n+5}$.

Vì $\left|\frac{-28}{n+5}\right|<\frac{28}{n}$.

Mà $\lim \frac{28}{n}=0$ nên $\lim\left(\frac{6n+2}{n+5}-6\right)=0$.

Do đó $\lim \frac{6n+2}{n+5}=6$.

(3) $\lim \frac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

Ta có $\lim\left(\frac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=\lim \frac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}$.

Vì $0<\left|\frac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}\right|<\frac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}<\frac{3.7^n}{8^n}=3\left(\frac{7}{8}\right)^n$.

Mà nên $\lim\left(\frac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=0$.

Do đó $\lim \frac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$.

(4) $\lim \frac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$

Ta có $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=\lim\dfrac{3^n}{5^n+3^n}$.

Vì $0<\left|\dfrac{3^n}{5^n+3^n}\right|<\dfrac{3^n}{5^n+3^n}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

Mà $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=0$

Do đó $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

Ví dụ 1.3.

Chứng minh rằng:

(1) $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$. (2) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

(1) $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

Ta có $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Vì $0\le\left|\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right|=\dfrac{|-\sin 3n|}{3^n}\le\dfrac{1}{3^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Mà $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)=0$.

Do đó $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

(2) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\dfrac{2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)}{2}=\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}$.

Vì $0\le\left|\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\right|\le\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\le\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2}+2n\right)}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}=0$.

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 2. Giới hạn dãy số: dạng phân thức

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n.

☑ **Bước 1:** Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.

☑ **Bước 2:** Áp dụng kết quả $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0 \to \lim \dfrac{f(n)}{g(n)} = \ldots$.

Ví dụ 2.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$. (2) $\lim \dfrac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$ (3) $\lim \dfrac{n+2}{n^2 + n + 1}$

Lời giải

(1) $\lim \dfrac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

Ta có: $\lim \dfrac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n} - 4\right)}{n^3\left(2 + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}\right)} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n} - 4}{2 + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

(2) $\lim \dfrac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$

Ta có: $\lim \dfrac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2} = \lim \dfrac{n^3\left(1 - \dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2} + 2\right)} = \lim \left(n.\dfrac{1 - \dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} + 2}\right) = +\infty$.

Vì $\lim \left(\dfrac{1 - \dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} + 2}\right) = \dfrac{1}{2} > 0; \lim n = +\infty$.

(3) $\lim \dfrac{n+2}{n^2 + n + 1}$

Ta có: $\lim \dfrac{n+2}{n^2 + n + 1} = \lim \dfrac{n\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim \dfrac{1}{n}.\dfrac{1 + \dfrac{3}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 0$.

Ví dụ 2.2.

Tìm giới hạn của các dãy số sau:

(1) $u_n = \dfrac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n}$. (2) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$ (3) $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$

Lời giải

(1) $u_n = \dfrac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n}$.

$$\lim u_n = \lim \frac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n} = \lim \frac{n^3\left(-3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{-3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}} = -\frac{3}{2}.$$

(2) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$

$$\lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n^2+n+3} = \lim \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{n}.\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = 0.$$

(3) $u_n = \dfrac{2025n+2024}{n-2023}$

$$\lim u_n = \lim \frac{2025n+2024}{n-2023} = \lim \frac{n\left(2025+\frac{2024}{n}\right)}{n\left(1-\frac{2023}{n}\right)} = \lim \frac{2025+\frac{2024}{n}}{1-\frac{2023}{n}} = 2025.$$

Ví dụ 2.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$ (2) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

(3) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ (4) $\lim (2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

Lời giải

(1) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$

$$\lim \frac{5n^2+3n-7}{n^2} = \lim \left(\frac{5n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{7}{n^2}\right) = \lim \left(5+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right) = 5.$$

(2) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

$$\lim \frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1} = \lim \frac{-4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{-4}{2} = -2$$

(3) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

$$\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)} = \lim \frac{n^4}{n\left(1+\frac{1}{n}\right).n\left(\frac{2}{n}+1\right)n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}+1\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1$$

(4) $\lim (2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n} - \dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

$$\lim (2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n} - \frac{1}{n^2+3n-1}\right) = \lim \frac{(2n+1)^2(2n^2+7n-3)}{(n^2+2n)(n^2+3n-1)}$$

$$= \lim \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2^2.2}{1.1} = 8$$

Dạng 3. Giới hạn dãy số: dạng lũy thừa

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các lũy thừa dạng X^n

☑ **Bước 1:** Đưa biểu thức về cùng số mũ n.

☑ **Bước 2:** Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.

☑ **Bước 3:** Áp dụng kết quả " Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n = 0$ ".

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(2^n+3^n\right)$. (2) $\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]$

Lời giải

(1) $\lim\left(2^n+3^n\right)$.

$$\lim\left(2^n+3^n\right)=\lim 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]=+\infty.$$

(2) $\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]$

$$\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]=\lim 4^n\left[-1+\left(-\frac{2}{4}\right)^n\right]=-\infty.$$

Ví dụ 3.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)$ (2) $\lim\left(\dfrac{4.3^n-2^n}{2.5^n+4^n}\right)$

(3) $\lim\left(\dfrac{7^n+1}{-2.3^n-3.6^n}\right)$ (4) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)$

Lời giải

(1) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)$.

$$\lim\left(\frac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)=\lim\left(\frac{\frac{1+3^n}{3^n}}{\frac{3.3^n+2^n}{3^n}}\right)=\lim\left(\frac{\frac{1}{3^n}+1}{3+\frac{2^n}{3^n}}\right)=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\left(\dfrac{4.3^n-2^n}{2.5^n+4^n}\right)$

$$\lim\left(\frac{4\cdot 3^n-2^n}{3\cdot 5^n+4^n}\right)=\lim\left(\frac{\dfrac{4\cdot 3^n-2^n}{5^n}}{\dfrac{3\cdot 5^n+4^n}{5^n}}\right)=\lim\left(\frac{4\cdot\dfrac{3^n}{5^n}-\dfrac{2^n}{5^n}}{2+\dfrac{4^n}{5^n}}\right)=0$$

(3) $\lim\left(\dfrac{7^n+1}{-2.3^n-3.6^n}\right)$

$$\lim\left(\frac{7^n+1}{-2\cdot 3^n-3\cdot 6^n}\right)=\lim\left(\frac{\dfrac{7^n+1}{7^n}}{\dfrac{-2\cdot 3^n-3\cdot 6^n}{7^n}}\right)=\lim\left(\frac{1+\dfrac{1}{7^n}}{-2\cdot\dfrac{3^n}{7^n}-3\cdot\dfrac{6^n}{7^n}}\right)=-\infty.$$

(4) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)$

$$\lim\left(\frac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)=\lim\left(\frac{\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{6^n}}{\dfrac{2.5^n-6^n}{6^n}}\right)=\lim\frac{5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}{2.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-1}=0.$$

Ví dụ 3.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

(2) $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Lời giải

(1) $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

Ta có: $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{3}{2}\left(1-3^n\right)}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{4}$

(2) $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Đặt : $u_n=1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n;\ v_n=1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n.$

Ta có: $u_n=1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right).$ tương tự $v_n=1+\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right).$

Từ đó, $\lim u_n = \frac{3}{2}, \lim v_n = \frac{5}{3}$. Vậy $\lim \frac{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{9}{10}$.

Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n), xác định bởi

(1) $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}. \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$

(2) $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$

Lời giải

(1) $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}. \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$

Đặt $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$. Ta có: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5} v_n = \ldots = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.

Vậy, ta có: $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, do đó $\lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4} = \lim v_n = 0$.

(2) $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$

Ta có: $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{1}{2^2}(u_{n-1} - 1) = \cdots = \frac{1}{2^n}(u_1 - 1) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Do đó, $u_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 1$. Vậy $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{2^{n-2}} + 1\right) = 1$.

Dạng 4. Giới hạn dãy số: dạng căn thức

Phương pháp

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ chứa căn thức

Ở dạng này ta thường gặp 2 trường hợp:

» **Trường hợp 1:** Đơn giản – Chỉ rút nhân tử chung (như dạng 2)

Lưu ý: $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{khi } n \ge 0 \\ -n & \text{khi } n < 0 \end{cases}$, ở đây ta chỉ có $n \to +\infty$ nên $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$

» **Trường hợp 2:** Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định: $\dfrac{0}{0}; 0.\infty; \dfrac{\infty}{\infty}$

- $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
- $\sqrt{A} - B = \dfrac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$
- $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A - B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A - B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.B + (B)^2}$

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất để tính được kết quả của giới hạn:

(1) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

(2) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

(3) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

Ví dụ 4.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$.

(2) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

Lời giải

(1) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$.

Ta có: $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}} = \lim \sqrt{\dfrac{n\left(8 + \dfrac{2}{n}\right)}{n\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)}} = \lim \sqrt{\dfrac{8 + \dfrac{2}{n}}{2 - \dfrac{1}{n}}} = \sqrt{\dfrac{8+0}{2-0}} = 2$.

(2) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

Ta có: $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}} = \lim \sqrt{\dfrac{n\left(2+\dfrac{9}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}} = \lim \sqrt{\dfrac{2+\dfrac{9}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}} = \sqrt{\dfrac{2}{1}} = \sqrt{2}$.

Ví dụ 4.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

(2) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

Lời giải

(1) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

$$\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} = \lim \dfrac{n\sqrt{\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n}$$

$$= \lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+n} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{\sqrt{4}+2}{1+1} = 2.$$

(2) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

$$\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \lim \dfrac{n^2-\sqrt[3]{n^6\left(\dfrac{1}{n^6}-1\right)}}{\sqrt{n^4\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)}+n^2}$$

$$= \lim \dfrac{n^2-n^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{n^2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+n^2} = \lim \dfrac{n^2\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}\right)}{n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1\right)} = \lim \dfrac{1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1} = \dfrac{1+\sqrt[3]{-1}}{1+1} = 0.$$

Ví dụ 4.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$.

(2) $\lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n$

Lời giải

(1) $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$.

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)=\lim\frac{4n^2+3n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}\ (*)$$

$$=\lim\left(\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}\right)=\lim\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)}=\lim\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{3}{4}.$$

(2) $\lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n$

$$\lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n=\lim\frac{\left[(n+3)-(n-5)\right]n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}=\lim\frac{8n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)}=+\infty.$$

(vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}=4=const$)

Chương 03

Bài 1.

GIỚI HẠN DÃY SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$ là mệnh đề **sai** vì chưa rõ dấu của v_n là dương hay âm.

» Câu 2. Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương $\Rightarrow (I)$ là khẳng định đúng.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1 \Rightarrow (II)$ là khẳng định sai vì $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1 \Rightarrow (III)$ là khẳng định đúng.

Vậy số khẳng định đúng là 2.

» Câu 3. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0\ (|q| > 1)$.

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0\ (k > 1)$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n = 0\ \left(|q| < 1\right)$.

» Câu 4. $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+3} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = 0$.

» Câu 5. $\lim \dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim \dfrac{1}{2n+5} = \lim \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{2+\frac{5}{n}} = 0$.

» Câu 6. Tìm $I = \lim \dfrac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \lim \dfrac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1} = \lim \dfrac{\frac{7}{n} - 2 + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = -\dfrac{2}{3}$.

» Câu 7. $\lim \dfrac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{-3}{5}$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim \dfrac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5} = \lim \dfrac{\frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^6}}{1 + \frac{5}{n}} = 0$.

» Câu 8. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L = -\infty$. **B.** $L = -2$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}=\lim\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}-1}=0$.

» Câu 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Lời giải

Chọn C

➢ Xét đáp án A. $\lim\frac{n^2-2}{5n+3n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}+3}=\frac{1}{3}$.

➢ Xét đáp án B. $\lim\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+3}=\frac{1}{3}$

➢ Xét đáp án C. $\lim\frac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+3}=0$.

➢ Xét đáp án D. $\lim\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-2}{\frac{5}{n}+3}=-\frac{2}{3}$.

» Câu 10. Giá trị của $\lim\frac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\frac{2-n}{n+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0-1}{1+0}=-1$.

» Câu 11. $\lim\frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{19}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\frac{1+19n}{18n+19}=\lim\frac{\frac{1}{n}+19}{18+\frac{19}{n}}=\frac{19}{18}$.

» Câu 12. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\dfrac{1}{n}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\lim\dfrac{n+1}{n}=\lim 1+\lim\dfrac{1}{n}=1$.

» Câu 13. Tìm $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}=\lim\dfrac{n^5\left(8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}\right)}=\lim\dfrac{8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}}=\dfrac{8}{4}=2$.

» Câu 14. $\lim\dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{2}{11}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}=\lim\dfrac{2-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}}=\dfrac{1}{2}$.

» Câu 15. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{3-n}, n\in\mathbb{N}^*$ là:

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{2n-1}{3-n}=\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{3}{n}-1}=-\dfrac{1}{3}$.

» Câu 16. Tính $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}=\lim\dfrac{8+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{5}{n}+2}=4$.

» **Câu 17.** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$; $v_n = \frac{3}{n+3}$. Tính $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{3}{n+3}} = \lim \frac{n+3}{3(n+1)} = \lim \frac{1+\frac{3}{n}}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}$.

» **Câu 18.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$ bằng.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

» **Câu 19.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1,0001)^n$. **D.** $(1,2345)^n$.

Lời giải

Chọn A

Do $0,999 < 1$ nên $\lim(0,999)^n = 0$.

» **Câu 20.** $\lim \frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}} = \lim \frac{100+3.\left(\frac{99}{100}\right)^n}{1-2.\left(\frac{98}{100}\right)^n} = 100$$

» **Câu 21.** $\lim\left(3^n-4^n\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\left(3^n-4^n\right) = \lim 4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) = -\infty$.

» **Câu 22.** Tính giới hạn $\lim \frac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\dfrac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}=\lim\dfrac{6.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-6}{4.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1}=-6$.

» Câu 23. Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A. $T=0$. **B.** $T=\dfrac{1}{4}$. **C.** $T=\dfrac{1}{8}$. **D.** $T=\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3}\right)=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n}+\sqrt{16^{n+1}+3^n}}$

$=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16.16^n+4^n}+\sqrt{16.16^n+3^n}}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}+\sqrt{16+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}}=\dfrac{1}{4+4}=\dfrac{1}{8}$.

» Câu 24. Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n-2|<\dfrac{1}{n^3}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n=1$.
C. $\lim u_n=0$. **D.** $\lim u_n=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|u_n-2|<\dfrac{1}{n^3}\Rightarrow\lim(u_n-2)=\lim\dfrac{1}{n^3}=0\Rightarrow\lim u_n-2=0\Rightarrow\lim u_n=2$.

» Câu 25. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)$

$=\lim\left(\dfrac{(a^2-4a+3)n+2+2a^2-8a}{n+2}\right)=\lim\left(\dfrac{a^2-4a+3+\dfrac{2+2a^2-8a}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)=a^2-4a+3$.

Theo giả thiết: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0\Leftrightarrow a^2-4a+3=0\Leftrightarrow a=3\vee a=1$.

Vậy $S=\{1;3\}\Rightarrow 1+3=4$.

» **Câu 26.** Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a.b$

A. 192 **B.** 68 **C.** 32 **D.** 128

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}=\lim\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-1\right)^2}{\left(4-\dfrac{5}{n}\right)^3}=\dfrac{3}{64}=\dfrac{a}{b}$. Do đó: $a.b=192$

» **Câu 27.** Biết $\lim\dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2}=\dfrac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng

A. -12. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2}=\lim\dfrac{n^3\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(a+\dfrac{2}{n^3}\right)}=\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $a=4$. Khi đó $a-a^2=4-4^2=-12$.

» **Câu 28.** Giới hạn $\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có kết quả quen thuộc $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Do đó $\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}=\lim\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+2n+7)}=\lim\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6\left(1+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)}=\dfrac{1.2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

» **Câu 29.** Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{n}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+2+...+n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

» **Câu 30.** $\lim(2-3n)^4(n+1)^3$ là:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 81 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

$$\lim(2-3n)^4(n+1)^3=\lim\left[n^7\left(\frac{2}{n}-3\right)^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right]$$

Ta có $\lim n^7=+\infty$

$$\lim\left(\frac{2}{n}-3\right)^4=(-3)^4=3^4$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow \lim(2-3n)^4(n+1)^3=+\infty$$

» Câu 31. Giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\dfrac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{1.\dfrac{1-4^n}{1-4}}}{2n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{4^n-1}}{\sqrt{3}(2n-1)}=+\infty$.

» Câu 32. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim u_n=\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}=\lim\frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+1}=\lim\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

» Câu 33. $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{n^2-3n+1}-n=\dfrac{-3n+1}{\sqrt{n^2-3n+1}+n}=\dfrac{-3+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}$

Nên $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)=-\dfrac{3}{2}$

» **Câu 34.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **D.** $\lim \dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}==\lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

» **Câu 35.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim \frac{\left(9n^2+2n-1\right)-\left(4n^2+1\right)}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}=\lim \frac{5n^2+2n-2}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\lim \frac{n^2\left(5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right)}=\lim n\cdot\left(\frac{5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}\right)=+\infty.$$

» **Câu 36.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$$

$$=\lim \frac{8n^2-2}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right).\left(5n^2-8n^3\right)}+\sqrt[3]{\left(5n^2-8n^3\right)^2}}$$

$$=\lim \frac{8-\frac{2}{8n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right).\left(\frac{5}{n}-8\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{5}{n}-8\right)^2}}=\frac{2}{3}.$$

» **Câu 37.** Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)=6+\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n\right)$$

$$=6+\lim\frac{3n^2+4}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2+4\right)^2}+2n.\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}+4n^2}$$

$$=6+\lim\frac{3+\frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)^2}+2.\sqrt[3]{8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}+4}=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}.$$

» Câu 38. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)=2+\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n\right)=2+\lim\frac{n}{\sqrt[3]{\left(n-n^3\right)^2}-n.\sqrt[3]{n-n^3}+n^2}$$

$$=2+\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}+1}=2+0=2.$$

» Câu 39. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$$

$$=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)=\lim\frac{\left(n^4+n^2-n^4\right)}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{\left(n^6+1\right)-n^6}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}$$

$$=\lim\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}+0=\frac{1}{2}$$

» Câu 40. Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}+\frac{n^3-\left(n^3+n^2\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}-\frac{n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}-\frac{n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right)}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

» Câu 41. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim q^n=0$ nếu $|q|<1$.

Mặt khác $\left|\frac{4}{e}\right|>1$; $\left|\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{-5}{3}\right|>1$; $\left|\frac{1}{3}\right|<1$. Vậy $\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

» Câu 42. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

» Câu 43. Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2;\frac{2}{3};\frac{2}{3^2};...;\frac{2}{3^n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q=\frac{1}{3}<1$.

$S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...=2.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$.

» Câu 44. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555...=3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

A. $\frac{63}{20}$. **B.** $\frac{142}{45}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$3,15555...=3,1(5)=3,1+5\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right)=3,1+5.\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{142}{45}$$

» Câu 45. Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1,\ q=\frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức được $S=\frac{u_1}{1-q}$ kết quả $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...=2$.

» Câu 46. Cho dãy số $(u_n);n\in\mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=-\frac{u_n}{5}\end{cases}$. Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{-\frac{u_n}{5}}{u_n}=-\frac{1}{5}$ do đó dãy $(u_n),n\in\mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=3$, $d=-\frac{1}{5}$.

Suy ra $\lim S_n=\frac{u_1}{1-q}=\frac{3}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$.

» Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $\lim\frac{n}{u_n}$.

A. $L=\frac{1}{3}$. **B.** $L=\frac{1}{2}$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n=u_1+(n-1)d=2+(n-1)3=3n-1$.

$\lim\frac{n}{u_n}=\lim\frac{n}{3n-1}=\lim\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$.

» Câu 48. Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n=\frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n=n\left(\sqrt{n^2+2018}-\sqrt{n^2+2016}\right)$.

C. $\begin{cases}u_1=2017\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+1),\quad n=1,2,3...\end{cases}$. **D.** $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính giới hạn của các dãy số trong từng đáp án:

+) Đáp án A: $\lim u_n=\lim\frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}=\lim\left[\frac{2017-n}{n}.\left(\frac{2017-n}{2018-n}\right)^{2017}\right]$

$=\lim\left[\left(\frac{2017}{n}-1\right)\left(\frac{\frac{2017}{n}-1}{\frac{2018}{n}-1}\right)^{2017}\right]=-1$.

+) Đáp án B: $\lim u_n=\lim n\left(\sqrt{n^2+2018}-\sqrt{n^2+2016}\right)=\lim\frac{n\left(n^2+2018-n^2-2016\right)}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}}$

$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2018}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2016}{n^2}}}=1$.

+) Đáp án C:

Cách 1: Ta có $u_{n+1}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)\Rightarrow u_n-1=\frac{1}{2}(u_{n-1}-1)=...=\frac{1}{2^{n-1}}(u_1-1)$

$\Rightarrow u_n=\frac{2016}{2^{n-1}}+1\Leftrightarrow u_n=4032.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\ \Rightarrow\lim u_n=1$.

Cách 2:

Bước 1: Ta chứng minh (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1.

Thật vậy bằng quy nạp ta có $u_1=2017>1$.

Giả sử $u_n>1\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+1)>\frac{1}{2}(1+1)=1$

Vậy $u_n>1\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Hơn nữa $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(1-u_n)<0$ nên (u_n) là dãy giảm

Suy ra (u_n) có giới hạn $\lim u_n=a$

Bước 2: Ta có $a=\lim u_n=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2}(u_n+1)=\frac{1}{2}\lim u_n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=1$.

+) Đáp án D:

Ta có $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim u_n=\lim\frac{n}{n+1}=1$.

» Câu 49. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n=\frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1, 2, ...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=\frac{n}{(1+n^2)^2-n^2}=\frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Ta có $u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{21}+...+\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$

Suy ra $\lim(u_1+u_2+...+u_n)=\frac{1}{2}\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

» Câu 50. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=-2\\u_n=3u_{n-1}-1, \forall n\geq 2\end{cases}$, khi đó $L=\lim\frac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\frac{5}{6}$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u_n=v_n+\frac{1}{2}$, thay vào biểu thức truy hồi ta có $v_n+\frac{1}{2}=3\left(v_{n-1}+\frac{1}{2}\right)-1\Leftrightarrow v_n=3v_{n-1}, \forall n\geq 2$

.

Dễ thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1=u_1-\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$, công bội $q=3$, suy ra $v_n=-\frac{5}{2}.3^{n-1}$

.

Do đó $u_n=v_n+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}.3^{n-1}+\frac{1}{2}(n\geq 1)$.

Vậy $L=\lim\frac{u_n}{3^n}=\lim\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2.3^n}\right)=-\frac{5}{6}$.

» **Câu 51.** Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1}=4v_n-2, v_{n+1}=u_n+1$ với mọi $\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $\begin{cases}\lim u_n=a\\ \lim v_n=b\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\lim u_{n+1}=\lim(4v_n-2)\\ \lim v_{n+1}=\lim(u_n+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4b-2\\ b=a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)=a+2b=-\frac{2}{3}+2.\frac{1}{3}=0$.

» **Câu 52.** Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét

B. Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét

C. Chiều cao mô hình dưới 2 mét.

D. Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính khối cầu dưới cùng là $R_1=50$ cm.

Gọi $R_2,\ R_3,\ldots,R_n$ lần lượt là bán kính của các khối cầu $R_2,R_3,...,R_n$ nằm nằm ngay trên khối cầu dưới cùng.

Ta có $R_2=\frac{R_1}{2},\ R_3=\frac{R_2}{2}=\frac{R_1}{4},\ldots,\ R_n=\frac{R_{n-1}}{2}=\frac{R_1}{2^{n-1}}$

Gọi h_n là chiều cao của mô hình gồm có n khối cầu chồng lên nhau.

Ta có

$$h_n=2R_1+2R_2+2R_3+...+2R_n=2\left(R_1+\frac{1}{2}R_1+\frac{1}{4}R_1+...+\frac{1}{2^{n-1}}R_1\right)=2R_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Suy ra chiều cao mô hình là $h=\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2R_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]$

Xét dãy số $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};...;\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^n};...$ là một cấp số nhân có $u_1=1$ và công bội $q=\frac{1}{2}$ nên là dãy cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Suy ra $h=2R_1.2=200$ cm. Vậy chiều cao mô hình nhỏ hơn 200 cm.

» **Câu 53.** Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao $8m$ so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

A. $57m$. **B.** $54m$. **C.** $56m$. **D.** $58m$.

Lời giải

Chọn C

Lần đầu rơi xuống, quảng đường quả bóng đã bay đến lúc chạm đất là $8m$.

Sau đó quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ 2 thì quảng đường quả bóng đã bay là $8+2.8.\frac{3}{4}$.

Tương tự, khi quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ n thì quảng đường quả bóng đã bay là $8+2.8.\frac{3}{4}+.......+2.8.(\frac{3}{4})^{n-1}=8+\frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}=8+48(1-(\frac{3}{4})^{n-1})$.

Quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả đến lúc không máy nữa bằng:

$\lim[8+48(1-(\frac{3}{4})^{n-1})]=8+48=56$.

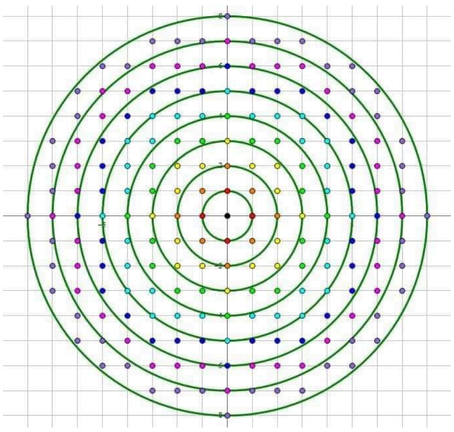
» Câu 54. Với mỗi số nguyên dương n, gọi s_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$. (nếu $a\ne b$ thì hai cặp số $(a;b)$ và $(b;a)$ khác nhau). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n}=2$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n}=4$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Xét điểm $M(x;y)$ bất kì nằm trong (tính cả biên) của hình tròn (C_n): $x^2+y^2\le n^2$.

Mỗi điểm M tương ứng với một và chỉ một hình vuông đơn vị $S(M)$ nhận M là đỉnh ở góc trái, phía dưới, có các cạnh lần lượt song song hoặc nằm trên các trục tọa độ.

Ta được s_n bằng số các hình vuông $S(M)$ và bằng tổng diện tích của $S(M)$, với $M\in(C_n)$.

Nhận xét: các hình vuông $S(M)$, $S(M)$ đều nằm trong hình tròn $(C_{n+\sqrt{2}})$: $x^2+y^2\le\left(n+\sqrt{2}\right)^2$. Do đó $s_n\le\pi\left(n+\sqrt{2}\right)^2$. (1)

Mặt khác, các hình vuông $S(M)$ phủ kín hình tròn $\left(C_{n-\sqrt{2}}\right)$: $x^2+y^2\le\left(n-\sqrt{2}\right)^2$.

Vì thế $s_n\ge\pi\left(n-\sqrt{2}\right)^2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\sqrt{\pi}\left(n-\sqrt{2}\right)\le\sqrt{s_n}\le\sqrt{\pi}\left(n+\sqrt{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$.

$\Leftrightarrow\sqrt{\pi}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)\le\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}\le\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)$

Mà $\lim\sqrt{\pi}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)=\lim\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)=\sqrt{\pi}$, theo nguyên lí kẹp, ta được $\lim\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$.

Cách 2: Gọi D_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ với $x\ne y$ và E_n là số cặp số nguyên $(x;x)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$. Ta có E_n là số các số nguyên k sao cho $2k^2\le n^2$, từ $k\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$, ta có $n\in\mathbb{Z}$ và $-\left\lfloor\dfrac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor\le k\le\left\lfloor\dfrac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor$. Cho nên $E_n=2\left\lfloor\dfrac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+1$.

Tiếp theo, ta đánh giá D_n.

Tổng số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ với $x\ne y$ là $4N_n$ với N_n là số các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ và $x\ne y$. Giả sử $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$, khi đó $0\le x\le n$, $0\le y\le\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Nên ta có đánh giá với D_n là $4\left(-n+\sum\limits_{0\le x\le n}\left\lfloor n^2-x^2\right\rfloor\right)\le 4N_n\le D_n\le 4\sum\limits_{0\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Vì thế cho nên từ $s_n=E_n+D_n$, có $-4n+1+T_n\le s_n\le 1+T_n$, trong đó $T_n=2\left\lfloor\dfrac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum\limits_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2\left\lfloor\dfrac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum\limits_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\right)$. Do đánh giá về phần nguyên

$$2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\le 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)+4\sum_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2},$$

$$2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\ge 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)+4\sum_{1\le x\le n}\left(\sqrt{n^2-x^2}-1\right)$$

Nên ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{n^2}\sum\limits_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{n}\sum\limits_{1\le x\le n}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{n}\right)^2}$

Về bản chất, kết quả giới hạn này là giá trị của tích phân xác định $I=\int\limits_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$.

» Câu 55. Tính giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

» Câu 56. Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+2+3+...+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+...+k=\frac{(1+k)k}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{1+2+...+k}=\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

$L=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+...+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}\right)=2$.

» Câu 57. Tổng $S=\frac{100}{10.15.20}+\frac{100}{15.20.25}+\frac{100}{20.25.30}+...+\frac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{93}{1380}$ **B.** $\frac{91}{13800}$ **C.** $\frac{9}{138}$ **D.** $\frac{91}{1380}$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\frac{100}{10.15.20}=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right)$; $\frac{100}{15.20.25}=10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right)$;

$\frac{100}{20.25.30}=10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right)$; $\frac{100}{110.115.120}=10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

Khi đó

$S=10\left(\frac{1}{10.15}-\frac{1}{15.20}\right)+10\left(\frac{1}{15.20}-\frac{1}{20.25}\right)+10\left(\frac{1}{20.25}-\frac{1}{25.30}\right)+...+10\left(\frac{1}{110.115}-\frac{1}{115.120}\right)$

$=\frac{1}{15}-\frac{1}{115.12}=\frac{91}{1380}$

» Câu 58. Giá trị của tổng: $S=\frac{12}{4.16}+\frac{20}{16.36}+\frac{28}{36.64}+...+\frac{84}{400.484}$ là:

A. $\frac{31}{121}$ **B.** $\frac{30}{121}$ **C.** $\frac{32}{121}$ **D.** $\frac{33}{121}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{12}{4.16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16};\frac{20}{16.36}=\frac{1}{16}-\frac{1}{36};\frac{28}{36.64}=\frac{1}{36}-\frac{1}{64};\frac{84}{400.484}=\frac{1}{400}-\frac{1}{484}$

Khi đó $S=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{64}\right)+...+\left(\frac{1}{400}-\frac{1}{484}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{484}=\frac{30}{121}$

» **Câu 59.** Cho $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ **C.** $\frac{2^n-1}{2^n}$ **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}}$

Lời giải

Chọn B

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}\Leftrightarrow S_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 60.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.		
(b)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.		
(c)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên		
(d)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$		

Lời giải

$$\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{a+\frac{5}{n^2}}=\frac{4}{a}\ (a\neq 0)$$

(a) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.

Khi đó $2=\lim u_n\Leftrightarrow 2=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=2$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.

Khi đó $1=\lim u_n\Leftrightarrow 1=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=4$

» **Chọn** SAI.

(c) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên

Khi đó $3=\lim u_n\Leftrightarrow 3=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}$

» **Chọn** SAI.

(d) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$

Khi đó $-2=\lim u_n\Leftrightarrow -2=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=-2$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 61.** Đặt $I=\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta biến đổi được $I=\lim\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$		
(b)	Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn		
(c)	Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1		
(d)	Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$		

Lời giải

(a) Ta biến đổi được $I=\lim\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\to=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp.

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)$

$=\lim\dfrac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

» **Chọn** SAI.

(b) Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn

$$I=\lim\dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a^2-a-2}{2}$$

Khi $I=0\Leftrightarrow\dfrac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right.$.

» **Chọn** SAI.

(c) Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1

Khi đó $-1+2=1\neq 0$

» **Chọn** SAI.

(d) Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$

Khi $I=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2-a-2}{2}=1\Leftrightarrow a^2-a-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\\a=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 62.** Biết $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có tất cả 3 giá trị a thỏa mãn		
(b)	Tổng các giá trị a tìm được bằng 0		
(c)	Có 2 giá trị nguyên âm a thỏa mãn		
(d)	Tích các giá trị a tìm được bằng -4		

Lời giải

Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2.$

(a) Có tất cả 3 giá trị a thỏa mãn

Vậy $a\in\{-2;2\}$

» **Chọn** SAI.

(b) Tổng các giá trị a tìm được bằng 0

Khi đó tổng các giá trị của a bằng 0

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Có 2 giá trị nguyên âm a thỏa mãn

» **Chọn** SAI.

(d) Tích các giá trị a tìm được bằng -4

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 63. Cho giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		
(b)	Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$		
(c)	Khi $a>0$ thì $L>0$		
(d)	Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b,c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$		

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

(a) Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Với $a=1$ thì $L=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$

Với $a=1$ thì $L=\sqrt{3}$

» **Chọn** SAI.

(c) Khi $a>0$ thì $L>0$

Với $a>0$ thì $\sqrt[3]{a}>0\Rightarrow\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}>0\Rightarrow L>0$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b,c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$

$$L=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}=b\sqrt{3}+c\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\\ c=0\end{cases}\Rightarrow P=\frac{a+c}{b^3}=\frac{a}{\frac{a}{27}}=27$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 64.** Cho giới hạn $L=\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=2$ khi $a=1$		
(b)	$L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn		
(c)	$L>3$ khi $a>6$		
(d)	Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.		

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\dfrac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\dfrac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

(a) $L=2$ khi $a=1$

Khi đó $L=2\Leftrightarrow\sqrt{3+a}=2\Leftrightarrow 3+a=4\Leftrightarrow a=1$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn

Khi đó $L=3\Leftrightarrow\sqrt{3+a}=3\Leftrightarrow 3+a=9\Leftrightarrow a=6$

» **Chọn** SAI.

(c) $L>3$ khi $a>6$

Khi đó $L>3\Leftrightarrow\sqrt{3+a}>3\Leftrightarrow 3+a>9\Leftrightarrow a>6$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}.$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 65.** Biết $\lim\dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2$ và $\lim\dfrac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=b$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của $a=2$		
(b)	Giá trị của $b=4$		
(c)	$2a-b=0$		

(d)	Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân		

Lời giải

(a) Giá trị của $a=2$.

Ta có $\lim\dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2\Leftrightarrow\lim\dfrac{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(a+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}=2\Leftrightarrow\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{a+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=2\Leftrightarrow\dfrac{2}{a}=2\Leftrightarrow a=1$.

» **Chọn** SAI.

(b) Giá trị của $b=4$.

Ta có $b=\lim\dfrac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=\lim\dfrac{3^n+4^n.4}{4^n+3}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}{1+3.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}=4.\Rightarrow b=4$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $2a-b=0$.

Vậy $a=1,b=4\Rightarrow 2a-b=2.1-4=-2$.

» **Chọn** SAI.

(d) Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân.

Ta có $a=1,b=4$.

Mà $b^2=16$ và $a.16=1.16=16$ $\Rightarrow b^2=a.16$ nên theo tính chất của cấp số nhân ta có $1,4,16$ lập thành một cấp số nhân với $u_1=1,q=4$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 66.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=an^2+n-1$ với $a\in\mathbb{R}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.		
(b)	Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.		
(c)	Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		
(d)	Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		

Lời giải

(a) Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.

Với $a=1$, $u_n=n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$.

» **Chọn** SAI.

(b) Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.

Với $a=2$, $u_n=2n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(2n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

Với $a=-\frac{5}{2}$, $u_n=-\frac{5}{2}n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(-\frac{5}{2}n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.*

Với $a<0$. Ta có: $\lim\left(an^2+n-1\right)=\lim n^2\left(a+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$.

Với $a=0$, $u_n=n-1$. Ta có: $\lim(n-1)=\lim n\left(1-\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 67. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng		
(b)	Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng		
(c)	Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n, sau n chu kì năm công tác là: $u_n=5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^n$ đồng		
(d)	Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng		

Lời giải

(a) *Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng.*

Mức lương 3 năm tiếp theo của ông An là:

$$5000000+5000000.\frac{4}{100}=5000000.\left(1+\frac{1}{25}\right)=5200000\ \text{(đồng)}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng.*

1 năm = 12 tháng.

Tổng lương 3 năm đầu là $36.5000000\ =180000000$ đồng.

Tổng lương từ năm thứ 4 đến năm thứ 6 là: $36.520000=187200000$ đồng.

Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là:

$180000000+187200000=367200000$ đồng.

» **Chọn** SAI.

(c) *Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n, sau n chu kì năm công tác là:*

$u_n=5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^n$ *đồng.*

Chu kì thứ nhất mức lương của ông An là: $u_1=5000000$ đồng.

Chu kì thứ hai mức lương của ông An là:

$$u_2 = 5000000 + 5000000.\frac{4}{100} = 5000000.\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\frac{26}{25} \text{ (đồng)}$$

Chu kì thứ ba mức lương của ông An là:

$$u_3 = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right) + 5000000.\left(\frac{26}{25}\right).\frac{1}{25} = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right).\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 \text{ (đồng).}$$

Chu kì thứ tư mức lương của ông An là:

$$u_4 = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 + 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2.\frac{1}{25} = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^3 \text{ (đồng).}$$

Cứ tiếp tục như vậy ta dự đoán được sau chu kì thứ n số tiền lương ông An nhận được là:

$$u_n = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{n-1} \text{ (đồng).}$$

» Chọn SAI.

(d) *Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng.*

Tổng tiền lương của chu kì thứ nhất là: $36.5000000 = 180000000$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ hai là: $36.5000000.\frac{26}{25}$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ ba là: $36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2$ đồng.

….

Tổng tiền lương của chu kì thứ mười một là: $36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{10}$ đồng.

Tổng tiền lương 2 năm tiếp theo của chu kì thứ mười hai là: $24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$ đồng.

Tổng tiền lương sau tròn 35 năm là:

$$S = 36.5000000 + 36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right) + 36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 + ... + 36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{10} + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$$

$$= 36.5000000\left(1+\frac{26}{25}+\left(\frac{26}{25}\right)^2 + ... + \left(\frac{26}{25}\right)^{10}\right) + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$$

$$= \frac{36.5000000.\left(1-\left(\frac{26}{25}\right)^{11}\right)}{1-\frac{26}{25}} + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11} = 2612277740 \text{ đồng.}$$

» Chọn ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 68.** Giới hạn $\lim \dfrac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim \dfrac{a\sqrt{n}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{b+\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $P=a+b^2$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 11***

Ta có:

$$\lim \frac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim \frac{n\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n\sqrt{n}\left(3+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}=\lim \frac{2\sqrt{n}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{3+\dfrac{2}{\sqrt{n}}}\Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\to P=a+b^2=11$$

» **Câu 69.** Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)=\lim \dfrac{a.\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+b.\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}+1}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=(a+b)^2$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 16***

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)=\lim \frac{n^2+2n-2-n^2}{\sqrt{n^2+2n-2}+n}=\lim \frac{2n-2}{n\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}}+n}$$

$$=\lim \frac{n\left(2-\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}}+1\right)}=\lim \frac{2-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}}+1}=\lim \frac{2.\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+2.\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}+1}$$

Khi đó $a=b=2\Rightarrow S=(a+b)^2=16$

» **Câu 70.** Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,5***

Nhận xét: $1+2+\ldots+n$ là tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$.

Vì vậy $1+2+\ldots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$.

Ta có: $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}=\lim \dfrac{n(n+1)}{2\left(n^2+3n\right)}=\lim \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 71.** Tìm giới hạn $\lim \dfrac{n\cdot\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,5***

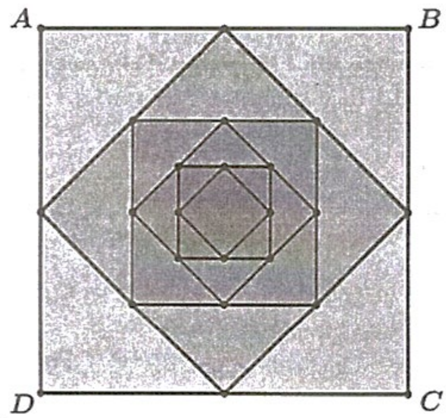
Nhận xét: $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$, vì vậy, ta có:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{(u_1+u_n)n}{2}=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$$

Vì vậy: $\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}=\lim\frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+n+1}=\lim\frac{n^2}{2n^2+n+1}$

$$=\lim\frac{n^2}{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

» Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó. $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*



Lời giải

✓ ***Trả lời: 13,7***

Nếu cạnh hình vuông ban đầu là x thì theo định lí Pythagore, ta có cạnh hình vuông thứ hai là $\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.(*)

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ là $u_1=1$, từ (*) ta có cạnh hình vuông thứ hai là $u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, cạnh hình vuông thứ ba là $u_3=\frac{1}{2}$, cạnh hình vuông thứ tư là $u_4=\frac{\sqrt{2}}{4}$,…

Xét tổng chu vi dãy các hình vuông là:

$$S=4u_1+4u_2+4u_3+\ldots=4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\ldots\right).$$

Dễ thấy $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng 1, công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy ta có: $S=4\cdot\frac{u_1}{1-q}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=8+4\sqrt{2}\approx 13,7$.

» Câu 73. Giới hạn $\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\frac{1-3.a^n}{8+\frac{1}{6}.b^n}}$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 9***

$$\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n-3.3^n}{8.8^n+\frac{1}{6}6^n}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n\left(1-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{8^n\left(8+\frac{1}{6}\left(\frac{6}{8}\right)^n\right)}}=\lim\sqrt[3]{\frac{1-3\left(\frac{3}{8}\right)^n}{8+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^n}}$$

Khi đó $\begin{cases}a=\frac{3}{8}\\ b=\frac{3}{4}\end{cases}\to 8(a+b)=9$

» Câu 74. Tìm giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,5***

$$\lim\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$
$$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

» Câu 75. Tìm tổng $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,25***

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3}$, công bội $q=-\frac{1}{3}$.

Vì vậy $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

» Câu 76. Giá trị của tổng $T=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\ldots=a+\sqrt{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=(a+b)^2$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 16***

Ta thấy T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì vậy $T=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Rightarrow S=(a+b)^2=16$

» **Câu 77.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414...$ viết dạng phân số có dạng $\frac{m}{n}$ với $m;n$ là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n-3m$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1839***

Ta có: $0,271414...=0,27+0,0014+0,000014+...$

Xét tổng $0,0014+0,000014+0,00000014+...$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $u_1=0,0014$ và công bội $q=\frac{1}{100}$.

Vì vậy $0,271414...=0,27+\frac{u_1}{1-q}=\frac{27}{100}+\frac{0,0014}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2687}{9900}\Rightarrow\begin{cases}m=2687\\n=9900\end{cases}\Rightarrow n-3m=1839$.

» **Câu 78.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111...$ viết dạng phân số có dạng $\frac{a}{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b-2a|$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***

Ta có: $0,51111...=0,5+0,01+0,001+0,0001+...$

Xét tổng $0,01+0,001+0,0001+...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $u_1=0,01$ và công bội $q=\frac{1}{10}$.

Vì vậy $0,51111...=0,5+0,01+0,001+0,0001+...$

$=0,5+\frac{u_1}{1-q}=0,5+\frac{0,01}{1-\frac{1}{10}}=\frac{23}{45}\Rightarrow\begin{cases}a=23\\b=45\end{cases}\Rightarrow|b-2a|=1$

» **Câu 79.** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=-2\\u_n=3u_{n-1}-1,\forall n\ge 2\end{cases}$, tính $\lim\frac{u_n}{3^n}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: -0,8***

Xét số a thoả mãn $u_n-a=3(u_{n-1}-a),\forall n\ge 2\Leftrightarrow u_n=3u_{n-1}-2a,\forall n\ge 2$.

Suy ra $-2a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases}u_1=-2\\u_n-\frac{1}{2}=3\left(u_{n-1}-\frac{1}{2}\right),\forall n\ge 2\end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \frac{1}{2}, \forall n \ge 2$ và $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó dãy (v_n) thoả mãn $\begin{cases} v_1 = -\frac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Ta thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = -\frac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \ge 1$

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n \ge 1$.

Vậy $\lim \frac{u_n}{3^n} = \lim \frac{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}{3^n} = \lim \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = -\frac{5}{6} \approx -0{,}8$.

» Câu 80. Biết rằng giới hạn $\lim \left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n \right) = \lim \left(\frac{5 - a.n}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + b \right)$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = a^b$

Lời giải

✓ Trả lời: 64

$$\lim \left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n \right)$$

$$= \lim \left(\frac{\left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - n \right) \cdot \left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n \right)}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right)$$

$$= \lim \left(\frac{n^2 - 4n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right) = \lim \left(\frac{-4n + 5}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right)$$

Khi đó $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a^b = 64$

» Câu 81. Biết rằng giới hạn $\lim \left(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7} \right) = \lim \left(a + \frac{n - 7}{b.n + c.\sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a - b| + c$

Lời giải

✓ Trả lời: 3

$$\lim \left(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7} \right) = \lim \left(1 + \frac{9n^2 - 9n^2 + n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right) = \lim \left(1 + \frac{n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$$

Khi đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \Rightarrow |a - b| + c = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

» Câu 82. Biết giới hạn $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) = \lim \frac{a}{\sqrt[3]{\left(n^3 + 3 \right)^2} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{b}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $T = 2a + 3b$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 12*

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-n\right)+\lim\left(n-\sqrt{n^2+2}\right)$$

$$=\lim\frac{n^3+3-n^3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}+\lim\frac{n^2-n^2-2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

Do đó, $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\to T=2a+3b=12$.

» Câu 83. Giới hạn dãy số $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$ có dạng $\lim\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2+b^2+c^2$

Lời giải

✓ *Trả lời: 6*

$$\lim u_n=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)-\left(n^2+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=6.\\c=1\end{cases}$$

» Câu 84. Biết giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}-b\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*

$$\lim\frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim\frac{2n^2-n^3+n^3}{n^2+n-n^2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt[3]{\left(2n^2-n^3\right)^2}+n^2-n\sqrt[3]{2n^2-n^3}}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)}}{\sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+n^2-n\cdot\sqrt[3]{n^3\left(\frac{2}{n}-1\right)}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\rightarrow S=3$$

» Câu 85. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,7***

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}$ trong đó u_1,q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội $q=-\frac{1}{2}$.

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

------------------------------------- Hết -------------------------------------

Chương 03

Bài 2.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

A Lý thuyết

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa:

- Cho khoảng K chứa x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc $K\backslash\{x_0\}$.
- Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\backslash\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0;\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (với c là hằng số).

Định lý về giới hạn hữu hạn:

⁂ Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, khi đó:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L+M$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L-M$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

⁂ Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}=\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x\neq x_0$)

2. Giới hạn một bên

Định nghĩa:

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

Số thực L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$, hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.

Số thực L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$, hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Định lý

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

Chú ý

Nguyên lí kẹp:

Cho ba hàm số $f(x),g(x),h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0.

Nếu $g(x)\le f(x)\le h(x)$ $\forall x\in K$ và $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=L$ thì $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

3. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa:

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có *giới hạn là số thực* L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có *giới hạn là số thực* L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

Lưu ý

(1) Với c,k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$.

(2) Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x\to x_0$ vẫn còn đúng khi $x\to\pm\infty$.

4. Giới hạn vô cực của hàm số

» Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về *giới hạn hữu hạn*.

» Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y=f(x)$ khi x dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: *Giới hạn vô cực*

⁂ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a, x_n\to+\infty$, ta có $(f(x_n))\to-\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(-f(x))=-\infty$.

Tính chất

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn.

5. Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x):

» Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương f(x)/g(x):

» Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

» Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giới hạn của hàm số tại 1 điểm

Phương pháp

⁂ Tử & mẫu là ĐA THỨC:

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các ***đa thức*** và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
- Giả sử $f(x)=(x-x_0).f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0).g_1(x)$
- Khi đó: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

✓ ***Nhận xét:***

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.
- Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

⁂ Tử & mẫu là CĂN THỨC:

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các ***căn thức*** và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

✓ ***Nhận xét:***

- Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.

✓ ***Chú ý:*** Các hằng đẳng thức:

(1) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

(2) $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

(3) $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

Ví dụ 1.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-2)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{-4-2}{-4}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2-x)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2.2-1}{2+3}=\dfrac{3}{5}$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x+x^2}{1-x}=\dfrac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 1.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$

$$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{6}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2x-1}=\dfrac{5}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$

$$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(2x+1)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+1}{x+5}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(-x^2-2x-3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+1}{-x^2-2x-3}=-\frac{15}{11}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-3x-7}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(4x-7)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{4x-7}{x^2-x+1}=-\frac{11}{3}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2}$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+3)^2}{-x^2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)^2}{-x^2}=0.$$

Ví dụ 1.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sqrt{9+x}-3}=\lim_{x\to0}\frac{4x\left(\sqrt{9+x}+3\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left[4\left(\sqrt{9+x}+3\right)\right]=24.$$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=-\frac{4}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{1+x^2}+1}=4.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\frac{1}{4}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3+x-1}{x^3-4x^2+3}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3}+x-1}{(x-1)\left(x^2-3x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x+7}+3}+1}{x^2-3x-3}=-\frac{4}{15}.$$

Ví dụ 1.4.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

(4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{4x^2-\left(3x^2+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)=2(-1)-\sqrt{3(-1)^2+1}=-4$$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 5}\frac{\left[4x^2-25(x-1)\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left(9-(x+4)\right)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(4x^2-25x+25\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(4x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-4x)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{2x+5\sqrt{x-1}}=\frac{(5-4.5)\left(3+\sqrt{5+4}\right)}{2.5+5\sqrt{5-1}}=-\frac{9}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(12x+1)}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-12x}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}}=\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12\cdot 0+1}+\sqrt[2]{(12\cdot 0+1)^2}}=-1$$

(4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\left[2x+9-(x+5)^2\right]\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(x+5+x+3)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\left(-x^2-8x-16\right)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(2x+8)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{-(x+4)^2\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2(x+4)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{-(x+4)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}=0$$

Dạng 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Phương pháp

Dạng 1: $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là các đa thức hoặc các hàm số.

- Gọi $p=\deg P(x), q=\deg Q(x)$ và $m=\min(p,q)$.

  Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

- Khi đó:

  » Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn.

  » Nếu $p>q$ thì không tồn tại giới hạn.

Deg = bậc của đa thức

Dạng 2: Giới hạn $\infty-\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Các công thức liên hợp thường gặp:

- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.B+\left(B\right)^2}$

Ví dụ 2.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

(2) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

(3) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

(4) $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Lời giải

(1) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}=\dfrac{0}{1}=0$.

(2) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\dfrac{0}{2}=0$.

(3) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.2.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}{8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{x\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\dfrac{3}{2}$. Suy ra $D=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{2}{3}.$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{50}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}.$

Ví dụ 2.3.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3x)-(x^2+4x)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+|x|\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}.$

» **Giải nhanh:** $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}\sim\dfrac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

$x\to+\infty\longrightarrow\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1-2x-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{4-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}\right]} = 0.$$

» **Giải nhanh:** $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{3\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \to 0.$$

Ví dụ 2.4.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to0}(x-1) = 0-1 = -1.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[x^2+5x+4-\left(x^2+5x-2\right)\right]}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[x^2+5x+4-x^2-5x+2\right]}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)} = 3.$$

Dạng 3. Giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp

» Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=\begin{cases}+\infty & \Leftrightarrow\ L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)>0\\ -\infty & \Leftrightarrow\ L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)<0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)>0\\ -\infty & \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)<0\end{cases}$

» $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$ (2) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ (4) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$

Do $x\to -4^+\Rightarrow x>-4\Rightarrow x+4>0$ nên $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x\left(x^2-16\right)}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4^+} x(x+4)=32$

(2) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

Do $x\to -4^-\Rightarrow x<-4\Rightarrow x+4<0$ nên $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{-x-4}}=+\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Do $x\to 2^-\Rightarrow x<2\Rightarrow x-2<0\Rightarrow 2-x>0$

Nên $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Do $x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow x-1<0$

Nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 3.1.

Tính các giới hạn sau:

(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

Lời giải

(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\ \&\ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0\ \&\ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là

Do $x\to 1^+\Rightarrow x>1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$

Do $x\to 1^-\Rightarrow x<1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \& \ 1-x>0\ (\forall x<1) \end{cases}.$$

Ví dụ 3.4.

Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

(1) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x\le 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{khi } x>3 \end{cases}$ khi $x\to 3$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ khi $x\to 1$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0 \\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{khi } x\ge 0 \end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x\le 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{khi } x>3 \end{cases}$ khi $x\to 3$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}=+\infty$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ khi $x\to 1$

Ta có

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{4(x-1)(3x-2)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)}{4(3x-2)} = -\frac{1}{4} \ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0 \\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{khi } x\ge 0 \end{cases}$ khi $x\to 0$

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(5+\frac{4-x}{x+1}\right) = 9 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Chương 03

Bài 2.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}$

A. $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\frac{3-3}{3+3}=0$.

» Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{x+1}=\frac{1^2-2.1+3}{1+1}=1$.

» Câu 3. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$ **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}=\frac{1^3-2.1^2+2020}{2.1-1}=2019$.

» Câu 4. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Với $x=-2$; $x^2+x+4\neq 0$

Nên $A=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+x+4}=\frac{(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+4}=-\frac{1}{6}$.

» Câu 5. Cho $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]=9$.

» **Câu 6.** Biểu thức $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ nên $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

» **Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ do $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ và $x>0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

» **Câu 8.** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-3$ (loại).

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(-3x+4)=-2$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$; $x-2>0,\forall x>2$ nên $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-\infty$

» **Câu 9.** Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+2x+3\right)$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x-1}{4-x}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-1)=7>0$, $\lim\limits_{x\to 4^-}(4-x)=0$ và $4-x>0$ với mọi $x<4$

Do đó $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}=+\infty$.

» **Câu 10.** $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{4}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$.

» **Câu 11.** $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=x+1; g(x)=x-1$. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2; \lim\limits_{x\to1^+}g(x)=0; g(x)>0 khi x\to1^+$

Vậy $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$.

» **Câu 12.** Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-2x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(1-2x)=-1$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ và $x-1>0, \forall x>1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-2x}{x-1}=-\infty$.

» **Câu 13.** Tính giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}(3x-7)=-1<0\\ \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0\\ x\to2^+\Rightarrow x-2>0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-7}{x-2}=-\infty.$$

» **Câu 14.** Biết $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: + $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=4>0$.

+ $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^4=0$ và với $\forall x\neq-1$ thì $(x+1)^4>0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}=+\infty$.

» **Câu 15.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+1)$

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$.

» Câu 16. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x+1}{x}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0+0=0$.

» Câu 17. Tính $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\frac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-12x+35}{25-5x}=\lim\limits_{x\to5}\frac{(x-7)(x-5)}{-5(x-5)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-7}{-5}=\frac{2}{5}$.

» Câu 18. Tính $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

» Câu 19. Tính $L=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+4)=5$.

» Câu 20. Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}, x<-2\\ x+1, x\geq-2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2. Tính $3a-b$?

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 nên $x=-2$ là nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$, do đó ta $4-2a+b=0$.

Ta viết lại hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2+a}{x-2}, x<-2\\ x+1, x\geq -2\end{cases}$

Mặt khác hàm số tồn tại giới hạn

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(2) \Leftrightarrow \frac{-2-2+a}{-2-2}=-1 \Leftrightarrow a=8 \Rightarrow b=12$$

Do đó $3a-b=12$.

» Câu 21. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}+x\right)$

$$=\lim_{x\to -\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{1}{x}}+x\right)=\lim_{x\to -\infty}\left[x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x}}+1\right)\right].$$

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} x=-\infty$ và $=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+1\right)=1-\sqrt{2}<0$ nên $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=+\infty$.

» Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{x}\right)^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}+2\right)^7}=2^3=8.$$

» Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=-4$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-8$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn B

$$-4=\lim_{x\to -\infty}\frac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{m-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{m}{2}\Rightarrow m=-8$$

» Câu 24. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2$. Khi đó

A. $-1\leq a\leq 2$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\geq 5$. **D.** $2<a<5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{2-\dfrac{7}{x}}=2\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{2}=2\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{2}=3$.

$\Leftrightarrow a+1=6\Leftrightarrow a=5$

» Câu 25. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$.Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+\text{ax}+b\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(a+1)x^2+(a+b+3)x+b+1}{x+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(a+1)x+(a+b+3)+\dfrac{b+1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\a+b+3=1\\b+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow T=a+b=-2$.

» Câu 26. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=7\end{cases}$

Vậy $a+b=6$

» Câu 27. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=-1$.

» Câu 28. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\frac{1}{2}$. **D.** $a=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\frac{2017}{x}}{2+\frac{2018}{x}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

» Câu 29. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left((2-a)x-3\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=+\infty\Rightarrow-(2-a)\ge0\Leftrightarrow a\ge2$.

Với $a\ge2\Rightarrow a(a-2)\ge0$ suy ra $P=a(a-2)+4\ge4$.

» Câu 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3x+2}$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{1}{3}.$$

» Câu 31. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

Do đó $a=1;\ b=4$ suy ra $S=1^2+4^2=17$.

» Câu 32. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}$ bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của a^2-b^2.

A. 4037. **B.** 4035. **C.** -4035. **D.** 4033.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}-1+x-1}{x^{2017}-1+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2017}+x^{2016}...+x+1\right)+x-1}{(x-1)\left(x^{2016}+x^{2015}+...+x+1\right)+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2017}+x^{2016}...+x+2}{x^{2016}+x^{2015}+...+x+2}$

$=\dfrac{1+1+....+1+2}{1+1+...+1+2}=\dfrac{2019}{2018}$

Vậy $a^2-b^2=4037$.

» Câu 33. $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x-10}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

» Câu 34. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=a+b$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\Rightarrow S=5$.

» Câu 35. Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8.\ (b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

A. $P=-13.$ **B.** $P=-11.$ **C.** $P=5.$ **D.** $P=-12.$

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$ là hữu hạn nên tam thức x^2+bx+c có nghiệm $x=3$

$\Leftrightarrow 3b+c+9=0\Leftrightarrow c=-9-3b$

Khi đó

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx-9-3b}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3+b)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}(x+3+b)=8\Leftrightarrow 6+b=8\Leftrightarrow b=2\Rightarrow c=-15$

Vậy $P=b+c=-13$.

» Câu 36. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2+1}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Chọn A

$L=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(3x+5)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{3x+5}=-\frac{3}{2}$.

» Câu 37. Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3,b=0$. **B.** $a=3,b=0$.
C. $a=0,b=-9$. **D.** không tồn tại cặp (a,b).

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Để $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $x^2+ax+b=(x-3)(x-m)$.

Khi đó $3-m=3\Leftrightarrow m=0$. Vậy $x^2+ax+b=(x-3)x=x^2-3x$.

Suy ra $a=-3$ và $b=0$.

Cách 2:

Ta có $\frac{x^2+ax+b}{x-3}=x+a+3+\frac{3a+b+9}{x-3}$.

Vậy để có $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $\begin{cases}3a+b+9=0\\a+6=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=0\end{cases}$.

» Câu 38. Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

A. 18. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$ hữu hạn nên $x=1$ phải là nghiệm của phương trình $ax^2+bx-5=0$ suy ra $a+b-5=0\Rightarrow b=5-a$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+(5-a)x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+5)}{x-1}=a+5=7\Rightarrow a=2$ nên $b=3$

Suy ra: $a^2+b^2+a+b=18$.

» Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

A. $\frac{83}{49}$. **B.** $\frac{105}{49}$. **C.** $\frac{15}{49}$. **D.** $\frac{83}{98}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x+\cos 3x-\cos 3x\cos 5x+\cos 3x\cos 5x-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x(1-\cos 5x)}{\sin^2 7x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cos 5x(1-\cos 7x)}{\sin^2 7x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{\sin^2 7x}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin^2 7x}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{\sin^2 7x}$$

$$=\frac{2\left(\frac{9}{4}+\frac{25}{4}+\frac{49}{4}\right)}{49}=\frac{83}{98}.$$

» Câu 40. Cho biết $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\frac{45}{16}$ **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{(x-1)^2(x+2)}=L$, với $L\in\mathbb{R}$ (*)

Khi đó $\sqrt{a+1}-b-2=0\Leftrightarrow\sqrt{a+1}=b+2\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge-2\\a+1=b^2+4b+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge-2\\a=b^2+4b+3\end{cases}$

Thay $a=b^2+4b+3$ vào (*):

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}-bx-2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(b^2+4b+3)x^2+1-(bx+2)^2}{(x-1)^2(x+2)\left[\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}+bx+2\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(4b+3)x^2-4bx-3}{(x-1)^2(x+2)\left[\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}+bx+2\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(4b+3)x+3}{(x-1)(x+2)\left[\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}+bx+2\right]}=L,\ L\in\mathbb{R}.$$

Khi đó: $(4b+3)+3=0\Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a^2+b^2=\frac{45}{16}$

» Câu 41. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $T=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$

A. $T=\frac{12}{25}$. **B.** $T=\frac{4}{25}$. **C.** $T=\frac{4}{15}$. **D.** $T=\frac{6}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Chọn $f(x)=10x$, ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-20}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{10x-20}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{10(x-2)}{x-2}=10$.

Lúc đó $T=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{(x-2)(x+3)}$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{60x+5-5^3}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{60(x-2)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{60}{(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}=\frac{4}{25}$$

Cách 2:

Theo giả thiết có $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-20\right)=0$ hay $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=20\ (*)$

Khi đó $T=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6f(x)+5-125}{(x^2+x-6)\left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)^2+5\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)+25\right]}$

$$T=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6\left[f(x)-20\right]}{(x-2)(x+3)\left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)^2+5\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)+25\right]}$$

$T=\frac{10.6}{5.75}=\frac{4}{25}$.

» Câu 42. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{2}$, $(a;b\in\mathbb{Z},\frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a=3$; $b=4\Rightarrow a+b=7$.

» Câu 43. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-ax\right)-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(4-a^2\right)x^2-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4-a^2=0\\ a>0\\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

Vậy $a-4b=5$.

» Câu 44. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right) \Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)$

$$\Leftrightarrow I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right) \Leftrightarrow I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}+1\right) \Leftrightarrow I=\frac{3}{2}.$$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 45. Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=5$ khi $a=-10$		
(b)	$L>0$ khi $a>0$		
(c)	$L<0$ khi $a>0$		
(d)	$L=-1$ thì a là một nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$		

Lời giải

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(a+\dfrac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}=-\frac{a}{2}.$$

(a) $L=5$ *khi* $a=-10$

Khi đó $L=5 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{2}=5 \Leftrightarrow a=-10$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $L>0$ *khi* $a>0$

Khi đó $L>0 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{2}>0 \Leftrightarrow a<0$.

» **Chọn** SAI.

(c) $L<0$ *khi* $a>0$

Khi đó $L<0 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{2}<0 \Leftrightarrow a>0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $L=-1$ *thì* a *là một nghiệm của phương trình* $x^2-3x+2=0$

Khi đó $L=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{2}=-1 \Leftrightarrow a=2$.

$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 46. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$a>0$		
(b)	$b>0$		
(c)	$a>b$		
(d)	$P=4a+b=2$		

Lời giải

(a) $a>0$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2023}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2024}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2023}{x}}{1+\dfrac{2024}{x}}=-a$.

Nên $-a=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(b) $b>0$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+bx+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+bx+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx+1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(b+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{b}{2}$.

Nên $\dfrac{b}{2}=2 \Leftrightarrow b=4$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $a>b$

Có $a=-\dfrac{1}{2}$ và $b=4$.

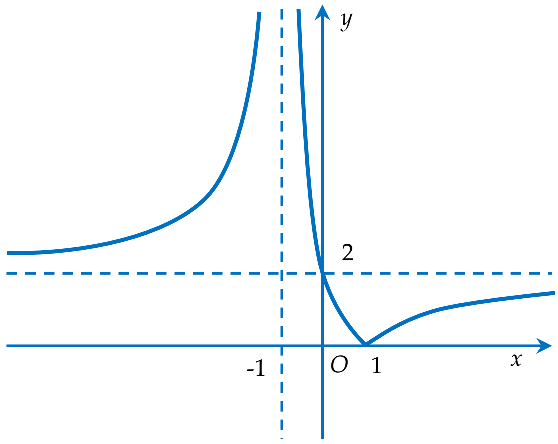
» **Chọn** SAI.

(d) $P=4a+b=2$.

Vậy $P=4\left(-\frac{1}{2}\right)+4=2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 47.** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$		
(b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
(c)	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$		
(d)	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$		

Lời giải

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Mệnh đề $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ đúng.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ sai

» **Chọn** SAI.

(c) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$

Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=2$ sai.

» **Chọn** SAI.

(d) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=+\infty$ đúng

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 48.** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	a là số lẻ		
(b)	$b>0$		

(c)	$a.b<0$		
(d)	$a-4b=5$		

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-ax\right)-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(4-a^2\right)x^2-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4-a^2=0\\ a>0\\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

(a) a là số lẻ

» **Chọn** SAI.

(b) $b>0$

» **Chọn** SAI.

(c) $a.b<0$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $a-4b=5$

Vậy $a-4b=5$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 49.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a=9$		
(b)	$b=3c$		
(c)	$a=3c$		
(d)	$P=a+b+5c=14$		

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\left(a-c^2\right)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}=-2$.

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a-c^2=0 \quad (a,\ c>0)\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}$. (Vì nếu $c\le 0$ thì $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=+\infty$).

Mặt khác, ta cũng có $c^2+a=18$.

Do đó, $\begin{cases}a=c^2=9\\ b=-2\left(\sqrt{a}+c\right)\end{cases} \Leftrightarrow a=9$, $b=-12$, $c=3$. Vậy $P=a+b+5c=12$.

(a) $a=9$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $b=3c$

» **Chọn** SAI.

(c) $a = 3c$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $P = a + b + 5c = 14$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 50. Cho a, 3, c là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x} + ax}{bx - 1}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L = 3\ khi\ \dfrac{a-1}{b} = 3$		
(b)	$L = 6\ khi\ \dfrac{a-1}{b} = 4$		
(c)	$L = 2\ khi\ a + 2b = 1$		
(d)	$L = 1\ khi\ a + b = 1$		

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 3x - (ax)^2}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x} - ax\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left[\left(1-a^2\right)x - 3\right]}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x} - ax\right)}$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(1-a^2\right) - \dfrac{3}{x}}{\left(b - \dfrac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}} - a\right)} = \dfrac{\left(1-a^2\right)}{b(-1-a)} = \dfrac{a-1}{b}.$$

(a) $L = 3\ khi\ \dfrac{a-1}{b} = 3$

Ta có $L = \dfrac{a-1}{b}$.

Khi đó $L = 3$ thì $\dfrac{a-1}{b} = 3$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $L = 6\ khi\ \dfrac{a-1}{b} = 4$

» **Chọn** SAI.

(c) $L = 2\ khi\ a + 2b = 1$

Khi $L = 2$ thì $\dfrac{a-1}{b} = 2 \Leftrightarrow a - 1 = 2b \Leftrightarrow a - 2b = 1$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $L = 1\ khi\ a + b = 1$

Khi $L = 1$ thì $\dfrac{a-1}{b} = 1 \Leftrightarrow a - 1 = b \Leftrightarrow a - b = 1$

» **Chọn** ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 51. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-a.x}{b.x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2$

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^3-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}$

Xét $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x}$.

Xét $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}=0$, do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}\right)=+\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow P=2$.

» Câu 52. Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 \text{ khi } t<0\\1 \text{ khi } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)+\lim\limits_{t\to0^+}H(t)$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 1*

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n<0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=0$.

Khi đó: $\lim\limits_{t\to0^-}H(x)=\lim H(t_n)=0$.

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n>0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=1$.

Khi đó: $\lim\limits_{t\to0^+}H(t)=\lim H(t_n)=1$.

» Câu 53. Một cái hồ chứa $600l$ nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối $30\,g/l$ vào hồ với tốc độ $15l$/phút. Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30.15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}(g/l)$. Khi đó nồng độ muối trong hồ sẽ bằng bao nhiêu (g/l) khi t dần về dương vô cùng?

Lời giải

✓ *Trả lời: 30*

Nồng độ muối của nước là: $C(t)=\dfrac{30.15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}(g/l)$.

Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{40+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{t\left(\frac{40}{t}+1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{\frac{40}{t}+1}=30\left(g/l\right)$$

» Câu 54. Biết rằng giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{\sqrt{x+9}+b}+\frac{c}{\sqrt{x+16}+d}\right]$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Lời giải

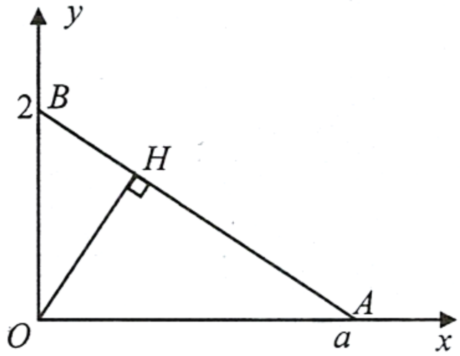
✓ ***Trả lời: 9***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x+16-16}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]$$

Vậy tổng các số $a;b;c;d$ là 9

» Câu 55. Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy. Giả sử hoành độ điểm A là $a>0$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB được tính theo công thức $\frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?



Lời giải

✓ ***Trả lời: 2***

Đặt $h(a)=OH=\frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$.

Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo tia Ox thì $a\to+\infty$.

Ta có: $\lim_{a\to+\infty} h(a)=\lim_{a\to+\infty}\frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{2a}{a\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}}=\frac{2}{\sqrt{1}}=2$.

Vậy khi điểm A dần về vô cực thì độ dài OH dần về 2

» Câu 56. Biết rằng giới hạn $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{a}{b.\sqrt{5x-1}+3}-\frac{c}{4+d.\sqrt{9x-2}}\right)$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 16***

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3+4-\sqrt{9x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}+\frac{4-\sqrt{9x-2}}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5x-1-9}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}+\frac{16-9x+2}{(x-2)\left(4+\sqrt{9x-2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}+\frac{9(2-x)}{(x-2)\left(4+\sqrt{9x-2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3}-\frac{9}{4+\sqrt{9x-2}}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=1\\c=9\\d=1\end{cases}\Rightarrow S=16$$

» Câu 57. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2}+a\right)^5\cdot\left(b-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-c\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính tích các số $a;b;c;d$

Lời giải

✓ *Trả lời:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{10}\left(\dfrac{3}{x^2}+2\right)^5\cdot x^6\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{x^6\left(\dfrac{5}{x^3}-1\right)^2\cdot x^6\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)^3}=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{x^2}+2\right)^5\cdot\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-1\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)^3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=1\\d=2\end{cases}\Rightarrow P=12$$

» Câu 58. Biến đổi giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^a\cdot\dfrac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$ với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

Lời giải

✓ *Trả lời: 7*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{16}\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4\cdot x^2\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^{10}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5\cdot x\left(\frac{6}{x}-4\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\frac{\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{x}-4\right)}$$

Khi đó $a=7$

» Câu 59. Cho $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\frac{2}{x^2}\right)^b}{\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^a\cdot\left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính $S=a-b$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{12}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot x^4\left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{x^4\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2\cdot x^{15}\left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3}$$

Khi đó $a=b=2\Rightarrow S=0$

» Câu 60. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x=1$

Lời giải

✓ ***Trả lời: -0,5***

$$\lim_{x\to1^+}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{-x}{2}=-\frac{1}{2}$$

Nhận thấy $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=-\frac{1}{2}$. Do đó $\lim_{x\to1}f(x)=-\frac{1}{2}$.

------------------------------- Hết -------------------------------

Chương 03

Bài 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. Lý thuyết

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$.

  Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

  Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

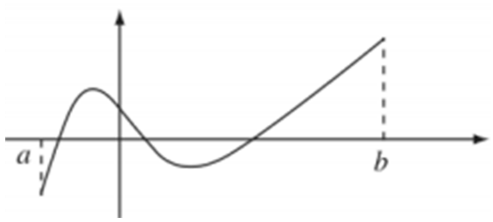
Định nghĩa:

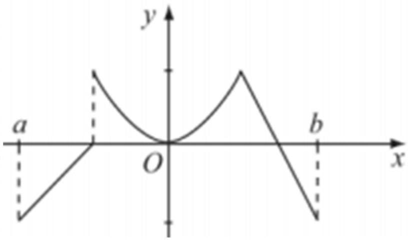
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Chú ý

(1) Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b];[a;b);(-\infty;b];[a;+\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự.

(2) Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền" trên khoảng đó.





3. Một số định lí

Định lí 1.

» Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

» Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.

Định lí 2.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0.

Khi đó:

» Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0.

» Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 3.

» Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

⁂ **Lưu ý:**

Định lí này thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Có thể phát biểu Định lí 3 dưới một dạng khác như sau:

» Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a;b)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm

Phương pháp

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in D$, ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Tính $f(x_0)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

  Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

  Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

Ví dụ 1.1.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=1=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x>0 \\ x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_o=0$.

Lời giải

Ta có $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$.

Ta có $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_o=0$.

Ví dụ 1.3.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ tại $x=1$

Lời giải

Ta có $f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Ví dụ 1.4.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{khi } x\ne 1\\ -2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x+1}=-2=f(1)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 1.5.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x\ne 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

Ta có: $f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-(2x-3)}{(2-x)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(2-x)}{(2-x)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}}=1=f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$.

Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục – gián đoạn tại 1 điểm

Phương pháp

- **Bước 1.** Tính $f\left(x_o\right)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right);\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

» *Hàm số* $f\left(x\right)$ ***liên tục*** *tại điểm* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$

» *Hàm số* $f\left(x\right)$ ***gián đoạn*** *tại điểm* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

Ví dụ 2.1.

Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+2x-m & \text{khi } x\neq 2 \\ x+m & \text{khi } x=2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-m\right)=8-m$

Và $f\left(2\right)=2+m$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2 \Leftrightarrow 8-m=m+2 \Leftrightarrow m=3$

Ví dụ 2.2.

Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1 \\ m^2+5m & \text{khi } x=-1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-1$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-3\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(x-3\right)=-4$

Và $f\left(-1\right)=m^2+5m$

Để hàm số liên tục tại $x_0=-1 \Leftrightarrow m^2+5m=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$

Ví dụ 2.3.

Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ m^2+5m & \text{khi } x\leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x_0=1$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \dfrac{1}{3}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2m+3$

Để hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m+3 \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq \dfrac{-4}{3}$

Ví dụ 2.4.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & ,\text{khi } x>1 \\ x^2+3 & ,\text{khi } x<1 \\ k^2 & ,\text{khi } x=1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = k^2$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+3\right) = 4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2 = 4$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow k^2 \neq 4 \Leftrightarrow k \neq \pm 2$.

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ 3m & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} \neq 3m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} \neq 3m \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x+2) \neq 3m \Leftrightarrow 3 \neq 3m \Leftrightarrow m \neq 1$.

Ví dụ 2.6.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ 14a.x & \text{khi } x\geq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = 14a$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 14ax = 14a.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x^6 - (8-4x)}{(x-1)\left(2x^3 + \sqrt{8-4x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\left(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8\right)}{(x-1)\left(2x^3 + \sqrt{8-4x}\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8}{2x^3 + \sqrt{8-4x}} = 7.$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2.7.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x + a}$

Nếu $a = -3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{3} = 1 > 0$ và $f(1) = 0$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Nếu $a \neq -3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x + a} = 0,$ nhưng $f(1) = 3 + a \neq 0$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2.8.

Tìm m đề hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x + 2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải

Ta có: $f(0) = m + \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right) + \left(1 - \sqrt[3]{1+x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x}$$

» $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 + x - 1}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \dfrac{1}{2}$

» $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}=\dfrac{-1}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\dfrac{1}{2}.$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}.$

Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ***ít nhất một nghiệm*** trên D.

  Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

  » Liên tục trên D và

  » Có hai số sao cho $f(a).f(b)<0$.

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ***k nghiệm*** trên D.

  Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

  » Liên tục trên D và

  » Tồn tại k khoảng dời nhau $(a_i;a_{i+1})(i=1,2,...,k)$ nằm trong D: $f(a_i).f(a_{i+1})<0$

Ví dụ 3.1.

Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$

Lời giải

Đặt $f(x)=2x^4-2x^3-3$.

Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$.

Ta có: $f(0)=-3; f(-1)=1 \Rightarrow f(-1)f(0)<0$

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng phương trình $6x^3+2x^2-31x+10=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x)=6x^3+3x^2-31x+10$.

TXĐ: $D=\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$.

$\begin{cases} f(-3)=-32 \\ f(0)=10 \end{cases} \Rightarrow f(-3).f(0)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.

$\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=-12 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.

$\begin{cases} f(1)=-12 \\ f(2)=8 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc$(1;2)$.

Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên $f(x)=0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3.3.

Chứng minh rằng phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x-1+\sin x$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow f(0).f(-1)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

Ví dụ 3.4.

Chứng minh rằng phương trình $x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn $[0;1]$

$f(0)=-1<0, f(1)=4>0,$

Vậy trên khoảng $(0;1)$ phương trình có ít nhất nghiệm.

Ví dụ 3.5.

Chứng minh rằng phương trình $x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

$$x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0 \Leftrightarrow mx+(x-2)(x+3)(x^3+x+1)=0\ (*)$$

Đặt $f(x)=mx+(x-2)(x+3)(x^3+x+1)$.

Nhận xét f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} f(-3).f(0)=18m \\ f(0).f(2)=-12m \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $m=0$, phương trình luôn có 1 nghiệm $x=2$

Trường hợp 2: Nếu $m\neq 0 \Rightarrow (*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-3;0)$ hoặc $(0;2)$

Suy ra: $\forall m\in R$, luôn có ít nhất một nghiệm thuộc D.

Vậy $\forall m\in R$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

Ví dụ 3.6.

Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x\cos x$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Ví dụ 3.7.

Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x + b\sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b

Lời giải

Đặt $f(x) = a\cos 2x + b\sin x + \cos x$ có tập xác định là $R \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

$f(0) = a+1; f(\pi) = a-1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a+b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a-b$.

Vì $f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên trong bốn số phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b.

Ví dụ 3.8.

Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x$ liên tục trên R

Nên cũng liên tục trên các đoạn $\left[0;2\pi\right]$

$f(0) = a+b+c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b+1, f(\pi) = -a+b-c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -b-1$

Suy ra $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chương 03

Bài 3.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.
B. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.
C. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.
D. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Chọn: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

» Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$
.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a;b)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(a)f(b)>0$ nên $f(a)$ và $f(b)$ cùng dương hoặc cùng âm.

Mà $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$

Nên đồ thị hàm $f(x)$ nằm trên hoặc nằm dưới trục hoành trên $[a;b]$

Hay phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

» Câu 3. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, & \text{khi } x<1\\ 1, & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

A. y liên tục phải tại $x=1$.
B. y liên tục tại $x=1$.
C. y liên tục trái tại $x=1$.
D. y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y(1)=1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x+x^2)=4$

Nhận thấy: $\lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)$. Suy ra y liên tục phải tại $x=1$.

» Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$.
B. Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
C. $f(4)=2$.
D. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$$

$f(2)=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

» Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.
B. Hàm số liên tục tại $x=0$.
C. Hàm số liên tục tại $x=1$.
D. Hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tại $x=\dfrac{1}{2}$, ta có: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{x^3-1}=0=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

» Câu 6. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$:

A. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.
B. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.
C. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$.
D. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C

A) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

B) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

C) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x}=3=f(1)$ suy ra $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

D) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

» Câu 7. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=(x+1)(x^2+2)$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0=-1$ nên gián đoạn tại $x_0=-1$.

» Câu 8. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=2$?

A. $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$ **D.** $y=\tan x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, do đó gián đoạn tại $x=2$.

» Câu 9. Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

* Ta có hai hàm số $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ và $f_4(x)=\log_3 x$ có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$ nên không thỏa yêu cầu.

* Cả hai hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$ và $f_3(x)=\cos x+3$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$.

» Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$. **B.** $f(\sqrt{2})<0$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x=0$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(0)=1$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

Vì $f(0)\neq\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. Do đó $f(x)$không có đạo hàm tại $x=0$

.

$\forall x\neq 0$ $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\geq 0$nên $f\left(\sqrt{2}\right)>0$.VậyA, B,C sai.

» **Câu 11.** Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x=-2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to -2} m=m \Leftrightarrow m=-4$

» **Câu 12.** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} \text{ khi } x\neq 1\\ 2m+1 \text{ khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ là:

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(1)=2m+1$

$\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$thì $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} y\Rightarrow 2m+1=3\Leftrightarrow m=1$.

» **Câu 13.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ a & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $a=0$. **B.** $a=-\frac{1}{2}$. **C.** $a=\frac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

» Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=?$

A. -1. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

$f(3)=m$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left(-\sqrt{x+1}-2\right)=-4$$

Để hàm số liên tục tại $x=3$ thì $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

Suy ra, $m=-4$.

» Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & khi\ x\neq1\\ m^2+m-1 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)=-1.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$ cần: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$$\Leftrightarrow m^2+m-1=-1\Leftrightarrow m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\quad \text{(TM)}\\ m=-1\ \text{(L)}\end{array}\right..$$

» Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\quad x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\quad x\le2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(m^2x-4m+6\right)=2m^2-4m+6$$

$$f(2)=2m^2-4m+6$$

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m^2-4m+6=4\Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0\Leftrightarrow m=1$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

» Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}\quad f(0)=2a-\frac{5}{4}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2a-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a=\dfrac{3}{4}$.

» Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi a bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Ta có $f(2)=a,\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$. Do đó $a=1$

» Câu 19. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & khi\, x>4\\ mx+1 & khi\, x\le 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

A. $m=\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f\left(x\right)=f\left(4\right)=4m+1$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(x+4\right)=8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=4\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 4^+} f\left(x\right)=f\left(4\right)\Leftrightarrow 4m+1=8\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$.

» **Câu 20.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-m}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ n & khi\, x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì giá trị của biểu thức $(m+n)$ tương ứng bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(1)=n$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-m^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+m\right)}$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-m^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+m\right)}$ (1).

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại khi 1 là nghiệm của phương trình: $1+3-m^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$.

$+$ Khi $m=2$ thì $(1)\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}\Rightarrow n=\dfrac{1}{4}$.

$+$ Khi $m=-2$ thì $(1)\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2}$ suy ra không tồn tại n.

Vậy $m+n=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$.

» **Câu 21.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & khi\quad x\neq 3\\ mx+2 & khi\quad x=3\end{cases}$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi m bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(3)=3m+2$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\left[-\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right]=-4$.

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=3\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow 3m+2=-4\Leftrightarrow m=-2$.

» **Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x>2\\ mx-4 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+} x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(mx-4\right)=2m-4$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)\Leftrightarrow 2m-4=2\Leftrightarrow m=3$.

» Câu 23. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ mx-2m^2 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left\{1\right\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$..

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=R$.

* $f(-1)=-m-2m^2$

* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(mx-2m^2)=-m-2m^2$.

* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-2)=-3.$

Hàm số liên tục tại $x=-1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

$$\Leftrightarrow -m-2m^2=-3\Leftrightarrow 2m^2+m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Vậy các giá trị của m là $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

» Câu 24. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & khi\ x<2\\ mx+m+1 & khi\ x\ge 2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=2$.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{x\left(x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

$f\left(2\right)=3m+1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow 3m+1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

» Câu 25. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x\ne\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{2} & \text{khi } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Biết hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$. Tính $S=abc$.

A. $S=-36$. **B.** $S=18$. **C.** $S=36$. **D.** $S=-18$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{ax^2+1}\right)^2-(bx+2)^2}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}=\dfrac{\left(a-b^2\right)x^2-4bx-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}$.

Để hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\left(a-b^2\right)x^2-4bx-3=m(2x-1)^2\\ \sqrt{\dfrac{a}{4}+1}+\dfrac{b}{2}+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ b=-3\\ a=-3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{-12x^2+12x-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{-3x^2+1}-3x+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{-3}{(x+1)\left(\sqrt{-3x^2+1}-3x+2\right)}=\dfrac{-3}{\frac{3}{2}}=-2=\dfrac{c}{2}\Rightarrow c=-4$.

Vậy $S=abc=-3(-3)(-4)=-36$.

» Câu 26. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=1$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=R$.

$f(1)=a$.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=2$.

» Câu 27. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại x=2.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$.

Hàm số liên tục tại x=2 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow m=3$.

» Câu 28. Để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2(x-1)} & khi\ \ x\neq 1\\ m & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ thì giá trị m bằng

A. $0,5$. **B.** $1,5$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$f\left(1\right)=m$.

$\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{2\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(2x-1\right)}{2\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

» Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } \left(x>1\right)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } \left(x\le 1\right)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m\in\left\{0;1\right\}$. **B.** $m\in\left\{0;-1\right\}$. **C.** $m\in\left\{1\right\}$. **D.** $m\in\left\{0\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$; $f\left(1\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=m^2+m+\dfrac{1}{4}$.

Để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ thì $m^2+m+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=0\end{array}\right.$.

» Câu 30. Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$.

A. $a=-2$. **B.** $a=1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Lời giải

Chọn B

• Khi $x<1$ thì $f\left(x\right)=2x+a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

• Khi $x>1$ thì $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ nên liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

• Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=1$, ta có:

+ $f\left(1\right)=2+a$.

+ $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x+a\right)=2+a$.

+ $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^2+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2\right)=3$.

• Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow 2a+1=3\Leftrightarrow a=1$.

» Câu 31. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & khi\ x>-1\\ mx+2 & khi\ x\le -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} (x+3) = 2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} (mx+2) = -m+2$.

$f(-1) = -m+2$.

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=-1$ thì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = f(-1)$

$\Leftrightarrow 2 = -m+2 \Leftrightarrow m=0$.

» Câu 32. Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2+x+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Chọn B

+ Với $x > 2$, ta có $f(x) = -x^2+x+3$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

+ Với $x < 2$, ta có $f(x) = 5x+2$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$.

+ Tại $x=2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} (-x^2+x+3) = 1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} (5x+2) = 12$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^-} f(x) \Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to2} f(x) \Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

» Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+a-1 & khi \;\; x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi \;\; x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ với bất kỳ a.

Với $x=0$ Ta có $f(0) = a-1$;

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (3x+a-1) = a-1$;

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1$;

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a-1=1 \Leftrightarrow a=2$.

» Câu 34. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1 \\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P=\frac{5}{6}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{6}$. **D.** $P=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ $y=f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(6Px-3)=6P-3$

$f(1)=6P-3$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Leftrightarrow 6P-3=-2 \Leftrightarrow P=\dfrac{1}{6}$.

» Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi} & x>4 \\ mx+1 & \text{khi} & x\le 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=8$ hoặc $m=-\frac{7}{4}$. **B.** $m=\frac{7}{4}$.

C. $m=-\frac{7}{4}$. **D.** $m=-8$ hoặc $m=\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

*) Với $x>4$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ là hàm phân thức nên liên tục trên TXĐ của nó

$\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(4;+\infty)$.

*) Với $x<4$ thì $f(x)=mx+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-\infty;4)$.

Do vậy hàm số $f(x)$ đã liên tục trên các khoảng $(4;+\infty)$, $(-\infty;4)$.

Suy ra: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=4$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=4m+1$

$\Leftrightarrow 4m+1=8 \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$.

» Câu 36. Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } x<-5 \\ x+17 & \text{khi } -5\le x\le 10 \\ ax+b+10 & \text{khi } x>10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Với $x<-5$ ta có $f(x)=x^2+ax+b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;-5)$.

Với $-5<x<10$ ta có $f(x)=x+7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5;10)$.

Với $x>10$ ta có $f(x)=ax+b+10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10;+\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=-5$ và $x=10$.

Ta có:

$f(-5)=12$; $f(10)=17$.

$\lim\limits_{x\to-5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-5^-}\left(x^2+ax+b\right)=-5a+b+25$.

$\lim\limits_{x\to-5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-5^+}(x+17)=12$.

$\lim\limits_{x\to10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to10^-}(x+17)=27$.

$\lim\limits_{x\to10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to10^+}(ax+b+10)=10a+b+10$.

Hàm số liên tục tại $x=-5$ và $x=10$ khi

$$\begin{cases}5a+b+25=12\\10a+b+10=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5a+b=-13\\10a+b=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

» Câu 37. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

A. $2x^2-3x+4=0$. **B.** $(x-1)^5-x^7-2=0$.

C. $3x^4-4x^2+5=0$. **D.** $3x^{2017}-8x+4=0$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^{2017}-8x+4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0).f(1)=4.(-1)=-4 \Rightarrow f(0).f(1)<0$.

Vậy phương trình $3x^{2017}-8x+4=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

» Câu 38. Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-10;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=3x^5+5x^3+10$

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-2;-1]$ (1)

Ta có: $\begin{cases}f(-2)=-126\\f(-1)=2\end{cases}$

Suy ra $f(-2).f(-1)=-126.2=-252<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1)$.

» Câu 39. Cho phương trình $2x^3-8x-1=0$ (1). Khẳng định nào **sai**?

A. Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.

B. Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.
C. Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.
D. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)=2x^3-8x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-5)=-211,\ f(-1)=5>0,\ f(2)=-1<0,\ f(3)=29>0$

Nên phương trình có ít nhất 3 nghiệm trên $(-5;-1),(-1;2),(2;3)$.

Mà phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm

Nên phương trình có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

» Câu 40. Cho số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Khi đó $\begin{cases}f(2)=8+4a+2b+c<0\\f(-2)=-8+4a-2b+c>0\end{cases}$

$f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\begin{cases}f(2)<0\\f(-2)>0\end{cases}\Rightarrow f(-2).f(2)<0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-2;2)$.

$\begin{cases}f(2)<0\\\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2;+\infty)$.

$\begin{cases}f(-2)>0\\\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty;-2)$.

Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}\ \text{khi } x\le 1\\\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\ \text{khi } x>1\end{cases}$ và $g(x)=x^2-3x+1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		

(b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		
(c)	Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$		
(d)	Hàm số $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		

Lời giải

(a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

Nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $g(1)=-1$ và $\lim\limits_{x\to1} g(x)=1^2-3\cdot1+1=-1$ nên $g(1)=\lim\limits_{x\to1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(d) Hàm số $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 42.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x>-2\\ 4-x^2 & \text{khi } x\le -2\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\ne -2\\ 2x+a & \text{khi } x=-2\end{cases}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\dfrac{5}{26}$		
(b)	Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$		
(c)	Để hàm số $g\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0=-2$ thì $a=1$		
(d)	Khi $a=-1$ thì hàm số $y=f\left(x\right).g\left(x\right)$ gián đoạn tại điểm $x_0=-2$		

Lời giải

(a) Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+} f\left(x\right)=\dfrac{5}{26}$

Ta có: $f\left(x_0\right)=f(-2)=0=\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} = \frac{5}{26} \neq \lim_{x\to -2^-} f(x).$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$*

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.

» **Chọn** SAI.

(c) *Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$*

Ta có: $g(x_0) = g(-2) = -4 + a$.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} = -5.$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = g(-2)$.

$\Rightarrow -4 + a = -5 \Leftrightarrow a = -1$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x).g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$*

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 43.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & khi\ x > 2 \\ x^2 + ax + 3b & khi\ x < 2 \\ 2a + b - 6 & khi\ x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a > 0$		
(b)	$b > 0$		
(c)	$a > b$		
(d)	$I = a + b = \dfrac{19}{32}$		

Lời giải

(a) $a > 0$

Để hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{(x+2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \dfrac{3}{16}$.

$$\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+3b\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+3b\right) = 2a+3b+4$$

$f(2) = 2a + b - 6$

Suy ra ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 2a+b-6 = \dfrac{3}{16} \\ 2a+3b+4 = \dfrac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $b > 0$

» **Chọn** SAI.

(c) $a > b$

$$\begin{cases} a = \dfrac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a > b.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $I = a + b = \dfrac{19}{32}$

$$\Rightarrow a + b = \frac{19}{32}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $a = 3$ thì $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{11}{2}$		
(b)	$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$		
(c)	Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $a = -\dfrac{1}{2}$		
(d)	Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, thì bất phương trình $-x^2 + ax + \dfrac{7}{4} > 0$ có 1 nghiệm nguyên		

Lời giải

(a) *Khi* $a = 3$ *thì* $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{11}{2}$

Với $a = 3$ thì $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(3 + \dfrac{1-x}{2+x}\right) = 3 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$.

» **Chọn** SAI.

(b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$

Tại $x_0 = 2$, ta có:

❍ $f(2) = a - \dfrac{1}{4}$

❍ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} = -\lim\limits_{x \to 2^-} (2x-3) = -1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Để hàm số liên tục tại* $x_0 = 2$ *thì* $a = -\dfrac{1}{2}$

❍ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(a+\dfrac{1-x}{2+x}\right) = a-\dfrac{1}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow a-\dfrac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{4}$.

» Chọn SAI.

(d) Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, thì bất phương trình $-x^2 + ax + \dfrac{7}{4} > 0$ có 1 nghiệm nguyên

Với $a = -\dfrac{3}{4}$, xét bất phương trình $-x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4} < x < 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1;0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

» Chọn SAI.

» Câu 45. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax-1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(1) = 2a-1$		
(b)	$a > 0$		
(c)	$b > 0$		
(d)	$a - b = 6$		

Lời giải

(a) $f(1) = 2a-1$

Ta có $f(1) = 2a-1$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $a > 0$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ thì $(x^2+ax+b) \vdots (x-1) \Rightarrow 1+a+b = 0 \Rightarrow b = -a-1$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+a+1) = a+2$.

Do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2a-1 = a+2 \Leftrightarrow a = 3$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $b > 0$

Suy ra $b = -4$.

» Chọn SAI.

(d) $a - b = 6$.

Vậy $a - b = 7$.

» Chọn SAI.

» **Câu 46.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+ax+b \text{ khi } x<-5 \\ x+17 \quad \text{khi} -5\le x\le 10 \\ ax+b+10 \text{ khi } x>10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f\left(-5\right)=12\,;f\left(10\right)=17$		
(b)	$a>0$		
(c)	$a>0$		
(d)	$a+b=2$		

Lời giải

Với $x<-5$ ta có $f\left(x\right)=x^2+ax+b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $\left(-\infty;-5\right)$.

Với $-5<x<10$ ta có $f\left(x\right)=x+7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $\left(-5;10\right)$.

Với $x>10$ ta có $f\left(x\right)=ax+b+10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $\left(10;+\infty\right)$.

(a) $f\left(-5\right)=12\,;f\left(10\right)=17$.

Ta có:

$f\left(-5\right)=12\,;f\left(10\right)=17$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $a>0$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=-5$ và $x=10$.

$\lim\limits_{x\to -5^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -5^-}\left(x^2+ax+b\right)=-5a+b+25$.

$\lim\limits_{x\to -5^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -5^+}\left(x+17\right)=12$.

$\lim\limits_{x\to 10^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 10^-}\left(x+17\right)=27$.

$\lim\limits_{x\to 10^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 10^+}\left(ax+b+10\right)=10a+b+10$.

Hàm số liên tục tại $x=-5$ và $x=10$ khi

$\begin{cases} 5a+b+25=12 \\ 10a+b+10=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a+b=-13 \\ 10a+b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $b>0$

» **Chọn** SAI.

(d) $a+b=2$

$\Rightarrow a+b=-1$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 47.** Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi} \quad x>-2 \\ mx+n & \text{khi} \quad x\le -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f\left(x\right)=-2$		
(b)	Khi $m=1$ thì $n=2$		

(c)	Khi $m=2$ thì $n=5$		
(d)	Khi $m=3$ thì $n=7$		

Lời giải

(a) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-2$

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+3)=-1$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Khi $m=1$ thì $n=2$*

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(mx+n)=-2m+n$.

$f(-2)=-2m+n$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2)\Leftrightarrow -2m+n=1\Leftrightarrow m=\dfrac{n-1}{2}$.

Vậy $m=1$ *thì* $1=\dfrac{n-1}{2}\Leftrightarrow n=3$

» **Chọn** SAI.

(c) *Khi $m=2$ thì $n=5$*

Với $m=2$ *thì* $2=\dfrac{n-1}{2}\Leftrightarrow n=5$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Khi $m=3$ thì $n=7$*

Với $m=3$ *thì* $3=\dfrac{n-1}{2}\Leftrightarrow n=7$

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 48. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x\neq\pm3\\ -\dfrac{1}{9} & \text{khi } x=\pm3\end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=-3$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=3$.		
(d)	Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		

Lời giải

(a) *Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.*

Ta có $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+6}{3x^2-27}$, vì $\lim\limits_{x\to3}(2x+6)=12\neq0$ và $\lim\limits_{x\to3}(3x^2-27)=0$

Nên hàm số không có giới hạn tại $x=3$.

Nên hàm số không liên tục tại $x=3$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=-3$.*

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)}{3(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{2}{3(x-3)} = \frac{-1}{9}.$$

Vì $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = -\frac{1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x=-3$.

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=3$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do hàm số không liên tục tại $x=3$.

Nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 49.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & khi\ x<1, x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0 \\ \sqrt{x} & khi\ x\geq 1 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm điểm thuộc $\mathbb{R}$.		
(d)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.		

Lời giải

(a) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0 = f(0)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

» **Chọn** SAI.

(b) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số liên tục tại mọi điểm điểm thuộc $\mathbb{R}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.

Tại $x=1$ ta có: $f(1)=1$.

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 1^-} x = 1 = f(1)$; $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x} = 1 = f(1)$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

» **Chọn** SAI.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m^2x & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

Ta có: $f\left(1\right)=m^2$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

» Câu 51. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***

Ta có: $f(1)=a-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax-\dfrac{1}{2}\right)=a-\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)\Leftrightarrow a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$$

» Câu 52. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 2\\ \dfrac{4mx-1}{3} & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0=2$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,5***

Ta có: $f\left(x_0\right)=f(2)=\dfrac{8m-1}{3}$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6}=1.$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0=-2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Rightarrow\dfrac{8m-1}{3}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

» Câu 53. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(x^2+2\right)=3$$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3=3+m \Leftrightarrow m=0$

» Câu 54. Tìm giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 3***

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục với $\forall x\neq 2$.

Do đó $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$ $\left(1\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(x+1\right)=2+1=3;\ \ f\left(2\right)=m$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3=m \Leftrightarrow m=3$.

» Câu 55. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3+m=f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)$

Suy ra $3+m=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2\right)=3 \Leftrightarrow m=0$.

---------------------------- Hết ----------------------------