ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ PHÁT TRIỂN CÂU 39 - 50 MỨC VD-VDC ĐỀ THAM KHẢO THI TN THPT BGD NĂM 2024

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Câu 39. **(Đề TK BGD 2024)** Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^2b\right).\log_a\dfrac{b}{a}+4=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a^2\left(a^2b\right).\log_a\dfrac{b}{a}+4=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+2\right)^2\left(\log_a b-1\right)+4=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$\left(t+2\right)^2\left(t-1\right)+4=0\Leftrightarrow\left(t^2+4t+4\right)\left(t-1\right)+4=0$

$\Leftrightarrow t^3-t^2+4t^2-4t+4t-4+4=0\Leftrightarrow t^3+3t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-3\end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b=-3\Leftrightarrow\log_b a=-\dfrac{1}{3}$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 39

Câu 1: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^2b\right)\cdot\log_a^2\dfrac{b}{a}-2=0$. Giá trị của $\left(\log_b a\right)^2$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** 3.

Câu 2: Cho a,b là hai số thực dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^2b\right).\log_a\left(\dfrac{a}{b^2}\right)=2$. Giá trị $\log_a b$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $0<a<1<b$ và $\left(\log_a^2\left(\dfrac{a}{b}\right)+2\log_a b-5\right)\left(2\log_a\left(a^2b\right)-7\right)=0$. Chọn khẳng định đúng.

A. $b^2a=1$. **B.** $a^2b=1$. **C.** $a^3=\dfrac{1}{b}$. **D.** $b^3=\dfrac{1}{a}$.

Câu 4: Cho a,b,c là các số thực dương và khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b\dfrac{c}{b}=\log_a\dfrac{c}{a^3b}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a\left(ab\right)-\log_b\left(bc\right)$. Tính giá trị biểu thức $S=2m^2+9M^2$.

A. $S=28$. **B.** $S=25$. **C.** $S=26$. **D.** $S=27$.

Câu 5: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_{\sqrt{a}}\dfrac{\sqrt{b^3}}{a}-100=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Có bao nhiêu cặp số dương a,b thỏa mãn $\log_2 a$ và $\log_2 b$ là các số nguyên, đồng thời $\left(\log_2 ab-11\right).\log_2\dfrac{a^2}{b}=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 7: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $0<a<1<b$ và $\log_a\dfrac{b}{a^4}.\log_{ab^2}a+\log_{\sqrt{a}}b+2=0$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** -2.

Câu 8: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, a khác 1 và thoả mãn $a^{\log_a^2 b}+b^{\log_a b}=2b$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 9: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^5b\right).\log_a^2\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)+13\log_a\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)=19$. Giá trị của $\log_{b^2}\left(a^3b\right)$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** -3.

Câu 10: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_4 x=\log_6 y=\log_9\left(x+y\right)-\dfrac{1}{2}\log_3 2$. Mối quan hệ giữa x và y là

A. $x=2y$. **B.** $y=2x$. **C.** $x=4y$. **D.** $x=y$.

Câu 11: Có bao nhiêu số thực a thỏa $\log_2^2\left(4a^2\right)-\dfrac{1}{\log_{a^4}2}=12.$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Cho a,b là hai số thực dương phân biệt khác 1 thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{a^2}{b}+2\log_{\sqrt[3]{a}}a^6=0$. Tính $\log_a\left(ab^2\right)$.

A. $\log_a\left(ab^2\right)=9$. **B.** $\log_a\left(ab^2\right)=3$.

C. $\log_a\left(ab^2\right)=7$. **D.** $\log_a\left(ab^2\right)=10$.

Câu 13: Cho hai số thực dương a; b; $a\neq 1$ thỏa mãn $\log_{a^2}b+\log_{\sqrt{a}}b^2=\dfrac{9}{2}$. Tính $\log_a b$.

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 14: Cho a,b là các số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\frac{a^2}{b}\right)-\log_a(ab).\log_a a^4=0$. Giá trị $\log_b\left(a^2b\right)$ bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** 8. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 15: Cho các số thực a,b thuộc khoảng $(0;1)$ thoả mãn $\log_{ab}a=\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)$. Giá trị của biểu thức $\frac{\ln a}{\ln b}$ bằng.

A. $\sqrt{5}-1$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 16: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $1<a\le b\le a^6$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left[\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)\right]^2+3\log_{\sqrt[4]{a}}b-1$. Tính $M+2m$?

A. 12. **B.** 99. **C.** 87. **D.** 111.

Câu 17: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\left(\log_2^2(2x)-2m\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$ xác định với mọi x dương.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 18: Cho hai số thực a và b biết $a>b>1$ và thỏa mãn $\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=15$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn $\log_a 3=2$, $\log_{b^3}3=\frac{1}{4}$ và $\log_{ab^2c^4}3=\frac{2}{15}$. Giá trị $P=\log_{c^5}3$ bằng

A. $\frac{12}{65}$. **B.** $\frac{13}{60}$. **C.** $\frac{65}{12}$. **D.** $\frac{60}{13}$.

Câu 20: Cho các số thực dương $a\ne1,b\ne1$ thỏa mãn $\log_3 a=\log_b 81$ và tích $ab=729$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_3\frac{a}{b}\right)^2$.

A. 10. **B.** 16. **C.** 36. **D.** 20.

Câu 21: Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $3+\log_3 a=5+\log_5 b=\log_{15}(a+b)$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

A. 5625. **B.** 50625. **C.** 80375. **D.** 84375.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thoả mãn $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)+b^2-3b\le 0$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 23: Cho $a>0,b>0,a^2b\ne 1,ab^2\ne 1$ và $\log_{a^2b}\left(\frac{ab^3}{\sqrt{ab}}\right)=\frac{8}{5}$. Tính $\log_{ab^2} b$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 21. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Câu 24: Cho x,y là hai số thực dương khác 1. Biết $\log_3 x=\log_y 9$ và $xy=81$.

Khi đó $\log_3^2\left(\frac{x}{y}\right)$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 25: Cho a và b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\frac{b}{a^2}\right).\log_a(ab)-4=0$. Giá trị của $\log_b\left(ab^2\right)$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 26: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{20} a-\log_8 b=0,\log_8 b-\log_{125}(5a+12b)=0$. Tính $P=\log_2(a+b)-\log_2 b$.

A. $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=2$. **D.** $P=8$.

Câu 27: Cho hai số thực dương a, b ($b\ne 1$) và thỏa mãn $a^2-4ab-5b^2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=\log_{125}\frac{a}{b}.\log_b\frac{a^3}{125b}$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** 1.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương khác 1 thoả mãn $\log_a\left(a^2b\right)\log_b{}^2\left(ab^2\right)=27\log_a b$ thì $b=a^{\alpha}$, giá trị α nằm trong khoảng nào sau đây

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(4;5)$.

Câu 29: Biết phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$.

A. $1-\sqrt{3}$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho a,b là hai số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2(ab)=4\log_b\frac{a^2}{b}$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. -1.	**B.** 1.	**C.** 3.	**D.** -3.

Câu 31: Gọi S là tập các số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{x+y+1}=\left(\sqrt{3}\right)^{x^2+y^2}$. Tính tổng các phần tử của tập S?

A. 5.	**B.** 6.	**C.** 3.	**D.** 2.

Câu 32: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\frac{b^2}{a^3}+27=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.	**B.** $-\frac{9}{2}$.	**C.** $-\frac{2}{9}$.	**D.** $\frac{2}{9}$.

Câu 33: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^2b^3\right).\log_a b^3-\log_a^2\left(a^2b^3\right)+4=0$. Giá trị của biểu thức $\frac{7}{5}\log_b a+\frac{2024}{5}$ bằng

A. $\frac{2038}{5}$.	**B.** $\frac{2024}{5}$.	**C.** $\frac{2031}{5}$.	**D.** $\frac{2017}{5}$.

Câu 34: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 a^2+\log_{\frac{1}{3}} b=2$. Giá trị của $\frac{a}{\sqrt{b}}$ bằng

A. 3.	**B.** 9.	**C.** $\frac{1}{3}$.	**D.** $\frac{1}{9}$.

Câu 35: Cho a,b,c là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2=x;\log_{b^2}\sqrt{c}=y$. Giá trị của $\log_a c$ bằng

A. $2xy$.	**B.** $\frac{xy}{2}$.	**C.** $\frac{2}{xy}$.	**D.** $\frac{1}{2xy}$.

Câu 36: Biết phương trình $\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x=4$ có hai nghiệm phân biệt là a, b với $a<b$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $b>10$.	**B.** $2a+b=17$.	**C.** $a<1$.	**D.** $b=16a$.

Câu 37: Biết phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6$ có hai nghiệm là $x_1<x_2$ và tỉ số $\frac{x_1}{x_2}=\log\frac{a}{b}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a+b$.

A. $a+b=55$.	**B.** $a+b=37$.	**C.** $a+b=56$.	**D.** $a+b=38$.

Câu 38: Phương trình $\log_2^2 x+\log_3\frac{6}{x}=\left(1+\log_3\frac{6}{x}\right)\log_2 x$ có số nghiệm bằng

A. 2 nghiệm.	**B.** 3 nghiệm.	**C.** vô nghiệm.	**D.** 1 nghiệm.

Câu 39: Cho x,y là các số thực dương thoản mãn $\log_5 x^2=\log_2 y=\log_9(x^2+y^2)$. Giá trị của $\frac{x^2}{y}$ bằng

A. $\log_5\left(\frac{5}{2}\right)$.	**B.** $\log_2\left(\frac{5}{2}\right)$.	**C.** $\frac{5}{2}$.	**D.** 2.

Câu 40: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\frac{a^2}{b}\right)\cdot\log_a ab-4=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** -3.

Câu 41: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\frac{\log_a a^2b\cdot\log_a ab-2}{\log_a b}=5$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Câu 42: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a\frac{b}{a}=\frac{\log_a\frac{1}{b}}{\log_a b-4}$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -2.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^2b\right)\cdot\log_a^2\dfrac{b}{a}-2=0$. Giá trị của $\left(\log_b a\right)^2$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$.　　**B.** 3.　　**C.** $\dfrac{1}{9}$.　　**D.** 3.

Lời giải

Ta có $\log_a\left(a^2b\right)\cdot\log_a^2\dfrac{b}{a}-2=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+2\right)\left(\log_a b-1\right)^2-2=0$.

Đặt $t=\log_a b$; $t\neq 0$. Ta có phương trình

$$(t+2)(t-1)^2-2=0\Leftrightarrow(t+2)\left(t^2-2t+1\right)-2=0\Leftrightarrow t^3-3t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-\sqrt{3}\\ t=\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy $\left(\log_a b\right)^2=3\Leftrightarrow\left(\log_b a\right)^2=\dfrac{1}{3}$.

Câu 2: Cho a,b là hai số thực dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^2b\right).\log_a\left(\dfrac{a}{b^2}\right)=2$. Giá trị $\log_a b$ bằng

A. 2.　　**B.** 1.　　**C.** 0.　　**D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_a\left(a^2b\right).\log_a\left(\dfrac{a}{b^2}\right)=2\Leftrightarrow\left(\log_a a^2+\log_a b\right).\left(\log_a a-\log_a b^2\right)=2$

$\Leftrightarrow\left(2+\log_a b\right).\left(1-2\log_a b\right)=2\Leftrightarrow-3\log_a b-2\log^2{}_a b=0$

$$\Leftrightarrow\log_a b\left(3+2\log_a b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=0\\ \log_a b=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

$\log_a b=0\Leftrightarrow b=1$ (loại do $b\neq 1$).

Vậy $\log_a b=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $0<a<1<b$ và $\left(\log_a^2\left(\dfrac{a}{b}\right)+2\log_a b-5\right)\left(2\log_a\left(a^2b\right)-7\right)=0$. Chọn khẳng định đúng.

A. $b^2a=1$.　　**B.** $a^2b=1$.　　**C.** $a^3=\dfrac{1}{b}$.　　**D.** $b^3=\dfrac{1}{a}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)+2\log_a b-5\right)\left(2\log_a\left(a^2b\right)-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)+2\log_a b-5=0\\ 2\log_a\left(a^2b\right)-7=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\log_a a-\log_a b\right)^2+2\log_a b-5=0\\ 2\left(\log_a a^2+\log_a b\right)-7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(1-\log_a b\right)^2+2\log_a b-5=0\\ 2\left(2+\log_a b\right)-7=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2\log_a b+\log_a^2 b+2\log_a b-5=0\\ 2\left(2+\log_a b\right)-7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a^2 b-4=0\\ \log_a b=\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a b=-2\\ \log_a b=2\\ \log_a b=\frac{3}{2}\end{array}\right..$

Do $0<a<1<b$ nên $\log_a b<0$ suy ra $\log_a b=-2 \Leftrightarrow b=a^{-2} \Leftrightarrow a^2b=1$.

Câu 4: Cho a,b,c là các số thực dương và khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b \frac{c}{b}=\log_a \frac{c}{a^3b}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a(ab)-\log_b(bc)$. Tính giá trị biểu thức $S=2m^2+9M^2$.

A. $S=28$. **B.** $S=25$. **C.** $S=26$. **D.** $S=27$.

Lời giải

Đặt $x=\log_a b; y=\log_b c, (x;y>0) \Rightarrow \log_a c=xy$

$\Rightarrow P=\log_a(ab)-\log_b(bc)=\log_a a+\log_a b-\log_b b-\log_b c=1+x-1-y=x-y \Rightarrow x=P+y$

Khi đó ta có

$\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b \frac{c}{b}=\log_a \frac{c}{a^3b} \Leftrightarrow x^2+y^2+2y-2=xy-3-x$

$\Leftrightarrow (P+y)^2+y^2+2y-2=(P+y)y-3-(P+y)$

$\Leftrightarrow y^2+(P+3)y+P^2+P+1=0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow -3P^2+2P+5\ge 0 \Leftrightarrow -1\le P\le \frac{5}{3}$

$\Rightarrow m=-1; M=\frac{5}{3} \Rightarrow S=2m^2+9M^2=2.(-1)^2+9.\left(\frac{25}{9}\right)=27$.

Câu 5: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{b^3}}{a}-100=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{b^3}}{a}-100=0 \Leftrightarrow \left(\log_a b+3\right)^2\left(3\log_a b-2\right)-100=0$.

Đặt $t=\log_a b\ (t\neq 0, t\neq 1)$. Ta có phương trình:

$(t+3)^2(3t-2)-100=0 \Leftrightarrow (t^2+6t+9)(3t-2)-100=0$

$\Leftrightarrow 3t^3+16t^2+15t-118=0 \Leftrightarrow t=2$ (TM).

Vậy $\log_a b=2 \Leftrightarrow \log_b a=\frac{1}{2}$.

Câu 6: Có bao nhiêu cặp số dương a, b thỏa mãn $\log_2 a$ và $\log_2 b$ là các số nguyên, đồng thời $(\log_2 ab-11).\log_2\frac{a^2}{b}=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $(\log_2 ab-11).\log_2\frac{a^2}{b}=3 \Leftrightarrow (\log_2 a+\log_2 b-11).(2\log_2 a-\log_2 b)=3$

Do $\log_2 a$ và $\log_2 b$ là các số nguyên nên $\log_2 a+\log_2 b-11$ và $2\log_2 a-\log_2 b$ cũng là các số nguyên.

Suy ra $(\log_2 a+\log_2 b-11).(2\log_2 a-\log_2 b)=3 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=1\\ 2\log_2 a-\log_2 b=3\end{cases}$ hoặc

$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=-1\\ 2\log_2 a-\log_2 b=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=3\\ 2\log_2 a-\log_2 b=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=-3\\ 2\log_2 a-\log_2 b=-1\end{cases}$.

$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=1\\ 2\log_2 a-\log_2 b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a=5\\ \log_2 b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=32\\ b=128\end{cases}$ (thỏa mãn).

$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=-1\\ 2\log_2 a-\log_2 b=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a=\frac{7}{3}\\ \log_2 b=\frac{23}{3}\end{cases}$ (loại).

$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=3\\ 2\log_2 a-\log_2 b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a=5\\ \log_2 b=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=32\\ b=512\end{cases}$ (thỏa mãn).

$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b-11=-3\\ 2\log_2 a-\log_2 b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 a=\frac{7}{3}\\ \log_2 b=\frac{17}{3}\end{cases}$ (loại).

Vậy có 2 cặp số dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0<a<1<b$ và $\log_a\frac{b}{a^4}.\log_{ab^2} a+\log_{\sqrt{a}} b+2=0$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** -2.

Lời giải

$\log_a \frac{b}{a^4}.\log_{ab^2} a+\log_{\sqrt{a}} b+2=0 \Leftrightarrow \frac{\log_a b-4}{\log_a ab^2}+2\log_a b+2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a b-4}{2\log_a b+1}+2\log_a b+2=0$$

Đặt $t=\log_a b$. Vì $0<a<1<b$ nên $t<0$.

Ta có: $\frac{t-4}{2t+1}+2t+2=0 \Leftrightarrow t-4+(2t+2)(2t+1)=0$

$\Leftrightarrow 4t^2+7t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\frac{1}{4} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $t=-2$ thỏa mãn.

Vậy $\log_a b=-2$.

Câu 8: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, a khác 1 và thoả mãn $a^{\log_a^2 b}+b^{\log_a b}=2b$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

+) Ta có: $a^{\log_a^2 b}+b^{\log_a b}=2b \Leftrightarrow \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a b}+b^{\log_a b}=2b \Leftrightarrow b^{\log_a b}+b^{\log_a b}=2b$

$\Leftrightarrow b^{\log_a b}=b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ \log_a b=1\ (l) \text{ do } a\ne b \end{array}\right.$.

+) $b=1 \Rightarrow \log_a b=0$.

Câu 9: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^5b\right).\log_a^2\left(\frac{b^2}{a^3}\right)+13\log_a\left(\frac{b^3}{a^2}\right)=19$. Giá trị của $\log_{b^2}\left(a^3b\right)$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(a^5b\right).\log_a^2\left(\frac{b^2}{a^3}\right)+13\log_a\left(\frac{b^3}{a^2}\right)=19$

$\Leftrightarrow (5+\log_a b).(2\log_a b-3)^2+13(3\log_a b-2)-19=0$.

Đặt $t=\log_a b$ $(t\ne 0, t\ne 1)$. Ta có phương trình

$(2t-3)^2(t+5)+13(3t-2)-19=0 \Leftrightarrow (4t^2-12t+9)(t+5)+39t-45=0$

$\Leftrightarrow 4t^3+8t^2-12t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ \ (\text{loại}) \\ t=1\ \ (\text{loại}) \\ t=-3\ (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Suy ra $\log_a b = -3 \Leftrightarrow \log_b a = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\log_{b^2}\left(a^3b\right) = \dfrac{1}{2}\left(3\log_b a + 1\right) = 0$.

Câu 10: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) - \dfrac{1}{2}\log_3 2$. Mối quan hệ giữa x và y là

A. $x = 2y$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x = 4y$. **D.** $x = y$.

Lời giải

Ta có $\log_9(x+y) - \dfrac{1}{2}\log_3 2 = \log_9(x+y) - \log_9 2 = \log_9\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]$.

Nên $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) - \dfrac{1}{2}\log_3 2 \Leftrightarrow \log_4 x = \log_6 y = \log_9\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right]$

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9\left[\dfrac{1}{2}(x+y)\right] = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 2.9^t \end{cases}$

Suy ra $4^t + 6^t = 2.9^t \Leftrightarrow 4^t + 6^t - 2.9^t = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = 1 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = -2 \end{array}\right.$.

Do $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$ nên nhận $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4^0 = 1 \\ y = 6^0 = 1 \end{cases}$.

Vậy $x = y$.

Câu 11: Có bao nhiêu số thực a thỏa $\log_2^2\left(4a^2\right) - \dfrac{1}{\log_{a^4} 2} = 12$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Với điều kiện $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ ta có: $\log_2^2\left(4a^2\right) - \dfrac{1}{\log_{a^4} 2} = 12 \Leftrightarrow \left(2 + 2\log_2|a|\right)^2 - 4\log_2|a| - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4\log_2^2|a| + 4\log_2|a| - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2|a| = 1 \\ \log_2|a| = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm 2 \\ a = \pm\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy có 4 số thực a thỏa mãn đề bài.

Câu 12: Cho a, b là hai số thực dương phân biệt khác 1 thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a \dfrac{a^2}{b} + 2\log_{\sqrt[3]{a}} a^6 = 0$. Tính $\log_a\left(ab^2\right)$.

A. $\log_a\left(ab^2\right)=9$. **B.** $\log_a\left(ab^2\right)=3$.

C. $\log_a\left(ab^2\right)=7$. **D.** $\log_a\left(ab^2\right)=10$.

Lời giải

Ta có $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{a^2}{b}+2\log_{\sqrt[3]{a}}a^6=0\Leftrightarrow\left(\log_a a^3+\log_a b\right)^2\left(\log_a a^2-\log_a b\right)+36\log_a a=0$

$\Leftrightarrow\left(3+\log_a b\right)^2\left(2-\log_a b\right)+36=0$ (1).

Đặt $t=\log_a b$ thì (1) trở thành

$\left(3+t\right)^2\left(2-t\right)+36=0\Leftrightarrow -t^3-4t^2+3t+54=0$

$\Leftrightarrow\left(3-t\right)\left(t^2+7t+18\right)=0\Leftrightarrow t=3$

Khi đó $\log_a\left(ab^2\right)=\log_a a+\log_a b^2=1+2\log_a b=1+2t=7$.

Vậy $\log_a\left(ab^2\right)=7$.

Câu 13: Cho hai số thực dương a; b; $a\neq 1$ thỏa mãn $\log_{a^2}b+\log_{\sqrt{a}}b^2=\dfrac{9}{2}$. Tính $\log_a b$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^2}b+\log_{\sqrt{a}}b^2=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_a b+4\log_a b=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\dfrac{9}{2}\log_a b=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\log_a b=1$.

Câu 14: Cho a,b là các số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)-\log_a\left(ab\right).\log_a a^4=0$. Giá trị $\log_b\left(a^2b\right)$ bằng

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** 8. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có

$$\log_a^2\left(\frac{a^2}{b}\right)-\log_a\left(ab\right).\log_a a^4=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\log_a b\right)^2-4\left(1+\log_a b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\log_a^2 b-8\log_a b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=0\\ \log_a b=8\end{array}\right..$$

Vì a,b là các số thực dương, khác 1 nên $\log_a b\neq 0$. Do đó, $\log_a b=8$.

Khi đó $\log_b\left(a^2b\right)=\dfrac{\log_a\left(a^2b\right)}{\log_a b}=\dfrac{2+\log_a b}{\log_a b}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 15: Cho các số thực a,b thuộc khoảng $(0;1)$ thoả mãn $\log_{ab} a = \log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)$. Giá trị của biểu thức $\frac{\ln a}{\ln b}$ bằng.

A. $\sqrt{5}-1$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Giả thiết: $\log_{ab} a = \log_a^2\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a ab} = \left(\log_a a - \log_a b\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\log_a b} = \left(1-\log_a b\right)^2$

Đặt $t = \log_a b$.

Do $a,b \in (0;1) \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow t > 0$.

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{1+t} = (1-t)^2 \Leftrightarrow (1-t)^2(1+t) = 1 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \text{(ktm)} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{(ktm)} \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{(tm)} \end{array}\right.$

Vậy $\frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 16: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $1 < a \le b \le a^6$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left[\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)\right]^2 + 3\log_{\sqrt[4]{a}} b - 1$. Tính $M+2m$?

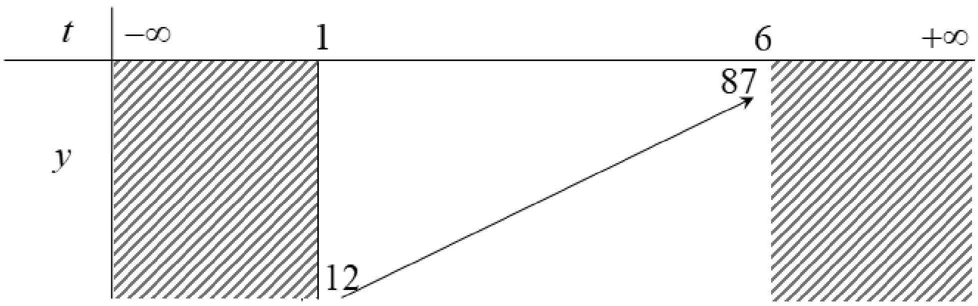
A. 12. **B.** 99. **C.** 87. **D.** 111.

Lời giải

Vì $1 < a \le b \le a^6$ nên $1 \le \log_a b \le 6$.

$P = \left[\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)\right]^2 + 3\log_{\sqrt[4]{a}} b - 1 = \left(2-\log_a b\right)^2 + 12\log_a b - 1 = \log_a^2 b + 8\log_a b + 3$.

Đặt $t = \log_a b$ ta có $t \in [1;6]$. Xét hàm số $y = t^2 + 8t + 3$.



Từ bảng biến thiên suy ra $M=87;\ m=12$. Vậy $M+2m=111$.

Câu 17: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\left(\log_2^2(2x)-2m\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$ xác định với mọi x dương.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x>0 \\ \log_2^2(2x)-2m\log_2\left(\frac{x}{2}\right)>0\ (1) \end{cases}$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2-2m(\log_2 x-1)>0\Leftrightarrow\log_2^2 x+2(1-m)\log_2 x+1+2m>0$.

Đặt $t=\log_2 x, t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành: $t^2+2(1-m)t+1+2m>0\ (2)$.

Hàm số đã cho xác định với mọi x dương khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'<0\Leftrightarrow(1-m)^2-(1+2m)<0\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 18: Cho hai số thực a và b biết $a>b>1$ và thỏa mãn $\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=15$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=15\Leftrightarrow 4\log_{\frac{a}{b}}^2 a+3(\log_b a-1)=15$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)}+3\left(\frac{1}{\log_a b}-1\right)=15\Leftrightarrow\frac{4}{(1-\log_a b)^2}+3\left(\frac{1}{\log_a b}-1\right)=15\ (*)$$

Đặt $t=\log_a b$. Do $a>b>1\Rightarrow\log_a a>\log_a b>\log_a 1\Leftrightarrow 0<t<1$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \frac{4}{(1-t)^2}+3\left(\frac{1}{t}-1\right)=15$

$\Leftrightarrow 18t^3-39t^2+20t-3=0 \Leftrightarrow (2t-3)(3t-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{2} \ (L) \\ t=\frac{1}{3} \ (TM) \end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b=\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn $\log_a 3=2$, $\log_{b^3} 3=\frac{1}{4}$ và $\log_{ab^2c^4} 3=\frac{2}{15}$. Giá trị $P=\log_{c^5} 3$ bằng

A. $\frac{12}{65}$. **B.** $\frac{13}{60}$. **C.** $\frac{65}{12}$. **D.** $\frac{60}{13}$.

Lời giải

Ta có: $\log_{ab^2c^4} 3=\frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3\left(ab^2c^4\right)}=\frac{2}{15} \Leftrightarrow \log_3 a+2\log_3 b+4\log_3 c=\frac{15}{2} \quad (1)$.

Lại có: $\begin{cases} \log_a 3=2 \\ \log_{b^3} 3=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 a=\frac{1}{2} \\ \log_3\left(b^3\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 a=\frac{1}{2} & (2) \\ \log_3 b=\frac{4}{3} & (3) \end{cases}$.

Từ $(1),(2),(3)$ ta có: $\begin{cases} \log_3 a=\frac{1}{2} \\ \log_3 b=\frac{4}{3} \\ \log_3 c=\frac{13}{12} \end{cases}$.

Vậy $P=\log_{c^5} 3=\frac{1}{5}.\log_c 3=\frac{1}{5}.\frac{1}{\log_3 c}=\frac{12}{65}$.

Câu 20: Cho các số thực dương $a\neq 1, b\neq 1$ thỏa mãn $\log_3 a=\log_b 81$ và tích $ab=729$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_3\frac{a}{b}\right)^2$.

A. 10. **B.** 16. **C.** 36. **D.** 20.

Lời giải

Đặt $\log_3 a=\log_b 81=t$.

Ta có $\log_b 81=t \Leftrightarrow \frac{4}{\log_3 b}=t \Leftrightarrow \log_3 b=\frac{4}{t}$.

Theo đề bài: $ab=729$ suy ra $\log_3(ab)=\log_3 729 \Leftrightarrow \log_3 a+\log_3 b=6$ suy ra $t+\frac{4}{t}=6$.

Ta có $\left(\log_3\frac{a}{b}\right)^2=\left(\log_3 a-\log_3 b\right)^2=\left(t-\frac{4}{t}\right)^2=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2-4\cdot t\cdot\frac{4}{t}=6^2-16=20$.

Vậy $\left(\log_3\frac{a}{b}\right)^2=20$.

Câu 21: Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $3+\log_3 a=5+\log_5 b=\log_{15}(a+b)$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

A. 5625. **B.** 50625. **C.** 80375. **D.** 84375.

Lời giải

Đặt $\log_3 a=x\Rightarrow a=3^x$; $\log_5 b=y\Rightarrow b=5^y$; $3+x=\log_{15}(a+b)\Rightarrow a+b=15^{x+3}$.

Khi đó: $3+x=5+y\Rightarrow y=x-2$.

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{15^{x+3}}{3^x.5^y}=\frac{15^3.15^x}{3^x.5^{x-2}}=15^3.5^2=84375$.

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=84375$.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thoả mãn $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)+b^2-3b\le 0$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)+b^2-3b\le 0\Leftrightarrow\log_2\left(3^{a^2}+1\right)\le -b^2+3b$.

Do $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)\ge\log_2\left(3^0+1\right)\Leftrightarrow\log_2\left(3^{a^2}+1\right)\ge 1$.

Khi đó: $-b^2+3b\ge 1, b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt{5}}{2}\le b\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}, b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=2\end{array}\right.$.

+) Với $b=1$, ta có: $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)\le 2\Leftrightarrow 3^{a^2}\le 3\Leftrightarrow a^2\le 1\Leftrightarrow -1\le a\le 1$.

Mà $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=0\\a=1\end{array}\right.$.

+) Với $b=2$, ta có: $\log_2\left(3^{a^2}+1\right)\le 2\Leftrightarrow 3^{a^2}\le 3\Leftrightarrow a^2\le 1\Leftrightarrow -1\le a\le 1$.

Mà $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=0\\a=1\end{array}\right.$.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(a;b)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Cho $a>0,b>0,a^2b\neq 1,ab^2\neq 1$ và $\log_{a^2b}\left(\dfrac{ab^3}{\sqrt{ab}}\right)=\dfrac{8}{5}$. Tính $\log_{ab^2}b$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** 21. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải

Nếu $a=1$ thì $\log_{a^2b}\dfrac{ab^3}{\sqrt{ab}}=\log_{b^2}\dfrac{b^3}{\sqrt{b}}=\dfrac{5}{4}$ không thoả mãn. Do đó, $a\neq 1$.

Ta có $\log_{a^2b}\left(\dfrac{ab^3}{\sqrt{ab}}\right)=\dfrac{8}{5}\Leftrightarrow\dfrac{\log_a\left(\dfrac{ab^3}{\sqrt{ab}}\right)}{\log_a a^2b}=\dfrac{8}{5}\Leftrightarrow\dfrac{\log_a ab^3-\log_a\sqrt{ab}}{\log_a a^2+\log_a b}=\dfrac{8}{5}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1+3\log_a b-\dfrac{1}{2}(1+\log_a b)}{2+\log_a b}=\dfrac{8}{5}\Leftrightarrow\log_a b=3\Leftrightarrow b=a^3$.

Khi đó, $\log_{ab^2}b=\log_{a^7}a^3=\dfrac{3}{7}$.

Câu 24: Cho x,y là hai số thực dương khác 1. Biết $\log_3 x=\log_y 9$ và $xy=81$.

Khi đó $\log_3^2\left(\dfrac{x}{y}\right)$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

+) Với x,y là hai số thực dương khác 1, ta có: $xy=81\Rightarrow y=\dfrac{81}{x}$.

Khi đó:

$\log_3 x=\log_y 9\Leftrightarrow\log_3 x=\dfrac{1}{\log_9 y}\Leftrightarrow\log_3 x=\dfrac{2}{\log_3 y}\Leftrightarrow\log_3 x.\log_3 y=2$

$\Leftrightarrow\log_3 x.\log_3\dfrac{81}{x}=2\Leftrightarrow\log_3 x.(4-\log_3 x)=2\Leftrightarrow-(\log_3 x)^2+4\log_3 x-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2+\sqrt{2}\\ \log_3 x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

+) Với $\log_3 x=2+\sqrt{2}$ thì $\log_3 y=\dfrac{2}{\log_3 x}=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow\log_3^2\left(\dfrac{x}{y}\right)=(\log_3 x-\log_3 y)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$.

+) Với $\log_3 x=2-\sqrt{2}$ thì $\log_3 y=\dfrac{2}{\log_3 x}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

$\Rightarrow\log_3^2\left(\dfrac{x}{y}\right)=(\log_3 x-\log_3 y)^2=\left(-2\sqrt{2}\right)^2=8$.

Câu 25: Cho a và b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\frac{b}{a^2}\right).\log_a(ab)-4=0$. Giá trị của $\log_b(ab^2)$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

$\log_a^2\left(\frac{b}{a^2}\right).\log_a(ab)-4=0 \Leftrightarrow (\log_a b-2)^2(1+\log_a b)-4=0$.

Đặt $t=\log_a b$. Vì b khác 1 nên $t\neq 0$.

Ta có $(t-2)^2(1+t)-4=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta được $t=3$ hay $\log_a b=3$.

Khi đó $\log_b(ab^2)=\frac{\log_a(ab^2)}{\log_a b}=\frac{1+2\log_a b}{\log_a b}=\frac{7}{3}$.

Câu 26: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{20}a-\log_8 b=0, \log_8 b-\log_{125}(5a+12b)=0$. Tính $P=\log_2(a+b)-\log_2 b$.

A. $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=2$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Ta có

$\log_{20}a-\log_8 b=0 \Leftrightarrow \log_{20}a=\log_8 b$

$\log_8 b-\log_{125}(5a+12b)=0 \Leftrightarrow \log_8 b=\log_{125}(5a+12b)$

$\Rightarrow \log_{20}a=\log_8 b=\log_{125}(5a+12b)$

Đặt $\log_{20}a=\log_8 b=\log_{125}(5a+12b)=x$

Có $\begin{cases} a=20^x \\ b=8^x \\ 5a+12b=125^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b}=\left(\frac{5}{2}\right)^x & (1) \\ 5.20^x+12.8^x=125^x & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 5.\left(\frac{5}{2}\right)^x+12=\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}-5.\left(\frac{5}{2}\right)^x-12=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x=3$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{b}=3$

Suy ra $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=4$.

Lại có $\log_2(a+b)-\log_2 b=\log_2\dfrac{a+b}{b}=\log_2 4=2$

Câu 27: Cho hai số thực dương a, b ($b\neq 1$) và thỏa mãn $a^2-4ab-5b^2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=\log_{125}\dfrac{a}{b}.\log_b\dfrac{a^3}{125b}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** 1.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a^2-4ab-5b^2=0\Leftrightarrow a^2+ab-5ab-5b^2=0\Leftrightarrow a(a+b)-5b(a+b)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-5b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\a=5b\end{array}\right.$.

Trường hợp: $a=-b$ (loại vì a, b dương).

Trường hợp: $a=5b$.

Ta có $T=\log_{125}\dfrac{a}{b}.\log_b\dfrac{a^3}{125b}=\log_{(5^3)}\left(\dfrac{5b}{b}\right).\log_b\left[\dfrac{(5b)^3}{125b}\right]=\dfrac{1}{3}\log_5 5.\log_b\left(b^2\right)=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $T=\dfrac{2}{3}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương khác 1 thoả mãn $\log_a\left(a^2b\right)\log_b^{\,2}\left(ab^2\right)=27\log_a b$ thì $b=a^\alpha$, giá trị α nằm trong khoảng nào sau đây

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(4;5)$.

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(a^2b\right)\log_b^{\,2}\left(ab^2\right)=27\log_a b\Leftrightarrow(2+\log_a b)(2+\log_b a)^2=27\log_a b$.

Đặt $\log_a b=t$ ta có: $(2+t)\left(2+\dfrac{1}{t}\right)^2=27t\Leftrightarrow(t+2)\left(4t^2+4t+1\right)=27t^3$

$\Leftrightarrow 23t^3-12t^2-9t-2=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\log_a b=1\Leftrightarrow b=a^1$.

Suy ra $\alpha=1$.

Vậy chọn phương án **B.**

Câu 29: Biết phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$.

A. $1-\sqrt{3}$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $3^{2x-1}-3^{x-1}+1>0\Leftrightarrow 3^{2x}-3^x+3>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}.3^{2x}-\dfrac{1}{3}.3^x+1=3^x\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$.

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$ ta được phương trình $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1\\t_2=3\end{array}\right.$.

Khi đó ta có $P=\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}=1-\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho a,b là hai số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(ab\right)=4\log_b\dfrac{a^2}{b}$. Giá trị của $\log_a b$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

+) Đặt $t=\log_a b$, do a,b là hai số thực dương, khác 1 nên $t\neq 0$.

+) Ta có $\log_a^2\left(ab\right)=4\log_b\dfrac{a^2}{b}\Leftrightarrow\left(1+t\right)^2=4\left(\dfrac{2}{t}-1\right)\Leftrightarrow t^3+2t^2+5t-8=0$

$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^2+3t+8\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $\log_a b=1$.

Câu 31: Gọi S là tập các số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{x+y+1}=\left(\sqrt{3}\right)^{x^2+y^2}$. Tính tổng các phần tử của tập S?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$2^{x+y+1}=\left(\sqrt{3}\right)^{x^2+y^2}\Leftrightarrow 4^{x+y+1}=3^{x^2+y^2}\Leftrightarrow\left(x+y+1\right)\log_3 4=x^2+y^2$.

$\Leftrightarrow y^2-2\left(\log_3 2\right)y+x^2-2\left(x+1\right)\log_3 2=0$.

Để tồn tại số thực y khi và chỉ khi $\Delta'=\left(\log_3 2\right)^2+2\left(x+1\right)\log_3 2-x^2\geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2+2x\log_3 2+\left(\log_3 2\right)^2+2\log_3 2\geq 0\Leftrightarrow -0,8036\leq x\leq 2,0655$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{0;1;2\right\}$. Vậy tổng cần tìm là 3.

Câu 32: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{b^2}{a^3}+27=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $-\dfrac{9}{2}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải

Ta có $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{b^2}{a^3}+27=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+3\right)^2\left(2\log_a b-3\right)+27=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$(t+3)^2(2t-3)+27=0 \Leftrightarrow (t^2+6t+9)(2t-3)+27=0$

$\Leftrightarrow 2t^3+12t^2+18t-3t^2-18t-27+27=0 \Leftrightarrow 2t^3+9t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (L) \\ t=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b=-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \log_b a=-\dfrac{2}{9}$.

Câu 33: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2(a^2b^3).\log_a b^3-\log_a^2(a^2b^3)+4=0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{7}{5}\log_b a+\dfrac{2024}{5}$ bằng

A. $\dfrac{2038}{5}$. **B.** $\dfrac{2024}{5}$. **C.** $\dfrac{2031}{5}$. **D.** $\dfrac{2017}{5}$.

Lời giải

Ta có $\log_a^2(a^2b^3).\log_a b^3-\log_a^2(a^2b^3)+4=0$

$\Leftrightarrow \log_a^2(a^2b^3).(\log_a b^3-1)+4=0 \Leftrightarrow (3\log_a b+2)^2(3\log_a b-1)+4=0$.

Đặt $t=\log_a b$; $t\neq 0$. Ta có phương trình

$(3t+2)^2(3t-1)+4=0 \Leftrightarrow (9t^2+12t+4)(3t-1)+4=0$

$\Leftrightarrow 27t^3+36t^2+12t-9t^2-12t-4+4=0 \Leftrightarrow 27t^3+27t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (L) \\ t=-1 \end{array}\right.$.

Suy ra $\log_a b=-1 \Leftrightarrow \log_b a=-1$

Vậy $\dfrac{7}{5}\log_b a+\dfrac{2024}{5}=\dfrac{2017}{5}$.

Câu 34: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 a^2+\log_{\frac{1}{3}} b=2$. Giá trị của $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Với a và b là hai số thực dương, ta có:

$\log_3 a^2+\log_{\frac{1}{3}} b=2 \Leftrightarrow \log_3 a^2-\log_3 b=2 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{a^2}{b}=2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b}=3^2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{b}}=3$.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

Chọn a hoặc b. Dùng chức năng SOLVE để tìm giá trị còn lại. Tính giá trị và thay vào đáp án để kiểm tra. Cụ thể:

+ Chọn $b=3$ (chọn tùy ý thỏa điều kiện bài toán).

+ Bấm: $\log_3 x^2+\log_{\frac{1}{3}} 3=2 \xrightarrow{SOLVE} x\approx 5.196152423 \xrightarrow{STO} A$

$\log_3(x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(3)=2$ Ans→A

x= 5.196152423
L-R= 0 5.196152423

+ Tính $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{A}{\sqrt{3}}=3$ ta được đáp án A.

Câu 35: Cho a,b,c là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2=x;\log_{b^2}\sqrt{c}=y$. Giá trị của $\log_a c$ bằng

A. $2xy$. **B.** $\dfrac{xy}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{xy}$. **D.** $\dfrac{1}{2xy}$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Với a,b,c là các số thực dương, khác 1, ta có:

$\log_a b^2 = x \Leftrightarrow 2\log_a b = x \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{x}{2}$.

$\log_{b^2}\sqrt{c} = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\log_b c = y \Leftrightarrow \log_b c = 4y$.

Khi đó: $\log_a b.\log_b c = \dfrac{x}{2}.4y = 2xy \Leftrightarrow \log_a c = 2xy$.

Cách 2: Sử dụng máy tính:

Chọn $b=3, x=4, y=2$ (bạn đọc chọn tùy ý các số thỏa mãn điều kiện bài toán).

Dùng chức năng SOLVE để tìm a,c và dùng chức năng STO để gán vào biến A,C

Cụ thể:

+ Bấm $\log_x 3^2 = 4 \xrightarrow{SOLVE} x \approx 1,732050808 \xrightarrow{STO} A$ ta được:

log$_x$(3^2)=4
x= 1.732050808
L-R= 0

Ans→A
1.732050808

+ Bấm $\log_{3^2}\sqrt{x} = 2 \xrightarrow{SOLVE} x = 6561 \xrightarrow{STO} C$ ta được:

log$_{3^2}$(√x)=2
x= 6561
L-R= 0

Ans→C
6561

+ Bấm $\log_A C = 16$

+ Kiểm tra bằng cách thay $x=4, y=2$ (đã chọn) vào đáp án ta được đáp án A.

Câu 36: Biết phương trình $\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ có hai nghiệm phân biệt là a, b với $a<b$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $b>10$. **B.** $2a+b=17$. **C.** $a<1$. **D.** $b=16a$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, ta suy ra phương trình: $t^2-3t-4=0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4 \end{array}\right.$.

Với $t=-1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$, thỏa mãn đk $x>0$.

Với $t=4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$, thỏa mãn đk $x>0$.

Khi đó $a=\dfrac{1}{2}$, $b=16$ nên khẳng định $b=16a$ là sai.

Câu 37: Biết phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6$ có hai nghiệm là $x_1<x_2$ và tỉ số $\dfrac{x_1}{x_2}=\log\dfrac{a}{b}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a+b$.

A. $a+b=55$. **B.** $a+b=37$. **C.** $a+b=56$. **D.** $a+b=38$.

Lời giải

Ta có $\log_3\left(3^x-1\right).\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(3^x-1\right)=-3\\ \log_3\left(3^x-1\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\dfrac{28}{27}\\ x_2=\log_3 10\end{array}\right.$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\log\dfrac{28}{27} \Rightarrow a=28,\ b=27 \Rightarrow a+b=55$.

Câu 38: Phương trình $\log_2^2 x+\log_3\dfrac{6}{x}=\left(1+\log_3\dfrac{6}{x}\right)\log_2 x$ có số nghiệm bằng

A. 2 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** vô nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

PT đã cho $\Leftrightarrow \log_2^2 x+\log_3\dfrac{6}{x}-\log_2 x-\log_2 x.\log_3\dfrac{6}{x}=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x-1)+\log_3\dfrac{6}{x}(1-\log_2 x)=0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x-\log_3\dfrac{6}{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_2 x-1=0 & (1)\\ \log_2 x-\log_3\dfrac{6}{x}=0 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1) : $(1) \Leftrightarrow x=2\ (t/m)$

Giải (2) : $(2) \Leftrightarrow \log_2 x=\log_3\dfrac{6}{x} \Leftrightarrow \log_2 x=\dfrac{\log_2\dfrac{6}{x}}{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 3.\log_2 x=\log_2 6-\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.(1+\log_2 3)=\log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 x.(\log_2 2+\log_2 3)=\log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2\ (t/m)$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 39: Cho x,y là các số thực dương thoản mãn $\log_5 x^2=\log_2 y=\log_9(x^2+y^2)$. Giá trị của $\dfrac{x^2}{y}$ bằng

A. $\log_5\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\log_2\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $\log_5 x^2=\log_2 y=\log_9(x^2+y^2)=t \Rightarrow \begin{cases}x^2=5^t\\ y=2^t\\ x^2+y^2=9^t\end{cases} \Leftrightarrow 5^t+4^t=9^t\,(1)$.

$(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^t+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t=1$. Đặt $f(t)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^t+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t \Rightarrow f'(t)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^t\ln\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t\ln\dfrac{5}{9}<0$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến nên phương trình (1) có duy nhất 1 nghiệm

$t=1 \Leftrightarrow x^2=5; y=2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 40: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)\cdot\log_a ab-4=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\log_a^2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)\cdot\log_a ab-4=0 \Leftrightarrow (2-\log_a b)^2(\log_a b+1)-4=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$(2-t)^2(t+1)-4=0 \Leftrightarrow (t^2-4t+4)(t+1)-4=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (L) \\ t=3 \end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b=3 \Leftrightarrow \log_b a=\dfrac{1}{3}$.

Câu 41: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{\log_a a^2b\cdot\log_a ab-2}{\log_a b}=5$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $\dfrac{\log_a a^2b\cdot\log_a^2 ab-2}{\log_a b}=5 \Leftrightarrow (2+\log_a b)(1+\log_a b)^2-2=5\log_a b$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$(2+t)(t+1)^2-2=5t \Leftrightarrow (t^2+2t+1)(t+2)-2=5t \Leftrightarrow t^3+4t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (L) \\ t=-4 \end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b=-4 \Leftrightarrow \log_b a=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 42: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a\dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_a\frac{1}{b}}{\log_a b-4}$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\log_a\dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_a\frac{1}{b}}{\log_a b-4} \Leftrightarrow \log_a b-1=\dfrac{-\log_a b}{\log_a b-4}$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình $t-1=\dfrac{-t}{t-4} \Leftrightarrow t^2-4t+4=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vậy $\log_a b=2 \Leftrightarrow \log_b a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 40: **(Đề TK BGD 2024)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\neq\dfrac{m}{3}$.

Ta có $y'=\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}\geq 0;\ \forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+2mx+3\geq 0;\ \forall x\in(2;3) & (1)\\ \dfrac{m}{3}\notin(2;3) & (2)\end{cases}$.

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}\geq 3\\ \dfrac{m}{3}\leq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\ m\leq 6\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow 2m\geq 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)$.

Mà $g'(x)=3+\dfrac{3}{x^2}>0,\ \forall x\in(2;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó $2m\geq 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)\Leftrightarrow 2m\geq g(3)\Leftrightarrow 2m\geq 8\Leftrightarrow m\geq 4$.

Kết hợp hai điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\ 4\leq m\leq 6\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{4;5;6;9;10;...;20\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 40

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-25;3]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+4x-m-5}{4x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

A. 17. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 16.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-mx-\frac{7}{5}$ luôn có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2022;2022)$ để hàm số $y=\left|x^3+(2m+1)x-2\right|$ đồng biến trên $(1;3)$?

A. 4034. **B.** 2022. **C.** 4030. **D.** 4032.

Câu 5: Số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ của m để hàm số $f(x)=8^{x^2}-3\cdot 4^{x^2+1}-m.2^{x^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};1\right)$ là

A. 1988. **B.** 1990. **C.** 1986. **D.** 0.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-2mx+x-m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+mx$ với m là tham số thực. Số các giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)=(m+2)x^4+(2m-1)x^2+2024$. Số các giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ là

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 9: Cho hàm số $y=m^2x^4-2(m+2024)x^2+9$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 46. **B.** 45. **C.** 44. **D.** 47.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{1}{5}$. **D.** -2.

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (với m là thàm số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]}y=3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $-1<m\le 3$. **B.** $4\le m<6$. **C.** $m>6$. **D.** $m<-1$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $S=5a+4b$.

A. -29. **B.** 9. **C.** -9. **D.** 29.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\,7)$?

A. 8.　　**B.** 10.　　**C.** 11.　　**D.** 9.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{(m+1)\sqrt{-2x+3}-1}{-\sqrt{-2x+3}+\dfrac{2}{m}}$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\,1\right)$ là $(-\infty;\,a)\cup(b;\,c]\cup[d;\,+\infty)$. Giá trị của biểu thức $a-b+c-d$ bằng.

A. -3.　　**B.** -1.　　**C.** 0.　　**D.** 2.

Câu 15: Tìm tập các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{\ln x - m}{m\ln x - 4}$ đồng biến trên khoảng $(\mathrm{e};+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.　　**B.** $(-\infty;-2)\cup[4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$.　　**D.** $[2;+\infty)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 2.　　**B.** 4.　　**C.** 3.　　**D.** 1.

Câu 17: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x+m}{x-1}$, (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có hai cực trị a,b thỏa mãn $a^2+b^2=10$.

A. $m=-3$.　　**B.** $m=2$.　　**C.** $m=\dfrac{7}{2}$.　　**D.** $m=1$

Câu 18: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$. Biết rằng điểm M thuộc nhánh bên phải tiệm cận đứng của (C). Tìm x_0 để điểm M ở gần điểm $I(-1;-1)$ nhất.

A. $x_0 = 1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.　　**B.** $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$.　　**C.** $x_0 = 1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.　　**D.** $x_0 = -1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{-x^2+4x+m+1}{4x+m}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(2;4)$?

A. 2024.　　**B.** 2023.　　**C.** 3.　　**D.** 4.

Câu 20: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m>1$.　　**B.** $m>\dfrac{1}{2}$.　　**C.** $m\ge\dfrac{1}{2}$.　　**D.** $m\ge 1$.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số $y = \dfrac{\cot^2 x - 2m\cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2026. **D.** 2023.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\left(m-x^3\right)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\ 1)$.

A. $m<1$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m\ge -2$.

Câu 23: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-3;8\right]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=x-4\sqrt{x+m}$ nghịch biến trên $\left(0;2\right)$?

A. 3 . **B.** 6. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=\log_2\left(3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;5\right)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 25: Cho hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{e^{2x}-(3m-2)e^x+2024m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right)=e^{f(2x+m)}$. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-2024;2024\right]$ để hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;3\right)$.

A. 4041. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 4043

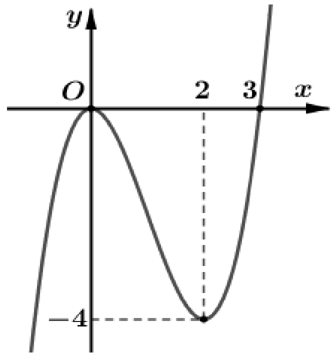
Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương $m<2024$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2-2x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;3\right)$?

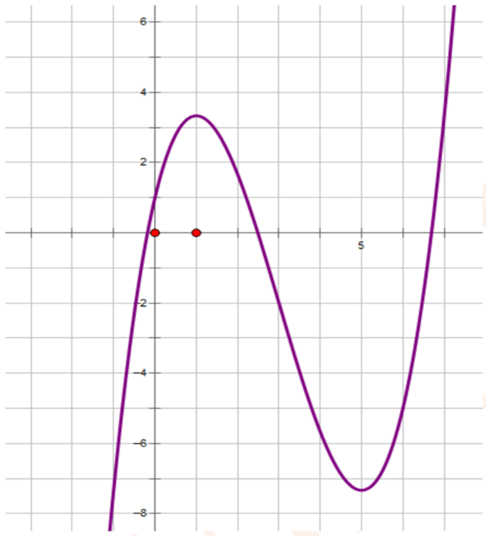
A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2013. **D.** 2016.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình bên dưới. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$ có bao nhiêu cực trị



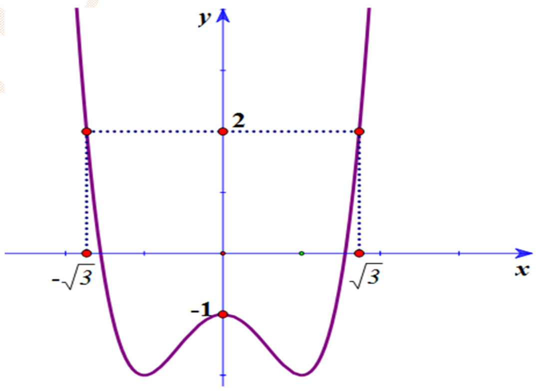
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới đây. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-4;-3)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $(-3;-2)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



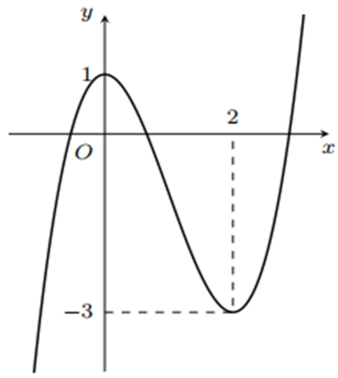
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=3f(2x+1)-8x^3-12x^2+2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng:

A. $3f(-1)-2$. **B.** $3f(0)$. **C.** $3f(3)-18$. **D.** $3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

A. 8. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+mx+8-m)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?



A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để ứng với mỗi m hàm số hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. 4046 **B.** 2022 **C.** 2026 **D.** 2023

Câu 34: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A. $m>-8$. **B.** $m\le -8$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m<-1$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $m\le 12$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 12$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 154.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. 3 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 5

Câu 39: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-9}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $(-3;0]$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $[-3;0)$.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-m+5}{2x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 24. **B.** 2. **C.** 20. **D.** 6.

Câu 41: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3\left(2m+1\right)x^2+\left(12m+5\right)x+2$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{mx-6m+5}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;7\right)$.

A. 1027. **B.** 4045. **C.** 4043. **D.** 2025.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-25;3\right]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+4x-m-5}{4x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$.

A. 17. **B.** 15. **C.** 14. **<u>D.</u>** 16.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-4x^2+2mx+20}{\left(4x-m\right)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\left(-3;-1\right)$.

tức là

$$\begin{cases}-4x^2+2mx+20\ge 0,\forall x\in\left(-3;-1\right)\\ x\ne\dfrac{m}{4},\forall x\in\left(-3;-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{2x^2-10}{x},\forall x\in\left(-3;-1\right)\ \left(Do\ x<0,\forall x\in\left(-3;\right.\right.\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{4}\le -3\\ \dfrac{m}{4}\ge -1\end{array}\right.\end{cases}.$$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2x^2-10}{x},\forall x\in\left[-3;-1\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{2x^2+10}{x^2}>0,\forall x\in\left[-3;-1\right]$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-3;-1\right)$.

Suy ra $\underset{\left[-3;-1\right]}{Min}\,g\left(x\right)=g\left(-3\right)=-\dfrac{8}{3}$.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases}m\le\dfrac{2x^2-10}{x},\forall x\in\left(-3;-1\right)\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{4}\le -3\\ \dfrac{m}{4}\ge -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -\dfrac{8}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m\le -12\\ m\ge -4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-12\right]\cup\left[-4;-\dfrac{8}{3}\right].$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $\left[-25;3\right]$ nên $m\in\left\{-25;-24;-23;...;-12\right\}\cup\left\{-4;-3\right\}$.

Vậy 16 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-25;3\right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **<u>D.</u>** 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 > 0 \\ y\left(m+1\right) \le y\left(0\right) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left(m+1\right)^3 - 3m\left(m+1\right)^2 + 3\left(m^2 - 1\right)\left(m+1\right) + 2020 \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left(m+1\right)^2\left(m-2\right) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \le 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx - \frac{7}{5}$ luôn có hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(-3; 3\right)$?

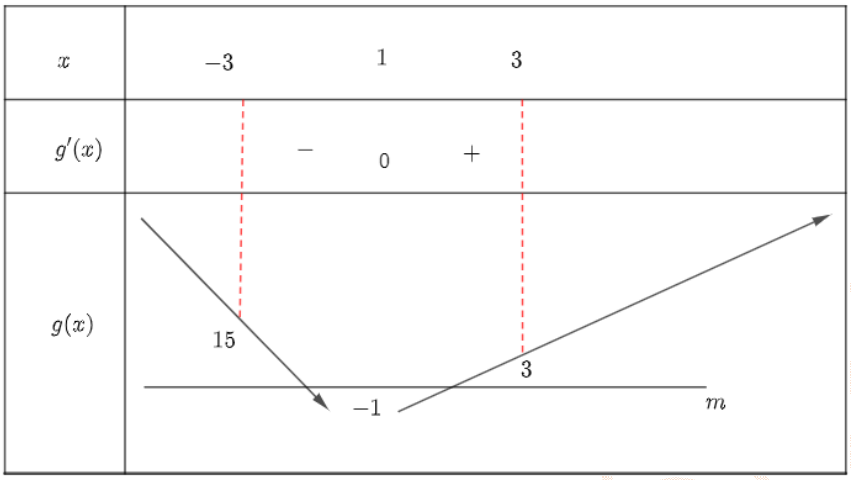
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx - \frac{7}{5}$ có $y' = x^2 - 2x - m$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = m$.

Để hàm số luôn có hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(-3; 3\right)$ thì phương trình $x^2 - 2x = m$ có hai nghiệm thuộc $\left(-3; 3\right)$, đặt $g\left(x\right) = x^2 - 2x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:



Suy ra $-1 < m < 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022;2022)$ để hàm số $y = \left|x^3 + (2m+1)x - 2\right|$ đồng biến trên $(1;3)$?

A. 4034. **B.** 2022. **C.** 4030. **D.** 4032.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (2m+1)x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 2m + 1$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1;3)$ khi và chỉ khi xảy ra 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;3)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

TH2: Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$ và $f(1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -27 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -14.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta có $m \leq -14$ hoặc $m \geq 0$.

Mà $m \in (-2022;2022)$ nên có 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5: Số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ của m để hàm số $f(x)=8^{x^2}-3\cdot 4^{x^2+1}-m.2^{x^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};1\right)$ là

A. 1988. **B.** 1990. **C.** 1986. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $f(x)=8^{x^2}-3\cdot 4^{x^2+1}-m.2^{x^2}=\left(2^{x^2}\right)^3-12\cdot\left(2^{x^2}\right)^2-m.2^{x^2}$.

Suy ra: $f'(x)=2x\ln 2\left(3.8^{x^2}-6.4^{x^2}-m.2^{x^2}\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3.8^{x^2}-6.4^{x^2}-m.2^{x^2}=0\quad(*)\end{array}\right.$

ĐK cần: Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};1\right)$ thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm $x=0$

$\Rightarrow 3.8^0-6.4^0-m=0\Leftrightarrow m=-3$.

ĐK đủ: Với $m=-3\Rightarrow f'(x)=2x\ln 2\left(3.8^{x^2}-6.4^{x^2}+3.2^{x^2}\right)$

$$=6x.2^{x^2}.\ln 2.\left(2^{x^2}-1\right)^2$$

Suy ra $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm $x=0$. Do đó hàm số không đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$

KL: Không tồn tại giá trị của m để yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-2mx+x-m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned}&f(x)=x^3-2mx+x-m\\&\Rightarrow g(x)=f(1-2x)=(1-2x)^3-2m(1-2x)+(1-2x)-m\\&\Rightarrow g(x)=-8x^3+12x^2+4(m-2)x+2-3m\\&\Rightarrow g'(x)=-24x^2+24x+4(m-2)\end{aligned}.$$

Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$

$\Leftrightarrow g'(x) \le 0; \forall x \in (-2;3)$

$\Leftrightarrow -24x^2 + 24x + 4(m-2) \le 0; \forall x \in (-2;3)$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 2 \ge m; \forall x \in (-2;3)$

$\Leftrightarrow 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \ge m; \forall x \in (-2;3)$

$do: \begin{cases} 6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}; \forall x \in (-2;3) \\ 6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ khi\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Nên $6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$ suy ra $m \le \frac{1}{2}$

Mà m nguyên dương.

Vậy không số nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx$ với m là tham số thực. Số các giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + m$ và $g'(x) = 2x.f'(x^2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow 2x.f'(x^2) \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow f'(x^2) \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow f'(t) \ge 0, \forall t > 0$ (đặt $t = x^2$)

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + m \ge 0, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow m \ge -t^2 + 4t, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow m \ge 4$ (vì $-t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4 \le 4, \forall t > 0$).

Vì $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = (m+2)x^4 + (2m-1)x^2 + 2024$. Số các giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ là

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên $(-2;0) \Leftrightarrow f'(x) = 4(m+2)x^3 + 2(2m-1)x \ge 0 \quad \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow 2(m+2)x^2 + (2m-1) \le 0 \quad \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow 2m \le \frac{1-4x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow 2m \le \frac{1-4t}{1+t} \quad \forall t \in (0;4)$ (*)

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{1-4t}{1+t}$ $t\in(0;4)$; có $g'(t)=\dfrac{-5}{(1+t)^2}<0\quad \forall t\in(0;4)$

Vậy (*) nghiệm đúng với mọi $t\in(0;4)\Leftrightarrow 2m\le -3\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{2}$.

Mặt khác $m\in[-10;10]$ và m là số nguyên nên $m\in\{-10;-9;...;-3;-2\}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=m^2x^4-2(m+2024)x^2+9$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 46. **B.** 45. **C.** 44. **D.** 47.

Lời giải

+) TH1: $m=0$

Hàm số đã cho trở thành: $y=-4048x^2+9$. Dễ thấy hàm số này đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$\Rightarrow$ Giá trị $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) TH2: $m\ne 0$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 4m^2x^3-4(m+2024)x=0$

$\Leftrightarrow 4x\left[m^2x^2-(m+2024)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{m+2024}{m^2} \end{array}\right. \quad (1)$$

- TH2.1: $m\le -2024$. Khi đó (1) có một nghiệm bội lẻ $x=0$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số không nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$\Rightarrow m\le -2024$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- TH2.2: $m>-2024$. Khi đó (1) có ba nghiệm bội lẻ $x\in\left\{-\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}};0;\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}}\right\}$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}}$		0		$\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi

$(1;2)\subset\left(0;\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{m+2024}{m^2}}\ge 2\Leftrightarrow\dfrac{m+2024}{m^2}\ge 4$

$\Leftrightarrow m+2024\ge 4m^2\Rightarrow -22,4\le m\le 22,6$ (đã làm tròn).

Kết hợp điều kiện, ta được $m\in\{-22;-21;...;-2;-1;1;2;...;21;22\}$

Từ TH1 và TH2, ta được $m\in\{-22;-21;...;-2;-1;0;1;2;...;21;22\}$.

Vậy có 45 giá trị m thỏa đề.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm tích các phần tử của S.

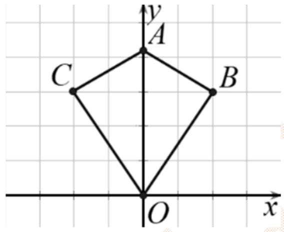
A. 2. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{1}{5}$. **D.** -2.

Lời giải

Để hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị thì $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\\x=-m\end{array}\right.,(m\neq 0)$

Ba điểm cực trị là $A\left(0;m^4+5\right),B(m;5),C(-m;5)$.



Ba điểm A,B,C và gốc tọa độ $O(0;0)$ tạo thành tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$ $\Leftrightarrow\widehat{B}=\widehat{C}=\frac{\pi}{2}$, (do $\widehat{B}=\widehat{C}$) $\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=0\Leftrightarrow m^2-5m^4=0\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{5}$. Vậy S có 2 phần tử và có tích bằng $-\frac{1}{5}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]}y=3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $-1<m\leq 3$. **B.** $4\leq m<6$. **C.** $m>6$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\frac{-1-m}{(x-1)^2},\forall x\neq 1$

- Nếu $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$ thì $y'>0,\forall x\neq 1$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[2;5]$.

Do đó $\min\limits_{[2;5]}y=y(2)=\frac{2+m}{2-1}=m+2$.

Suy ra $m+2=3\Leftrightarrow m=1$ (không thỏa mãn vì $m<-1$).

- Nếu $-1-m<0\Leftrightarrow m>-1$ thì $y'<0,\forall x\neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[2;5]$.

Do đó $\min\limits_{[2;5]}y=y(5)=\frac{5+m}{5-1}=\frac{m+5}{4}$.

Suy ra $\frac{m+5}{4}=3\Leftrightarrow m=7$ (thỏa mãn vì $m>-1$).

Vậy $m=7$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $S=5a+4b$.

A. -29. **B.** 9. **C.** -9. **D.** 29.

Lời giải

Ta có $y' = f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0\,;y_0) \in (C)$, $(x_0 \neq 1)$ có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Hệ số góc tiếp tuyến: $k = f'(x_0) = \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x_0-1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất mà x_0 là số nguyên dương khác 1 nên $x_0 = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$.

Vậy $\begin{cases} a = -3 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow S = 5.(-3) + 4.11 = 29$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 18}{3x + 2m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\,7)$?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện: $3x + 2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{-2m+1}{3}$.

$$y' = \frac{(m+1)(2m-1) - 54}{(3x+2m-1)^2} = \frac{2m^2 + m - 55}{(3x+2m-1)^2}$$

Hàm số $y = \dfrac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\,7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 55 < 0 \\ \dfrac{-2m+1}{3} \notin (3;7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{11}{2} < m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-2m+1}{3} \leq 3 \\ \dfrac{-2m+1}{3} \geq 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{11}{2} < m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq -4 \\ m \leq -10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 5$$

Mà $m \in (-10;10)$, m nguyên nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(m+1)\sqrt{-2x+3}-1}{-\sqrt{-2x+3}+\dfrac{2}{m}}$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ là $(-\infty;a)\cup(b;c]\cup[d;+\infty)$. Giá trị của biểu thức $a-b+c-d$ bằng.

A. -3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{-2x+3}$ với $x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ suy ra $t\in(1;2)$.

Ta có $t'_x=\dfrac{-1}{\sqrt{-2x+3}}<0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$

Điều kiện: $\sqrt{-2x+3}\neq\dfrac{2}{m}\Leftrightarrow t\neq\dfrac{2}{m}$

Để hàm số $f(x)=\dfrac{(m+1)\sqrt{-2x+3}-1}{-\sqrt{-2x+3}+\dfrac{2}{m}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ thì hàm số

$g(t)=\dfrac{(m+1)t-1}{-t+\dfrac{2}{m}}$ đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2(m+1)}{m}-1>0\\ \dfrac{2}{m}\notin(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m+2}{m}>0\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{m}\le 1\\ \dfrac{2}{m}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m+2}{m}>0\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2-m}{m}\le 0\\ \dfrac{2-2m}{m}\ge 0\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m<0\\ 0<m\le 1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(0;1]\cup[2;+\infty)$.

Vậy $a-b+c-d=-2-0+1-2=-3$.

Câu 15: Tìm tập các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{\ln x-m}{m\ln x-4}$ đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=\ln x$, $x\in(e;+\infty)\Rightarrow t\in(1;+\infty)$ và $y_t=\dfrac{t-m}{mt-4}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y'_x=\frac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\frac{1}{x}\right)>0,\quad \forall x\in(e;+\infty),\ \forall t\in(1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+m^2}{(mt-4)^2}>0,\ \forall t\in(1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4+m^2>0\\ m\neq\dfrac{4}{t}\end{cases},\ \forall t\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\notin(0;4)\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 4\\ m<-2\end{array}\right..$$

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2.   **B.** 4.   **C.** 3.   **D.** 1.

Lời giải

Điều kiện $\ln x-3m\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{3}\ln x$.

Do $x\in(1;e)$ nên $\ln x\in(0;1)\Rightarrow m\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{\frac{1}{x}(6-3m)}{(\ln x-3m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $y'>0$ với mọi $x\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}(6-3m)}{(\ln x-3m)^2}>0\Leftrightarrow 6-3m>0\Leftrightarrow m<2.$$

Do m là số nguyên dương nên $m=1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+m}{x-1}$, (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có hai cực trị a,b thỏa mãn $a^2+b^2=10$.

A. $m=-3$.   **B.** $m=2$.   **C.** $m=\dfrac{7}{2}$.   **D.** $m=1$

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-m-1}{(x-1)^2}$, $(x\neq 1)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $f(x)=x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m+2>0\\ f(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=2x+1$

Gọi x_1,x_2 là hoành độ hai điểm cực trị.

Áp dụng định lí Vi – ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1.x_2=-m-1\end{cases}$

Theo đề bài $a^2+b^2=10 \Leftrightarrow (2x_1+1)^2+(2x_2+1)^2=10$

$$\Leftrightarrow 4(x_1^2+x_2^2)+4(x_1+x_2)+2=42$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1+x_2)^2-8x_1x_2+4(x_1+x_2)-40=0$$

$$\Leftrightarrow 16-8(-m-1)+8-40=0$$

$$\Leftrightarrow m=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy $m=1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$. Biết rằng điểm M thuộc nhánh bên phải tiệm cận đứng của (C). Tìm x_0 để điểm M ở gần điểm $I(-1;-1)$ nhất.

A. $x_0=1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **B.** $x_0=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$. **C.** $x_0=1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **D.** $x_0=-1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Lời giải

$M\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;x_0+\dfrac{1}{x_0+1}\right)$ với $x_0>-1$.

$$IM^2=(x_0+1)^2+\left(x_0+1+\frac{1}{x_0+1}\right)^2=2(x_0+1)^2+\frac{1}{(x_0+1)^2}+2\ge 2\sqrt{2}+2.$$

IM ngắn nhất $\Leftrightarrow 2(x_0+1)^2=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$

(do $x_0>-1$ vì M nằm trên nhánh phải của đồ thị (C)).

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+4x+m+1}{4x+m}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(2;4)$?

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-m}{4}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-4x^2-2mx-4}{(4x+m)^2}$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow -4x^2-2mx-4=0\Leftrightarrow 2x^2+mx+2=0$. (1)

Để hàm số $y=\dfrac{-x^2+4x+m+1}{4x+m}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(2;4)$ thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt và chỉ một nghiệm thuộc $(2;4)$.

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta=m^2-16>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-4 \end{array}\right.$ (*)

Ta có $2x^2+mx+2=0 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{2}{x}=-m, \forall x\in(2;4)$.

Xét hàm $g(x)=2x+\dfrac{2}{x} \Rightarrow g'(x)=2-\dfrac{2}{x^2}>0, \forall x\in(2;4)$;

BBT hàm *g(x)* trên $(2;4)$.

x	2		4
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	5	$\nearrow$	$8,5$

Từ BBT suy ra (1) chỉ một nghiệm thuộc $(2;4)$ khi $5<m<8,5$. Kết hợp điều kiện (*)

Suy ra $m\in\{6;7;8\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của *m*.

Câu 20: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m>1$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\geq\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x=t$. Ta có $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t\in(0;1)$. Vì hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(t)=\dfrac{2t-1}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow y'=\dfrac{-2m+1}{(t-m)^2}<0$, $\forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+1<0\\ m\notin(0;1)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1.$$

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2026. **D.** 2023.

Lời giải

Đặt $t=\cot x$. Ta có $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;\,1)$, $t=\cot x$ là hàm nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;\,1)$.

Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(t)\ge 0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2mt+1\ge 0,\forall t\in(0;1) \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{t^2+1}{2t},\forall t\in(0;1) \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \quad (*).$$

Xét hàm số $y=g(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Khi đó $g'(t)=\dfrac{t^2-1}{2t^2}<0,\forall t\in(0;1)$ nên hàm số $y=g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} m\le g(1) \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2026 giá trị của m thoả mãn.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=(m-x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\ 1)$.

A. $m<1$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m\ge -2$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D=(-\infty;\ 1]$.

+ $y'=-3x^2\sqrt{1-x^3}-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.(m-x^3)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}(3x^3-m-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} \end{array}\right.$.

* Trường hợp 1: $m=-2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD, ta có $y'>0,\ \forall x\in(0;\ 1)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;\ 1)$.

Suy ra $m=-2$ thỏa mãn.

* Trường hợp 2: $m\ne -2$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;\ 1)$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}}<0\Leftrightarrow m<-2$.

Vậy $m\le -2$ thì hàm số đồng biến trên $(0;\ 1)$.

Câu 23: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;8]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=x-4\sqrt{x+m}$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Điều kiện $x+m\ge 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\ge 0$.

Với điều kiện trên, ta có $y'=\left(x-4\sqrt{x+m}\right)'=1-\dfrac{2}{\sqrt{x+m}}$.

Để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $y'\le 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow 1-\dfrac{2}{\sqrt{x+m}}\le 0;\forall x\in(0;2)$. Hay $\sqrt{x+m}\le 2;\forall x\in(0;2)$ (*).

Vì hàm số $f(x)=\sqrt{x+m}$ đồng biến trên $(0;2)$ nên $(*)\Leftrightarrow\sqrt{2+m}\le 2\Leftrightarrow m\le 2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m là 0; 1; 2.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=\log_2\left(3x^2-6(2m+1)x+12m+5\right)$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $3x^2-6(2m+1)x+12m+5>0$

$$y'=\frac{6x-6(2m+1)}{\ln 2\left(3x^2-6(2m+1)x+12m+5\right)}.$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $(2,5)$ thì

$$\begin{cases}3x^2-6(2m+1)x+12m+5>0,\forall x\in(2;5)\\ y'\ge 0,\forall x\in(2;5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-6(2m+1)x+12m+5>0,\forall x\in(2;5)\\ 6x-6(2m+1)\ge 0,x\in(2;5)\end{cases}$$

+) $3x^2-6(2m+1)x+12m+5>0,\forall x\in(2;5)\Leftrightarrow m<\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)},\forall x\in(2;5)$

Đặt $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)},x\in(2;5)$, ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2-6x+1}{12(x-1)^2}>0,\forall x\in(2,5)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(2,5)$ nên $m\le\dfrac{5}{12}$ (1).

+) $6x-6(2m+1)\ge 0,x\in(2;5)\Leftrightarrow m\le\dfrac{x-1}{2},\forall x\in(2,5)$. Mà $\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{2}<2,\forall x\in(2,5)$ nên $m\le\dfrac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m\le\dfrac{5}{12}$. Do m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...,0\}$. Vậy có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 25: Cho hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{e^{2x}-(3m-2)e^x+2024m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 6 .   **B.** 5.   **C.** 4 .   **D.** 7 .

Lời giải

Ta có $y'=\left(\frac{1}{2}\right)^{e^{2x}-(3m-2)e^x+2024m}.\ln\left(\frac{1}{2}\right).\left[e^{2x}-(3m-2)e^x+2024m\right]'$

$\Rightarrow y'=\left(\frac{1}{2}\right)^{e^{2x}-(3m-2)e^x+2024m}.\ln\left(\frac{1}{2}\right).\left[2e^{2x}-(3m-2)e^x\right].$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0\forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-(3m-2)e^x\le 0\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2e^{2x}+2e^x}{3e^x}\le m\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(e^x+1)}{3}\le m\ \forall x\in(1;2)\ (*)$

Đặt $g(x)=\dfrac{2(e^x+1)}{3}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{2e^x}{3}>0\forall x\in(1;2)$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow m\ge g(2)=\dfrac{2(e^2+1)}{3}\approx 5,59$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 5 giá trị của tham số m thoả mãn bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g(x)=e^{f(2x+m)}$. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;3)$.

A. 4041.   **B.** 2018.   **C.** 2025.   **D.** 4043

Lời giải

Ta có $g'(x)=\left(f(2x+m)\right)'.e^{f(2x+m)}=2.f'(2x+m).e^{f(2x+m)}$.

Nhận xét: $2.e^{f(2x+m)}>0$ do đó $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+m=-1\\2x+m=2\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-m}{2}=x_1\\x=\dfrac{2-m}{2}=x_2\end{array}\right..$$

Khi đó: $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$. Vậy để hàm số đồng biến trên $(1;3)$ thì

TH1: $3\le x_1$ hay $\dfrac{-1-m}{2}\ge 3 \Leftrightarrow m\le -7$

TH2: $1\ge x_2$ hay $\dfrac{2-m}{2}\le 1 \Leftrightarrow m\ge 0$

Vì m nguyên và $m\in[-2024;2024]$ nên có: 4043 số thỏa mãn bài toán.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương $m<2024$ để hàm số $g(x)=f(-x^2-2x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2013. **D.** 2016.

Lời giải

Ta có $g'(x)=(-x^2-2x+m)'\,f'(-x^2-2x+m)=-2(x+1)f'(-x^2-2x+m)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi $g'(x)\le 0,\forall x\in(2;3)$

$\Leftrightarrow -2(x+1)f'(-x^2-2x+m)\le 0,\forall x\in(2;3)$

$\Leftrightarrow f'(-x^2-2x+m)\ge 0,\forall x\in(2;3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -x^2-2x+m\le 0 & (1)\\ -x^2-2x+m\ge 3 & (2)\end{array}\right.,\forall x\in(2;3)\,(*)$

Xét hàm số $y=-x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

x	2		3
y	$m-8$	$\searrow$	$m-15$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

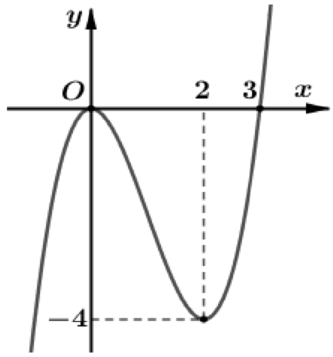
$(1)\Leftrightarrow -x^2-2x+m\le 0,\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow m-8\le 0\Leftrightarrow m\le 8$.

$(2)\Leftrightarrow -x^2-2x+m\ge 3,\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow m-15\ge 3\Leftrightarrow m\ge 18$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 8\\ m\ge 18\end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương và $m < 2024$, nên ta có $(8-1+1)+(2023-18+1)=2014$ giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(x^2-x)$ có bao nhiêu cực trị



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Từ đồ thị $f(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=(2x-1)f'(x^2-x)$

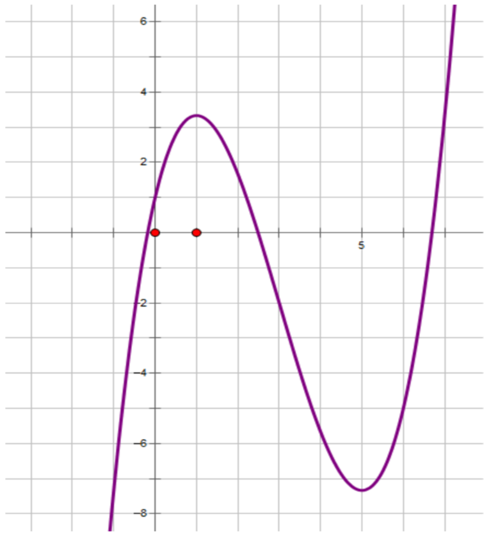
Do đó: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=0 \\ x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Suy ra bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $g(x)$ có 5 giá trị cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới đây. Hàm số $g(x)=f(x^2+3x+1)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-4;-3)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=(2x+3).f'(x^2+3x+1)$

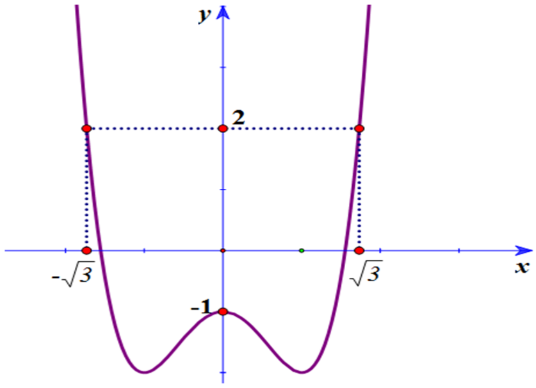
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+3=0\\ f'(x^2+3x+1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\ x^2+3x+1=5\\ x^2+3x+1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\ x=1\\ x=-4\\ x=-3\\ x=0\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-3		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
	$+\infty$	↘	f(-4)	↗	f(-3)	↘	f($-\frac{3}{2}$)	↗	f(0)	↘	f(1)	↗	$+\infty$

Chọn A.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=3f(2x+1)-8x^3-12x^2+2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng:

A. $3f(-1)-2$.   **B.** $3f(0)$.   **C.** $3f(3)-18$.   **D.** $3f(\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D

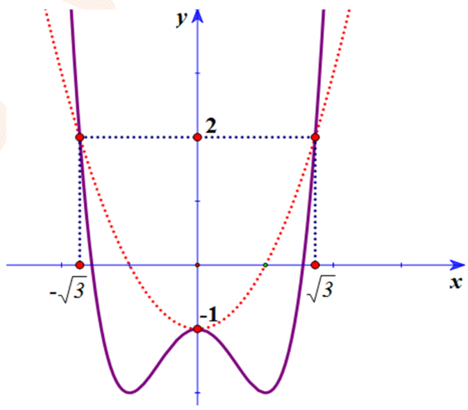
Ta có: $g(x)=3f(2x+1)-8x^3-12x^2+2=3f(2x+1)-(2x+1)^3+3(2x+1).=$

Đặt $t=2x+1$, $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-1;3]$. Khi đó: $g(t)=3f(t)-t^3+3t$.

Suy ra: $g'(t)=3f'(t)-3t^2+3=3\left(f'(t)-t^2+1\right)$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow 3f'(t)-3t^2+3=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2-1$.

Ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y=x^2-1$ (nét đứt) chung hệ trục với hàm $f'(x)$ như sau:



$g'(t)=0\Leftrightarrow t=-\sqrt{3}\vee t=0\vee t=\sqrt{3}$

Bảng biến thiên của $g(t)$ trên đoạn $[-1;3]$

t	-1		0		$\sqrt{3}$		3
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	↘				$3f(\sqrt{3})$	↗	

Nhìn vào bảng biến thiên ta có: GTNN của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng GTNN của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-1;3]$ và bằng $3f(\sqrt{3})$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

A. 8. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{5}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{5x^2-2mx+5}{(5x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y'\le 0,\forall x\in(1;4)$.

tức là $\begin{cases}5x^2-2mx+5\le 0,\forall x\in(1;4)\\ x\ne\dfrac{m}{5},\forall x\in(1;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{5x^2+5}{2x},\forall x\in(1;4)\ \left(Do\ 2x>0,\forall x\in(1;4)\right)\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{5}\le 1\\ \dfrac{m}{5}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{5x^2+5}{2x},\forall x\in[1;4]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{5x^2-5}{2x^2}>0,\forall x\in[1;4]$. Hàm số đồng biến trên $(1;4)$.

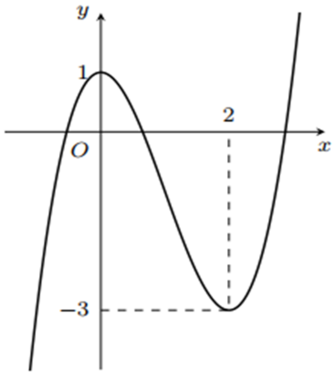
Suy ra $\underset{x\in[1;4]}{Max}\,g(x)=g(4)=\dfrac{85}{8}$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} m \geq \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \leq 1 \\ \dfrac{m}{5} \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{85}{8} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 5 \\ m \geq 20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 20$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2;25]$ nên $m \in \{20;21;22;23;24;25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?



A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x + m) f'(x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m)$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m) = +\infty$ nên $f'(x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m) > 0$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$. Do đó $g'(x) \geq 0$ tương đương

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0 \\ f'(x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m) \geq 0 \end{cases} (\forall x > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 + mx + 8 - m \geq 2 \end{cases} (\forall x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x \\ m(x-1) \geq -x^3 + 3x^2 - 6 \end{cases} (\forall x > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x \quad (\forall x > 0) \\ \begin{cases} m \geq \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 6}{x-1} (x > 1) \\ m \leq \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 6}{x-1} (x < 1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ \begin{cases} m \geq -1{,}76 \\ m \leq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6.$$

Vậy có 4 số nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để ứng với mỗi m hàm số hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. 4046 **B.** 2022 **C.** 2026 **D.** 2023

Lời giải

Đặt $t=\cos x$. Do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$. Nhận thấy hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta phát biểu lại bài toán như sau: Tìm m để hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Ycbt thỏa mãn khi $y'<0\ \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{-m+2}{(t-m)^2}<0\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2<0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>2\\ \left[\begin{array}{l}m\in(-\infty;0]\\ m\in[1;+\infty)\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m>2$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2022 giá trị của m thỏa mãn ycđb

Câu 34: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Lời giải

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

Theo đề $m>0$ nên $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-\sqrt{m},x=0,x=\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow\sqrt{m}\le 3\Leftrightarrow m\le 9$

Vì m nguyên dương nên $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\dfrac{9}{2}(1+9)=45$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A. $m>-8$. **B.** $m\le -8$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Ta có: $y'=(3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow(3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+m\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+2x,\ \forall x\in(1;2)$

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+2x$, với $x\in(1;2)$.

Ta có: $f'(x)=-6x+2$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	1		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-8

Từ BBT ta có $m \ge f(x)$, $\forall x \in (1;2)$ khi $m \ge -1$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $m \le 12$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge 12$.

Lời giải

$y'=3x^2-12x+m$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$, với mọi $x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge -3x^2+12x$, $\forall x>0$.

Xét $f(x)=-3x^2+12x$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=-6x+12$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \ge 12$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 154.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=3(m-1)x^2+2(m-1)x+2m+1$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

(Dấu "$=$" xảy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

TH1: $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Ta có : $f'(x)=3>0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m=1$ (nhận).

TH2 : $m \ne 1$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)>0 \\ (m-1)^2-3(m-1)(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m-1)(-5m-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m \le -\dfrac{4}{5} \vee m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$$

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow m \ge 1 \xrightarrow{m \in [-100;100]} m \in \{1;2;..;100\}$: có 100 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. 3 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'<0,\forall x\in(10;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\notin(10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{6}{5}\\m\ge -2\end{cases}$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 39: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-9}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $(-3;0]$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $[-3;0)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+9}{(x-m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+9>0\\m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\le 0$.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-m+5}{2x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 24. **B.** 2. **C.** 20. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+2mx-10}{(2x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(1;3)$.

tức là $\begin{cases}-2x^2+2mx-10\ge 0,\forall x\in(1;3)\\x\ne\dfrac{m}{2},\forall x\in(1;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{x^2+5}{x},\forall x\in(1;3)\ (Do\ x>0,\forall x\in(1;3))\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le 1\\\dfrac{m}{2}\ge 3\end{array}\right.\end{cases}$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{x},\forall x\in\left[1;3\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{x^2-5}{x^2}$. $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.\left(x\ne0\right)$.

Bảng biến thiên

x	1		$\sqrt{5}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\dfrac{14}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\left\{\begin{array}{l}m\ge\dfrac{x^2+5}{x},\forall x\in\left(1;3\right)\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le1\\\dfrac{m}{2}\ge3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge6\\\left[\begin{array}{l}m\le2\\m\ge6\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge6$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $\left[1;25\right]$ nên $m\in\left\{6;7;8;9;10;....;25\right\}$.

Vậy có 20 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[1;25\right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3\left(2m+1\right)x^2+\left(12m+5\right)x+2$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi $y'\ge0$, $\forall x\in\left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5\ge0$, $\forall x\in\left(2;+\infty\right)$.

$3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5\ge0 \Leftrightarrow m\le\dfrac{3x^2-6x+5}{12\left(x-1\right)}$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12\left(x-1\right)}$ với $x\in\left(2;+\infty\right)$.

$g'\left(x\right)=\dfrac{3x^2-6x+1}{12\left(x-1\right)^2}>0$ với $\forall x\in\left(2;+\infty\right)$ $\Rightarrow$ hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Do đó $m\le g\left(x\right),\forall x\in\left(2;+\infty\right)$ $\Rightarrow m\le g\left(2\right)$ $\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{mx-6m+5}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;7\right)$.

A. 1027. **B.** 4045. **C.** 4043. **D.** 2025.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+6m-5}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;7)$ thì $y'<0,\forall x\in(2;7)$.

tức là $\begin{cases}-m^2+6m-5<0\\ x\neq m,\forall x\in(2;7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\le 2\\ m\ge 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup[7;+\infty)$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên $m\in\{-2024;-2023;...;0\}\cup\{7;8;9;...;2024\}$.

Vậy có 4043 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: **(Đề TK BGD 2024)** Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\frac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{17}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=1,x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$ ta có phương trình $\int_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{2}{5}$

$$\Leftrightarrow a\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{2}{5}\Leftrightarrow a=3\Rightarrow f(x)=3x^4-6x^2+\frac{12}{5}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(3x^4-6x^2+\frac{12}{5}\right)dx=1$$

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 41

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0)$ có đồ thị (C). Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ. Biết hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) lần lượt là -1; 1; 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 6. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

Câu 2: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(2;-1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Câu 3: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(2;1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Câu 4: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln3$. **B.** $\ln2$. **C.** $\ln15$. **D.** $3\ln2$.

Câu 6: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\frac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** 1. **D.** $\frac{94}{30}$.

Câu 7: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(-2;\frac{27}{7}\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=-2,x=0$ có diện tích bằng $\frac{16}{15}$, tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $\frac{362}{105}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Câu 8: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{20}\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ có diện tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{60}$, tích phân $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{24}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Câu 9: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(\sqrt{2};-\frac{2}{3}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=\sqrt{2}$ có diện tích bằng $\frac{2\sqrt{2}}{15}$, tích phân $\int_0^{\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $-\frac{2\sqrt{2}}{15}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là -2, -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{500}{81}$. **B.** $\frac{36}{5}$. **C.** $\frac{2932}{405}$. **D.** $\frac{2948}{405}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2=f(x).e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(4)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(60;62)$. **B.** $(55;58)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(70;72)$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$, có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ và $f(0)=2024$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=2025$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4049+5\ln 2$. **B.** $-4049+5\ln 2$. **C.** $4049-5\ln 2$. **D.** $-4049-5\ln 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $\left[f'(x)\right]^2+f''(x).f(x)+4=0,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$. Tính $f(1)$.

A. 20. **B.** 100. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)-f'(x)=3x(2x-5)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=-1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)-f(x)=(2x+3)e^x$ và $f(0)=5$ Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $f(x)=3e^x$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0)=f'(0)=0, f''(x)-(2x+1)e^x=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e^4$. **C.** $2e^2$. **D.** e^4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=2\sqrt{2}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 0.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)-(x+3)f'(x)=2xf^2(x), \forall x\in[1;3]$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. $1+\ln 3$. **B.** $2-\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1-\ln 3$.

Câu 19: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Với số thực $a>0$, giả sử rằng mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x)f(a-x)=1$. Tính $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\ln(1+a)$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)>-1$, $f(0)=0$, và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 7. **D.** 9

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thoả mãn đồng thời các điều kiện $f(1)=-\frac{1}{2}$ và $f(x)+xf'(x)=(2x^3+x^2)f^2(x)$, $\forall x\in[1;2]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox, $x=1$, $x=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<S<\frac{1}{2}$. **B.** $2<S<3$. **C.** $1<S<\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<S<1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=4$ là 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(\int\limits_0^2 f(x)dx\right)^2-4\int\limits_2^4 f(x)dx$.

A. -36. **B.** 28. **C.** -32. **D.** -24.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(x)+2=\frac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 (x+t)f(t)\mathrm{d}t$ với $\forall x\in[-1;1]$. Khi đó $I=\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

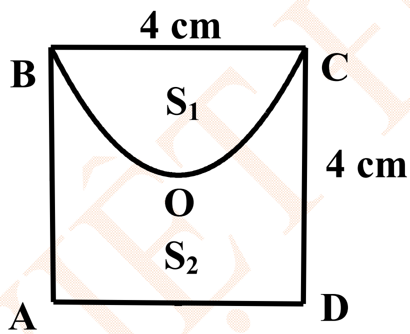
Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(2;4)$, thỏa mãn $f(3)=\frac{1}{e^2}$ và $f^3(x)+e^{-2x}=3e^{-x}\sqrt{f(x)}.f'(x),\ \forall x\in(2;4)$. Khi đó $f\left(\frac{5}{2}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 26: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).



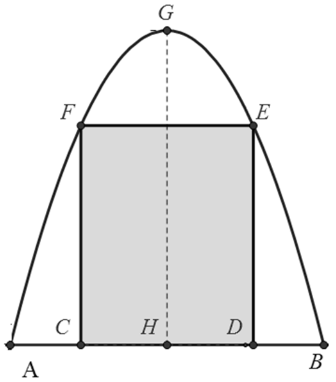
Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 27: Một sân chơi dành riêng cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 50m và chiều rộng 30m, người ta làm một con đường trong sân (như hình vẽ). Biết viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó (số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

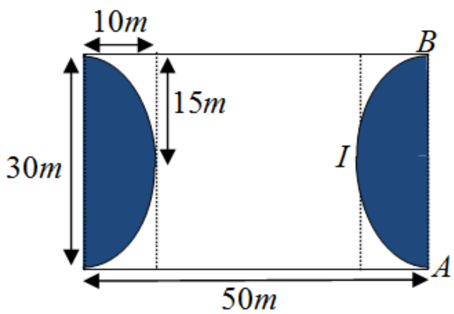
A. 119.000.000 đồng. **B.** 152.000.000 đồng. **C.** 119.320.000 đồng. **D.** 125.520.000 đồng.

Câu 28: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



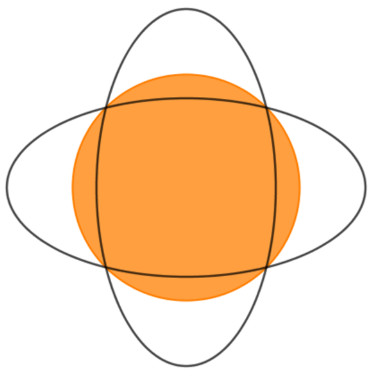
A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Câu 29: Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30m và chiều dài $50\,\text{m}$. Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ. Phần tô màu gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I. Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/ m^2 và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90 nghìn đồng/ m^2. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?



A. 165 triệu đồng. **B.** 151 triệu đồng. **C.** 195 triệu đồng. **D.** 135 triệu đồng.

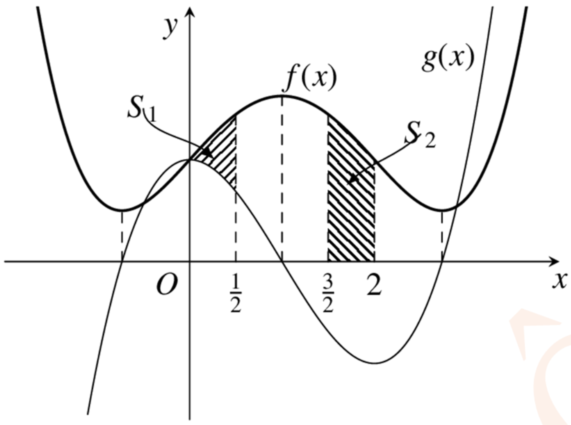
Câu 30: Hướng tới kỉ niệm 50 năm thành lập trường THPT X. Học sinh lớp 12T thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng $8m$ và độ dài trục nhỏ bằng $4m$ đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này và trục nhỏ của Elip kia cùng nằm trên một đường thẳng (như hình vẽ).



Phần diện tích (tô màu) nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa (không tô màu) được giới hạn bởi đường tròn và đường Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là 300.000 đồng$/1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là 200.000 đồng$/1m^2$. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau:

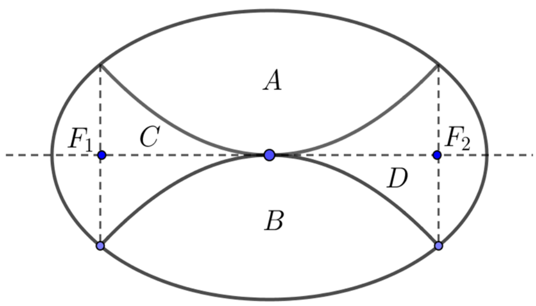
A. 6.800.000 đồng. **B.** 8.900.000 đồng. **C.** 8.600.000 đồng. **D.** 6.900.000 đồng.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=ax^4-x^3+2x+2$ và hàm số $g(x)=bx^3+cx^2+2$, có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S_1;S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_2=\dfrac{791}{640}$. Khi đó S_1 bằng



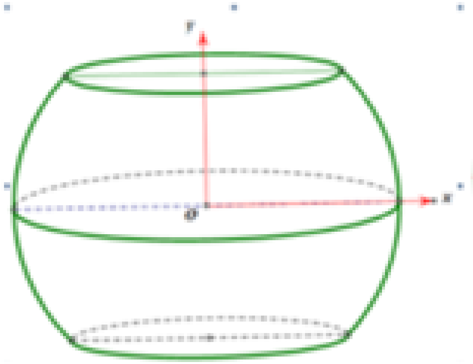
A. $\dfrac{231}{640}$. **B.** $\dfrac{271}{320}$. **C.** $\dfrac{571}{640}$. **D.** $\dfrac{221}{640}$.

Câu 32: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 270.000 đ và 140.000 đ. Tính tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



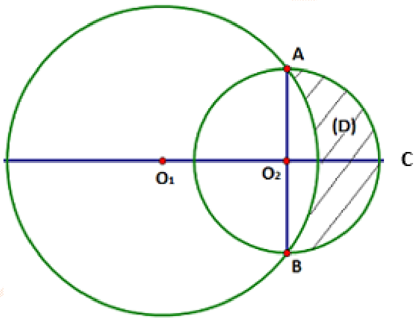
A. 5.676.000 đ. **B.** 5.997.000 đ. **C.** 5.996.000 đ. **D.** 5.677.000 đ.

Câu 33: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



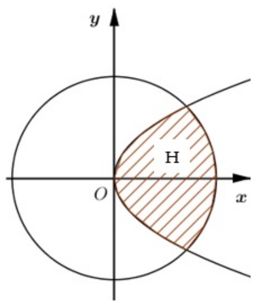
A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$. **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$. **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$.

Câu 34: Cho hai đường tròn $\left(O_1;10\right)$ và $\left(O_2;6\right)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $\left(O_2;6\right)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



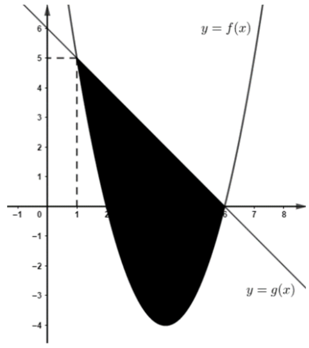
A. $V=36\pi$ **B.** $V=\frac{68\pi}{3}$ **C.** $V=\frac{320}{3}$ **D.** $V=\frac{320\pi}{3}$

Câu 35: Cho hình H giới hạn bởi các đường $y^2=2x$ và $x^2+y^2=8$ (phần gạch sọc trong hình). Khối tròn xoay khi quay H xung quanh trục Ox có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{2\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$. **B.** $\frac{4\pi\left(13-8\sqrt{2}\right)}{3}$. **C.** $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3}-8\right)\pi$. **D.** $\frac{4\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$.

Câu 36: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=f(x)=x^2-8x+12$ và $y=g(x)=-x+6$ (phần tô đậm trong hình). Khối tròn xoay tạo thành khi quay H xung quanh trục hoành có thể tích bằng bao nhiêu?

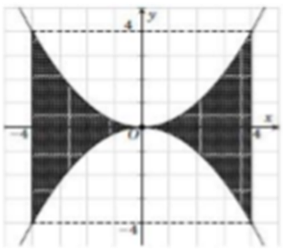


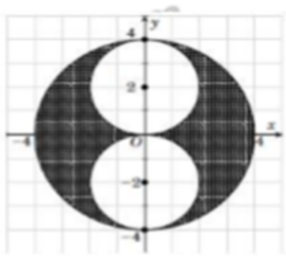
A. $\frac{216\pi}{5}$. **B.** $\frac{949\pi}{15}$. **C.** $\frac{817\pi}{15}$. **D.** $\frac{836\pi}{15}$.

Câu 37: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{2\pi}{15}$ **D.** $\frac{4\pi}{15}$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{4}; y=-\frac{x^2}{4}; x=-4; x=4$ và (H_2) là hình gồm tất cả các điểm $(x;y)$ thỏa $x^2+y^2 \le 16; x^2+(y-2)^2 \ge 4; x^2+(y+2)^2 \ge 4.$





Cho (H_1) và (H_2) quanh quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1=\frac{1}{2}V_2$ **B.** $V_1=V_2$ **C.** $V_1=\frac{2}{3}V_2$ **D.** $V_1=2V_2$

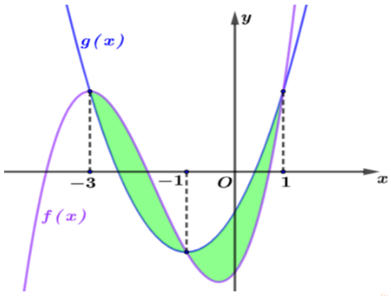
Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh Ox bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, trục tung và đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}$.

A. $\frac{\pi^2}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{12}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x \ne 0$ thỏa mãn: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ với $x \ne 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh Ox bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, và hai đường thẳng $x=1; x=2$.

A. $\dfrac{\pi^2}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

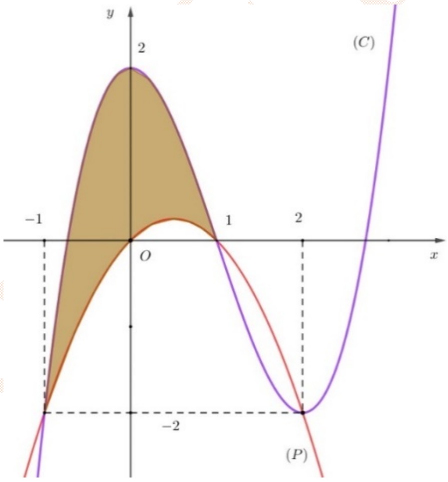
Câu 41: Cho hai hàm số $f(x)=mx^3+nx^2+px-\dfrac{5}{2}(m,n,p\in\mathbb{R})$ và $g(x)=x^2+2x-1$ có đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ bằng

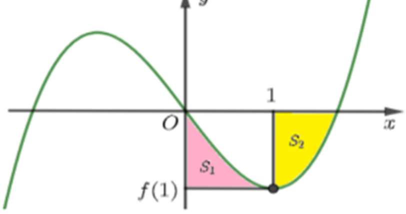
A. $\dfrac{18}{5}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 42: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-b$.



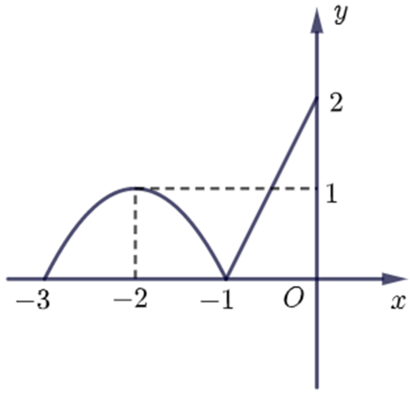
A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 25.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $[f(x)+1]$ và $[f(x)-1]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2+8S_1$



A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** 4. **D.** 9.

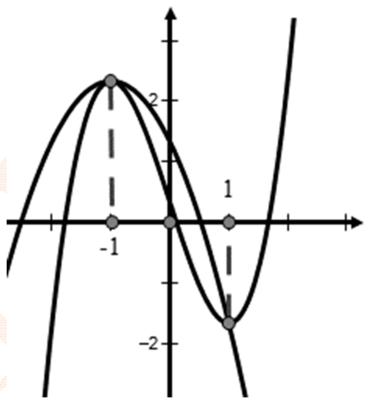
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;0]$ như hình vẽ sau (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Cho $\int_{e^{-3}}^{1}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$, giá trị $f(0)$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{7}{9}$. **C.** 2. **D.** $\frac{14}{9}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ. Biết hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) lần lượt là $-1;\ 1;\ 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 6. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

Lời giải

Vì hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $g(x)=dx^2+ex$.

Vì phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) có ba nghiệm là $-1;\ 1;\ 2$ nên

$f(x)-g(x)=k(x+1)(x-1)(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (ax^3+bx^2+cx+2)-(dx^2+ex)=k(x+1)(x-1)(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay $x=0$ vào đẳng thức trên ta được $2=2k$ hay $k=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left|x^3-2x^2-x+2\right|\mathrm{d}x$$

$$=\left[\left|\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x\right|\right]$$

$$=\left[\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{1}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{1}^{2}\right|\right]=\left(\left|-\frac{4}{3}+4\right|+\left|\frac{15}{4}-\frac{14}{3}-\frac{3}{2}+2\right|\right)=\frac{37}{12}.$$

Câu 2: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(2;-1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=2,x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $C(2;-1)$ nên ta có: $-1=16a-32a+c\Leftrightarrow c=16a-1$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ ta có phương trình $\int_0^2 \left|ax^2(x^2-4)\right| dx = \frac{64}{15}$.

$\Leftrightarrow a\int_0^2 \left|x^4-4x^2\right| dx = \frac{64}{15} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow c=15 \Rightarrow f(x)=x^4-8x^2+15$.

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^4-8x^2+15)dx = \frac{226}{15}$.

Câu 3: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C(2;1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=2, x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $C(2;1)$ nên ta có: $1=16a-32a+c \Leftrightarrow c=16a+1$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ ta có phương trình $\int_0^2 \left|ax^2(x^2-4)\right| dx = \frac{64}{15}$.

$$\Leftrightarrow -a\int_0^2 \left|x^4-4x^2\right| dx = \frac{64}{15} \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow c=-15 \Rightarrow f(x)=-x^4+8x^2-15$$

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (-x^4+8x^2-15)dx = -\frac{226}{15}$.

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Ta có : $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 2 và 3.

Nên $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$ $(*)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được: $f'(0)-g'(0)=4 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{9}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$.

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-5$, $g(x_2)=3$.

Ta có: $\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$S=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{1}{g(x)+6}\mathrm{d}\left(g(x)+6\right)\right|=\left|\left(\ln\left|g(x)+6\right|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$

$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 1-\ln 9\right|=2\ln 3$.

Câu 6: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\frac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** 1. **D.** $\frac{94}{30}$.

Lời giải

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A,B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\frac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases} f(1) = -\dfrac{3}{5} \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = -\dfrac{3}{5} \\ 4a+2b = 0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_0^1 |g(x) - f(x)|.dx = \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[-ax^4 - \dfrac{1}{2}bx^2\right].dx = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{a}{5} - \dfrac{b}{6} = \dfrac{2}{5} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a = 3 : b = -6 : c = \dfrac{12}{5}$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Câu 7: Xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a,b,c \in \mathbb{R}, a < 0)$ sao cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C\left(-2; \dfrac{27}{7}\right)$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -2, x = 0$ có diện tích bằng $\dfrac{16}{15}$, tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{27}{20}$. **B.** $\dfrac{44}{15}$. **C.** $\dfrac{362}{105}$. **D.** $\dfrac{94}{30}$.

Lời giải

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A, B và C. là: $y = g(x) = mx^2 + nx + p$.
Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0 : c)$ suy ra $p = c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n = 0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; -\dfrac{b^2}{4a} + c\right)$ suy ra $m = \dfrac{1}{2}b$

.

Suy ra $y = g(x) = \dfrac{1}{2}bx^2 + c$

Ta có: $\begin{cases} f(2) = -\dfrac{3}{5} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a+4b+c = \dfrac{27}{7} \\ 8a+b = 0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_{-2}^0 |g(x) - f(x)|.dx = \dfrac{16}{15}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-2}^0 \left[ax^4 + \dfrac{1}{2}bx^2\right].dx = \dfrac{16}{15} \Leftrightarrow \dfrac{4a}{5} + 2\dfrac{b}{6} = \dfrac{2}{15} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a = -\dfrac{1}{4} : b = 2 : c = -\dfrac{1}{7}$

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{362}{105}$

Câu 8: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{20}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ có diện tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{60}$, tích phân $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{24}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Lời giải

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A,B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\frac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases}f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{20}\\ f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{20}\\ a+b=0\end{cases}\quad(II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_0^1\left|g(x)-f(x)\right|.dx=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[ax^4\frac{1}{2}bx^2\right].dx=\frac{\sqrt{2}}{60}\Leftrightarrow\frac{a}{40}+\frac{b}{24}=\frac{1}{60}\quad(III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a=-1:b=1:c=\frac{-1}{5}$

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}}{24}$

Câu 9: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(\sqrt{2};-\frac{2}{3}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=\sqrt{2}$ có diện tích bằng $\frac{2\sqrt{2}}{15}$, tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $-\frac{2\sqrt{2}}{15}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Lời giải

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A,B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\frac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases} f(\sqrt{2})=-\frac{2}{3} \\ f'(\sqrt{2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=-\frac{2}{3} \\ 4a+b=0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int_0^{\sqrt{2}} |g(x)-f(x)|.dx=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{2}} \left[-ax^4-\frac{1}{2}bx^2\right].dx=\frac{2\sqrt{2}}{15} \Leftrightarrow -\frac{4a}{5}-\frac{b}{3}=\frac{2}{15} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a=\frac{1}{4}:b=-1:c=\frac{1}{3}$

Vậy $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2\sqrt{2}}{15}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là -2, -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{500}{81}$. **B.** $\frac{36}{5}$. **C.** $\frac{2932}{405}$. **D.** $\frac{2948}{405}$.

Lời giải

Theo đề ta có $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=12(x+2)(x+1)(x-1)=12x^3+24x^2-12x-24$.

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 3a=24 \\ 2b=-12 \\ c=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-6 \\ c=-24 \end{cases}$.

Suy ra $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2+24x+d$.

Theo đề, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $(-2;8+d)$, $(-1;13+d)$, $(1;-19+d)$.

Gọi (P) là Parabol đi qua ba điểm $(-2;8)$, $(-1;13)$, $(1;-19)$. Khi đó $(P): y=-7x^2-16x+4$.

Suy ra $g(x)=-7x^2-16x+4+d$.

Xét phương trình $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4+8x^3+x^2-8x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-\frac{2}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|\mathrm{d}x=\frac{2948}{405}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(4)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(60;62)$. **B.** $(55;58)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(70;72)$.

Lời giải

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $\begin{cases} f'(x)\ge 0 \\ f(x)>f(0)=2, \forall x>0 \end{cases}$

Khi đó: $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x \Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow \int\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{2\sqrt{f(x)}}=\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{2\sqrt{f(x)}}=e^{\frac{x}{2}}+C \Rightarrow \sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}}+C$$

Với $f(0)=2 \Rightarrow \sqrt{f(0)}=1+C \Leftrightarrow C=\sqrt{2}-1 \Rightarrow f(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{2}-1\right)^2$

$\Rightarrow f(4)=\left(e^2+\sqrt{2}-1\right)^2\in(60;62)$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$, có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ và $f(0)=2024$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=2025$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4049+5\ln 2$. **B.** $-4049+5\ln 2$. **C.** $4049-5\ln 2$. **D.** $-4049-5\ln 2$.

Lời giải

Vì $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\begin{cases} \ln\left|3x-1\right|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \\ \ln\left|3x-1\right|+C_2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$

nên $f(x)=\begin{cases} \ln\left|3x-1\right|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \\ \ln\left|3x-1\right|+C_2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=2024 \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=2024 \\ 0+C_2=2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=2024 \\ C_2=2025 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln|3x-1|+2024 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2025 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Vậy $f(-1)+f(3)=\ln 4+2024+\ln 8+2025=4049+\ln 32=4049+5\ln 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $\left[f'(x)\right]^2+f''(x).f(x)+4=0,\ f(0)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$. Tính $f(1)$.

A. 20. **B.** 100. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\left[f'(x)\right]^2+f''(x).f(x)+4=0 \Leftrightarrow \left[f'(x).f(x)\right]'=-4\ (1)$

Lấy nguyên hàm 2 vế của (1) ta có: $\int\left[f'(x).f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int -4\mathrm{d}x \Rightarrow f'(x).f(x)=-4x+C_1\ (2)$

Lấy nguyên hàm 2 vế của (2) ta có: $\int f'(x).f(x).\mathrm{d}x=\int(-4x+C_1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int f(x).\mathrm{d}(f(x))=-2x^2+C_1x+C_2 \Rightarrow \dfrac{f^2(x)}{2}=-2x^2+C_1x+C_2$

Do $\begin{cases} f(0)=0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{-4x^2+8x}$ (do $y=f(x)$ có đồ thị nằm phía trên trục hoành).

Khi đó ta có hàm số $y=f(x)=\sqrt{-4x^2+8x}\ (C)$. Vậy $f(1)=2$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)-f'(x)=3x(2x-5)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=-1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $2f(x)-f'(x)=3x(2x-5) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x).e^{2x}-\left(e^{2x}\right)'.f(x)}{e^{4x}}=\dfrac{10x-6x^2}{e^{2x}}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\left(10x-6x^2\right)e^{-2x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\left[\left(3x^2-2x-1\right)e^{-2x}\right]'$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{e^{2x}}=\left(3x^2-2x-1\right)e^{-2x}+C$.

Lại có: $f(0)=-1\Rightarrow C=0$. Khi đó $f(x)=3x^2-2x-1\Rightarrow f(2)=7$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)-f(x)=(2x+3)e^x$ và $f(0)=5$ Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $f(x)=3e^x$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)-f(x)=(2x+3)e^x\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2x+3\Leftrightarrow\left(e^{-x}.f(x)\right)'=2x+3$

$\Rightarrow e^{-x}f(x)=x^2+3x+C$; $f(0)=5\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=\left(x^2+3x+5\right)e^x$

$f(x)=3e^x\Leftrightarrow\left(x^2+3x+5\right)e^x=3e^x\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$.

Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $f(x)=3e^x$ bằng -3.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0)=f'(0)=0, f''(x)-(2x+1)e^x=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e^4$. **C.** $2e^2$. **D.** e^4.

Lời giải

Ta có: $f(0)=f'(0)=0, f''(x)=f(x)+(2x+1)e^x\Leftrightarrow f''(x)-f(x)=(2x+1)e^x$

$\Leftrightarrow f''(x).e^x-f(x).e^x=(2x+1)e^{2x}\Leftrightarrow\left[f''(x).e^x+f'(x).e^x\right]-\left[f(x).e^x+f'(x).e^x\right]=(2x+1)e^{2x}$

$\Leftrightarrow\left[f'(x).e^x\right]'-\left[f(x).e^x\right]'=(2x+1).e^{2x}\Rightarrow f'(x).e^x-f(x).e^x=\int(2x+1).e^{2x}dx$

$\Leftrightarrow f'(x).e^x-f(x).e^x=xe^{2x}+C$. Khi: $x=0\Rightarrow C=0$

Suy ra: $\Leftrightarrow f'(x).e^x-f(x).e^x=xe^{2x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x).e^x-f(x).e^x}{e^{2x}}=x$

$\Rightarrow\left[\dfrac{f(x)}{e^x}\right]'=x\Rightarrow\dfrac{f(x)}{e^x}=\dfrac{x^2}{2}+C_1\xrightarrow{x=0}C_1=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}x^2.e^x\Rightarrow f(2)=2e^2$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=2\sqrt{2}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 0.

Lời giải

Với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x$ $(*)$.

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$. Ta có $f(0)=2\sqrt{2}\Rightarrow C=3$.

Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+3)^2-1}$. Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{15}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)-(x+3)f'(x)=2xf^2(x),\forall x\in[1;3]$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. $1+\ln 3$. **B.** $2-\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1-\ln 3$.

Lời giải

+ Xét $f(x)\neq 0$, theo giả thiết ta có

$$f(x)-(x+3)f'(x)=2xf^2(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)-(x+3)f'(x)}{f^2(x)}=2x\Leftrightarrow\left[\frac{x+3}{f(x)}\right]'=2x$$

$$\Rightarrow\frac{x+3}{f(x)}=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{x+3}{f(x)}=x^2+C\ (*)$$

+ Mà $f(1)=4$, thay vào (8) ta được $\frac{1+3}{4}=1^2+C\Rightarrow C=0\Rightarrow\frac{x+3}{f(x)}=x^2\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+3}{x^2}$.

+ Xét: $f(x)=0\Rightarrow x=-3\notin[0;2]\Rightarrow f(x)\neq 0\,\forall x\in[1;3]$. Vậy $f(x)=\frac{x+3}{x^2}$ $\forall x\in[1;3]$.

$$+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{x+3}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\frac{3}{x}\right)\Bigg|_1^3=(\ln 3-1)-(\ln 1-3)=\ln 3+2.$$

Câu 19: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Với số thực $a>0$, giả sử rằng mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x)f(a-x)=1$. Tính $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\ln(1+a)$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Do $f(x)f(a-x)=1$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;a]$ nên $f(x)=\frac{1}{f(a-x)}$.

Ta có $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(a-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $a-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Với $x=a\Rightarrow t=0$; $x=0\Rightarrow t=a$.

Ta được $I=-\int_a^0 \frac{f(t)}{f(t)+1}\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+1}\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x$

Đặt $J=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x$, ta được $I=J$

Do đó, ta có $I+J=\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\mathrm{d}x+\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x=\int_0^a \mathrm{d}x=x\Big|_0^a=a$. Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)>-1$, $f(0)=0$, và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. 0 **<u>B.</u>** 3 **C.** 7. **D.** 9

Lời giải

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \Rightarrow \sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}+C$

$\Rightarrow \sqrt{f(0)+1}=1+C\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=x^2$, từ đó ta có $f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thoả mãn đồng thời các điều kiện $f(1)=-\frac{1}{2}$ và $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x)$, $\forall x\in[1;2]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox, $x=1$, $x=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

<u>A.</u> $0<S<\frac{1}{2}$. **B.** $2<S<3$. **C.** $1<S<\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<S<1$.

Lời giải

Ta có $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x)\Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=\left(xf(x)\right)^2.(2x+1)$

$\Rightarrow \frac{\left(xf(x)\right)'}{\left(xf(x)\right)^2}=(2x+1), \forall x\in[1;2]$.

$\Rightarrow \int \frac{\left(xf(x)\right)'}{\left(xf(x)\right)^2}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{-1}{xf(x)}=x^2+x+C \quad (1)$

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $\frac{-1}{1.f(1)}=1^2+1+C\Leftrightarrow 2=2+C\Leftrightarrow C=0$.

$\Rightarrow \frac{-1}{xf(x)}=x^2+x \Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x^3+x^2}$ (với mọi $x\in[1;2]$).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)=\dfrac{-1}{x^3+x^2}$, trục Ox, $x=1,x=2$ là:

$S=\int\limits_1^2\left|\dfrac{-1}{x^3+x^2}\right|\mathrm{d}x\approx 0,2123$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=4$ là 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx\right)^2-4\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx$.

A. -36. **B.** 28. **C.** -32. **D.** -24.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\int\limits_0^4\left|f(x)\right|dx=8$ và $f\left(x\right)<0\forall x$ $\Rightarrow\int\limits_0^4 -f\left(x\right)dx=8\Rightarrow\int\limits_0^4 f\left(x\right)dx=-8$.

$\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)dx+\int\limits_2^4 f(x)dx=-8\Rightarrow\int\limits_2^4 f(x)dx=-8-\int\limits_0^2 f(x)dx$.

$\Rightarrow T=\left(\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx\right)^2-4\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx=\left(\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx\right)^2-4\left(-8-\int\limits_0^2 f(x)dx\right)$

Đặt $u=\int\limits_0^2 f(x)dx\Rightarrow T=u^2+4u+32=\left(u+2\right)^2+28\geq 28$. Dấu “=” xảy ra khi $u=-2$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1\left(x+t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t$ với $\forall x\in\left[-1;1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Biến đổi $f\left(x\right)+2=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1\left(x+t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}\left[\int\limits_{-1}^1 xf\left(t\right)\mathrm{d}t+\int\limits_{-1}^1 tf\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{3}{2}x\int\limits_{-1}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t+\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 tf\left(t\right)\mathrm{d}t$

Do đó $\Rightarrow f\left(x\right)+2=ax+b;\left(a=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t;b=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 tf\left(t\right)\mathrm{d}t\right)$.

Thay ngược lại đẳng thức đã cho

$ax+b=\dfrac{3}{2}x\int\limits_{-1}^1\left(at+b-1\right)\mathrm{d}t+\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^1 t\left(at+b-1\right)\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}x\times 2\left(b-1\right)+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}a=3\left(b-1\right)x+a$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}a=3\left(b-1\right)\\ b=a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{3}{2}$ hay $f(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

$I=\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1\left(\dfrac{3}{x}x+\dfrac{1}{2}\right)dx=1$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$.   **B.** $\frac{3}{2}$.   **C.** $\frac{1}{2}$.   **D.** 2.

Lời giải

Đặt: $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y$.

$\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$.

Đổi cận: $x=0\Leftrightarrow y^3+y=0\Leftrightarrow y=0$.

$x=2\Leftrightarrow y^3+y=2\Leftrightarrow y=1$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1(3y^3+y)dy=\left(\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{5}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(2;4)$, thỏa mãn $f(3)=\frac{1}{e^2}$ và $f^3(x)+e^{-2x}=3e^{-x}\sqrt{f(x)}.f'(x),\ \forall x\in(2;4)$. Khi đó $f\left(\frac{5}{2}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$.   **B.** $(2;3)$.   **C.** $(3;4)$.   **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Đặt $g(x)=\sqrt{f^3(x)}\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}f'(x)\sqrt{f(x)}$. Ta có

$g^2(x)+e^{-2x}=2.e^{-x}.g'(x)\Leftrightarrow\left[e^x.g(x)\right]^2+1=2.e^x.g'(x)$.

Nhận xét: $\left[e^x.g(x)\right]'=e^x.g(x)+e^x.g'(x)\Rightarrow e^x.g'(x)=\left[e^x.g(x)\right]'-e^x.g(x)$.

Suy ra:

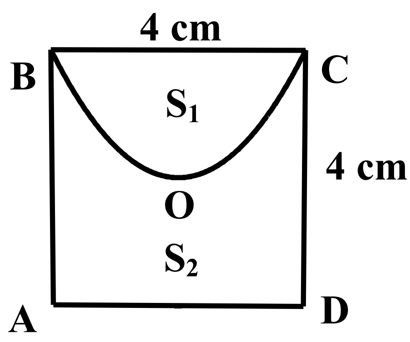
$$\left[e^x.g(x)\right]^2+1=2\left[\left(e^x.g(x)\right)'-e^x.g(x)\right]\Leftrightarrow\left[e^x.g(x)+1\right]^2=2\left(e^x.g(x)\right)'\Leftrightarrow\frac{\left(e^x.g(x)\right)'}{\left[e^x.g(x)+1\right]^2}=\frac{1}{2}$$
.

$$\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{\left(e^x.g(x)\right)'}{\left[e^x.g(x)+1\right]^2}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{1}{2}dx\Leftrightarrow-\frac{1}{e^x.g(x)+1}\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{3}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{e^{\frac{5}{2}}.g\left(\frac{5}{2}\right)+1}-\frac{1}{e^3.g(3)+1}=\frac{1}{4}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{e^{\frac{5}{2}}.g\left(\frac{5}{2}\right)+1}=\frac{1}{e^3.\sqrt{f^3(3)}+1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{e^3.\sqrt{\left(\frac{1}{e^2}\right)^3}+1}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{5}{2}\right)\approx 0,0274\Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 0,09\in(0;1).$$

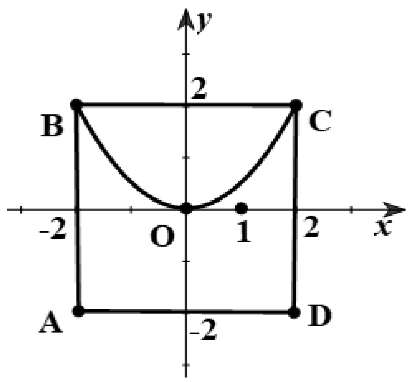
Câu 26: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).

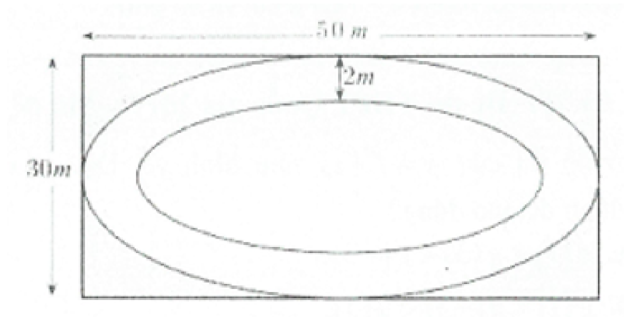


Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải





Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

Ta có phương trình parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$.

Suy ra $S_1=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{16}{3}$ (đvdt).

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=4^2=16$ (đvdt).

Do đó diện tích S_2 là $S_2=S_{ABCD}-S_1=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$ (đvdt).

Vậy tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{3}:\frac{32}{3}=\frac{1}{2}$.

Câu 27: Một sân chơi dành riêng cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 50m và chiều rộng 30m, người ta làm một con đường trong sân (như hình vẽ). Biết viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó (số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

A. 119.000.000 đồng. **B.** 152.000.000 đồng. **C.** 119.320.000 đồng. **D.** 125.520.000 đồng.

Lời giải

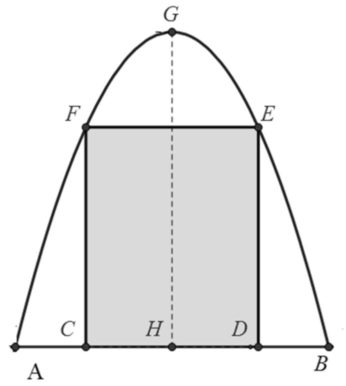
Đường elip phía ngoài có phương trình $\frac{x^2}{25^2}+\frac{y^2}{15^2}=1$ và có diện tích $S_1=\pi 25.15$

Đường elip phía trong có phương trình $\frac{x^2}{23^2}+\frac{y^2}{13^2}=1$ và có diện tích $S_2=\pi 23.13$

Diện tích mặt đường là $S=S_1-S_2$

Do đó kinh phí để làm đường là: $T=\left(S_1-S_2\right).500,000=119.320.000$ đồng.

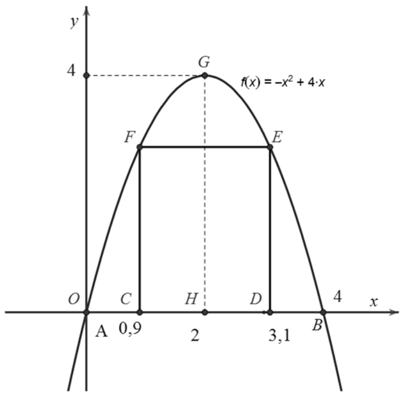
Câu 28: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G\left(2;4\right)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right)$.

Vì parabol có đỉnh là $G\left(2;4\right)$ và đi qua điểm $O\left(0;0\right)$ nên ta có $\begin{cases}c=0\\-\dfrac{b}{2a}=2\\a.2^2+b.2+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=0\end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}\left(m^2\right)$.

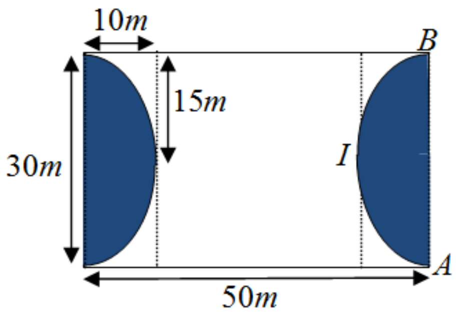
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(m)$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2\,(m)$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138\left(m^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500}\left(m^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \frac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

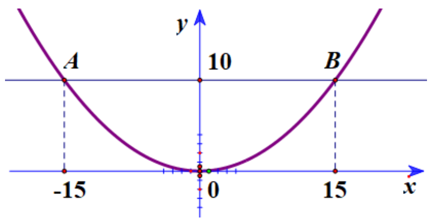
Câu 29: Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30m và chiều dài $50\,m$. Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ. Phần tô màu gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I. Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/ m^2 và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90 nghìn đồng/ m^2. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?



A. 165 triệu đồng. **B.** 151 triệu đồng. **C.** 195 triệu đồng. **D.** 135 triệu đồng.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, $O \equiv I$.



Khi đó, đường cong AIB là hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = \frac{2}{45}x^2$ và đường thẳng $y = 10$.Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2}{45}x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm 15$.

Diện tích phần tô màu là: $S_1 = 2\int_{-15}^{15}\left|\frac{2}{45}x^2 - 10\right|dx = 400\left(m^2\right)$.

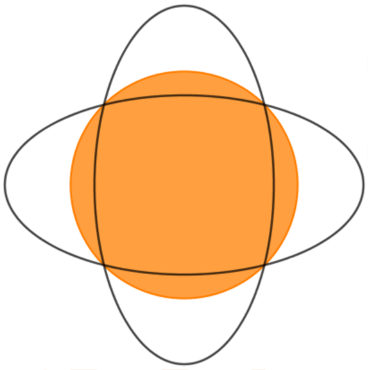
Mặt khác diện tích sân bóng đá mini hình chữ nhật là $S = 30.50 = 1500\left(m^2\right)$.

Phần không tô màu có diện tích là: $S_2 = S - S_1 = 1100\left(m^2\right)$.

Số tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng:

$$S_1.130000 + S_2.90000 = 400.130000 + 1100.90000 = 151000000 \text{ (đồng)}.$$

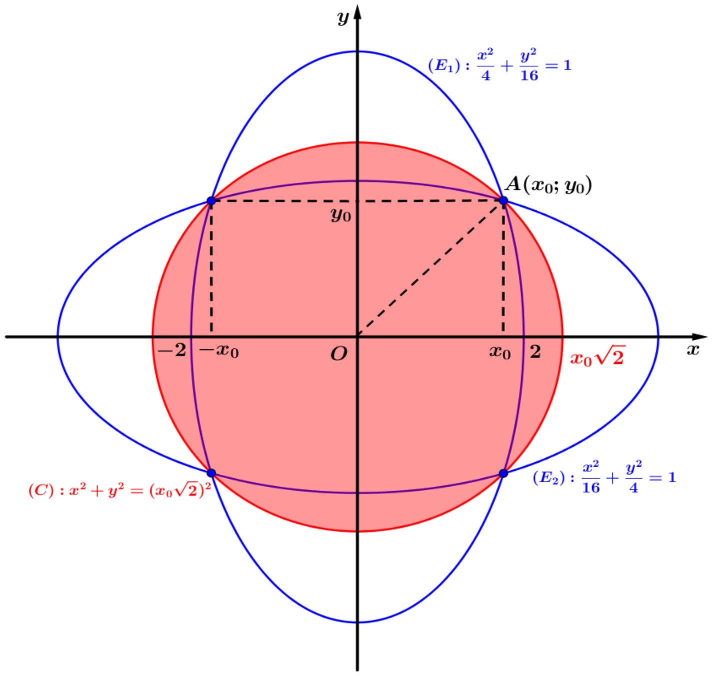
Câu 30: Hướng tới kỉ niệm 50 năm thành lập trường THPT X. Học sinh lớp 12T thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng $8m$ và độ dài trục nhỏ bằng $4m$ đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này và trục nhỏ của Elip kia cùng nằm trên một đường thẳng (như hình vẽ).



Phần diện tích (tô màu) nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa (không tô màu) được giới hạn bởi đường tròn và đường Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là 300.000 đồng$/1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là 200.000 đồng$/1m^2$. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau:

A. $6.800.000$ đồng. **B.** $8.900.000$ đồng. **C.** $8.600.000$ đồng. **D.** $6.900.000$ đồng.

Lời giải



- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
- Tiếp theo ta sẽ thiết lập phương trình nửa bên trên trục hoành của cả hai Elip trên

$\Rightarrow$2 phương trình đó là: $y_1=4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}; y_2=2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$.

Gọi $A(x_0;y_0),(x_0>0)$ là một trong hai giao điểm của hai đồ thị hàm số y_1, y_2.

Từ đó, hoành độ của điểm A chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số y_1, y_2

$$\Rightarrow 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}16(4-x^2)=16-x^2\\0<x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\\0<x\le 2\end{cases} \Rightarrow x_0=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra bán kính của đường tròn đi qua 4 giao điểm của 2 Elip trên là $R=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(m)$.

Phương trình nửa trên của đường tròn là: $y_3=\sqrt{\frac{32}{5}-x^2}$.

Diện tích hình tròn đó là: $\pi R^2=\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{32\pi}{5}(m^2)$.

Từ đó ta tính được kinh phí trồng cỏ là: $200.000\times\left(\frac{32\pi}{5}\right)$đồng.

Ta có diện tích 4 cánh hoa được giới hạn bởi đường tròn và đường Elip dùng để trồng hoa bằng nhau. Diện tích cánh hoa nằm phía trên trục hoành giới hạn bởi Elip (E_1) và đường tròn là:

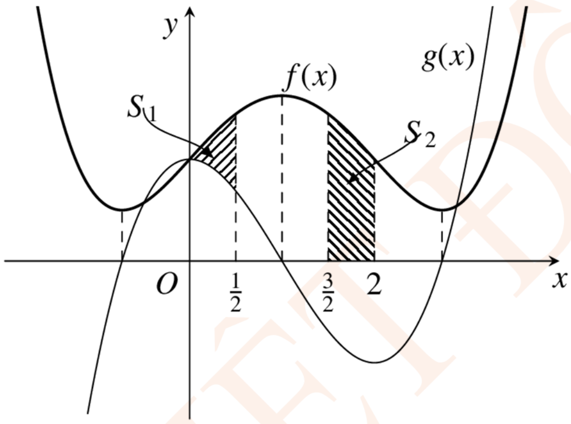
$$S_1 = \int_{-x_0}^{x_0} \left(4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \sqrt{\frac{32}{5} - x^2} \right) dx .$$

Diện tích dùng để trồng hoa là $S = 4S_1$

Vậy tổng giá tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa bằng

$$300000 \times S + 200.000 \times \left(\frac{32\pi}{5} \right) \approx 8.600.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2$ và hàm số $g(x) = bx^3 + cx^2 + 2$, có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_2 = \frac{791}{640}$. Khi đó S_1 bằng



A. $\frac{231}{640}$. **B.** $\frac{271}{320}$. **C.** $\frac{571}{640}$. **D.** $\frac{221}{640}$.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với trục hoành chính là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Do đó: $f'(x) = k.g(x)$. Từ đó ta có $4ax^3 - 3x^2 + 2 = k\left(bx^3 + cx^2 + 2\right)$

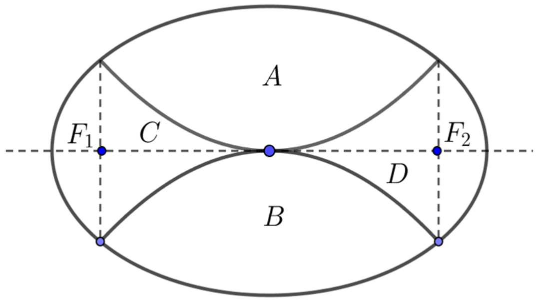
Suy ra: $\begin{cases} k = 1 \\ b = 4a \\ c = -3 \end{cases}$ và $g(x) = 4ax^3 - 3x^2 + 2$.

$$f(x) - g(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2 - 4ax^3 + 3x^2 - 2 = ax^4 - (1+4a)x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(ax^4 - x^3 + 2x + 2\right) dx = \frac{791}{640} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Khi đó: $S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(ax^4 - (1+4a)x^3 + 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{221}{640}$

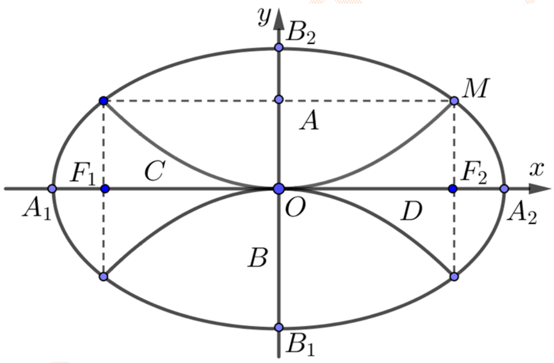
Câu 32: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 270.000 đ và 140.000 đ. Tính tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 5.676.000 đ. **B.** 5.997.000 đ. **C.** 5.996.000 đ. **D.** 5.677.000 đ.

Lời giải

Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các phần A, B, C và D. Theo giả thiết ta được $S_A = S_B$, $S_C = S_D$.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó elip (E) có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$.

Theo bài $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$; $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$ suy ra phương trình của elip là $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3}$ suy ra $F_2\left(2\sqrt{3}; 0\right)$.

Gọi (P) là parabol nằm ở phần phía trên của trục Ox, cắt (E) tại điểm M với hoành độ $x_M = 2\sqrt{3}$ khi đó $M \in (E) \Rightarrow M\left(2\sqrt{3}; 1\right)$.

Theo giả thiết, parabol (P) có dạng $y = m.x^2$. Do $M \in (P) \Rightarrow 1 = 12.m \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$.

Từ (1) ta được $\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của phần A là $S_A=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)dx=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}dx-\frac{1}{12}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}x^2dx$ hay

$$S_A=I_1-\frac{1}{36}x^3\Big|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=I_1-\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Với $I_1=\frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}dx$. Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos tdt$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Đổi cận: Khi $x=-2\sqrt{3}$ ta được $t=-\frac{\pi}{3}$; khi $x=2\sqrt{3}$ ta được $t=\frac{\pi}{3}$.

Theo công thức đổi biến số, thì:

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2x}.4\cos tdt=8\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt$$

Hay $I_1=4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Từ đó tìm được $S_A=\frac{8\pi+2\sqrt{3}}{3}$.

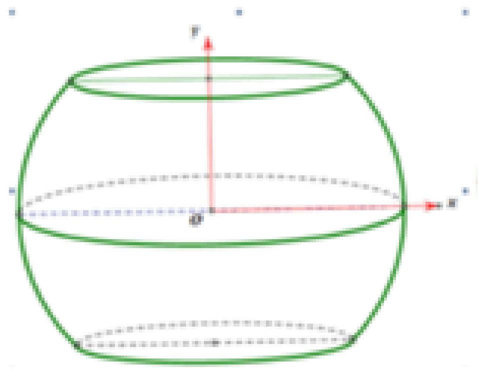
Diện tích của (E) là $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Diện tích của phần C là $S_C=S_D=\frac{S_{(E)}-2S_A}{2}=\frac{4\pi-2\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền cần sử dụng để hoàn thành khu vườn trên là:

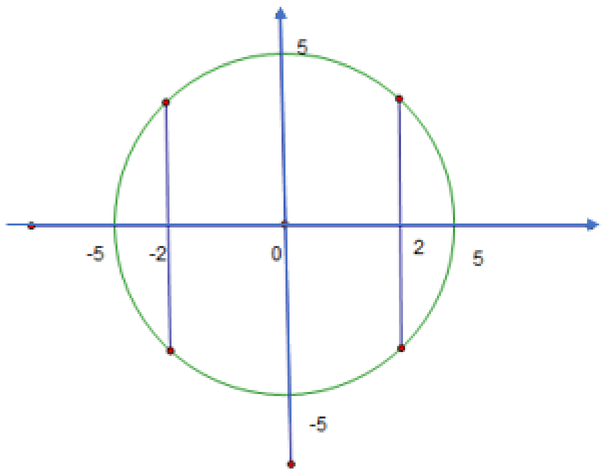
$(2.S_A)\times 270\ 000+(2.S_C)\times 140\ 000\approx 5\ 996\ 967,818\simeq 5997000$ đ.

Câu 33: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\dfrac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$. **B.** $\dfrac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$. **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$.

Lời giải



Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là một phần cắt bị đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$.

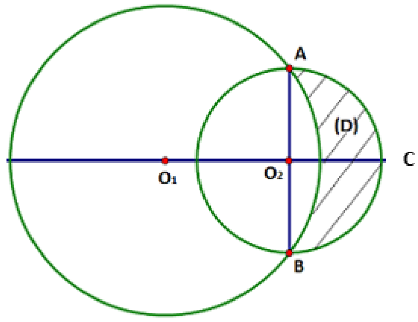
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}.$$

Thể tích khối cầu là: $\mathrm{V}_2=\dfrac{4}{3}\pi.5^3=\dfrac{500\pi}{3}$.

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\dfrac{500\pi}{3}-2.\dfrac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$.

Câu 34: Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;6)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;6)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V=36\pi$ **B.** $V=\dfrac{68\pi}{3}$ **C.** $V=\dfrac{320}{3}$ **D.** $V=\dfrac{320\pi}{3}$

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2\equiv O$, $O_2C\equiv Ox$, $O_2A\equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2=\sqrt{O_1A^2-O_2A^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\Rightarrow (O_1):(x+8)^2+y^2=100$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2+y^2=36$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{100-(x+8)^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=2$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{36-x^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=6$.

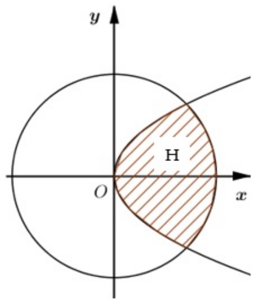
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi.6^3=144\pi$.

Lại có $V_1=\pi\int\limits_0^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left[100-(x+8)^2\right]\mathrm{d}x=\dfrac{112\pi}{3}$.

Do đó $V=V_2-V_1=144\pi-\dfrac{112\pi}{3}=\dfrac{320\pi}{3}$.

Câu 35: Cho hình H giới hạn bởi các đường $y^2=2x$ và $x^2+y^2=8$ (phần gạch sọc trong hình). Khối tròn xoay khi quay H xung quanh trục Ox có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{2\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi\left(13-8\sqrt{2}\right)}{3}$. **C.** $\left(\dfrac{32\sqrt{2}}{3}-8\right)\pi$. **D.** $\dfrac{4\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$.

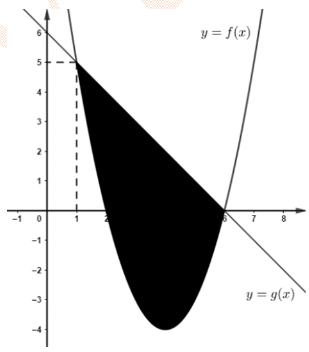
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\begin{cases}8-x^2=2x\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-8=0\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Thể tích của khối tròn xoay: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{2x}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_2^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

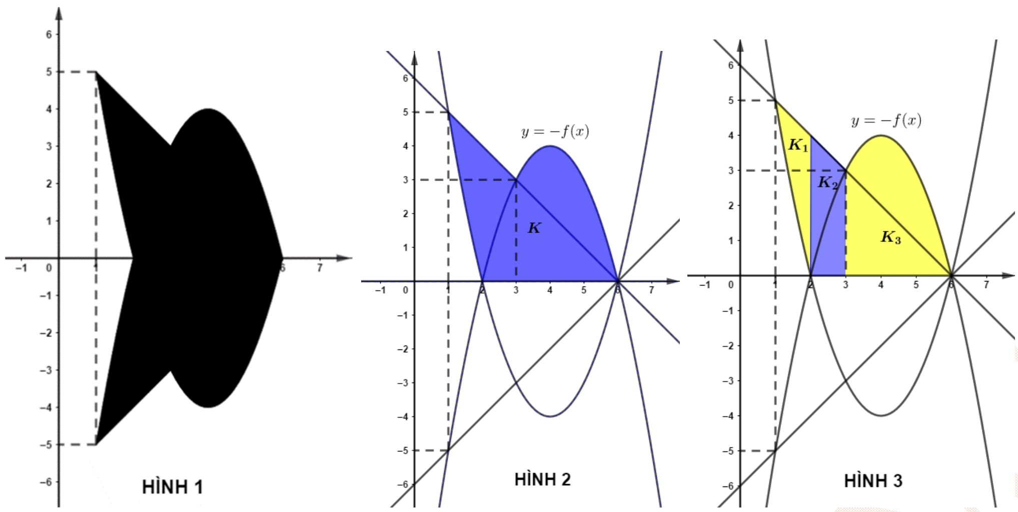
$\Leftrightarrow V=\pi\left(x^2\Big|_0^2+\left(8x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{2\sqrt{2}}\right)=\dfrac{4\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$.

Câu 36: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)=x^2-8x+12$ và $y=g\left(x\right)=-x+6$ (phần tô đậm trong hình). Khối tròn xoay tạo thành khi quay H xung quanh trục hoành có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{216\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{949\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{817\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{836\pi}{15}$.

Lời giải



Hình 1 biểu diễn thiết diện của mặt phẳng chứa trục hoành và khối tròn xoay tạo thành khi quay H xung quanh trục hoành.

Gọi K là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)=x^2-8x+12$, $y=g(x)=-x+6$, $y=-f(x)=-x^2+8x-12$, $y=0$ như phần tô đậm ở hình 2.

Khối tròn xoay tạo thành khi quay H xung quanh trục hoành cũng là khối tròn xoay tạo thành khi quay K xung quanh trục hoành.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và $y=-f(x)$ là nghiệm của phương trình

$$-x+6=-x^2+8x-12 \Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=6 \end{array}\right..$$

Chia K thành 3 phần K_1, K_2, K_3 như hình 3. Khi đó thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay K xung quanh trục hoành là:

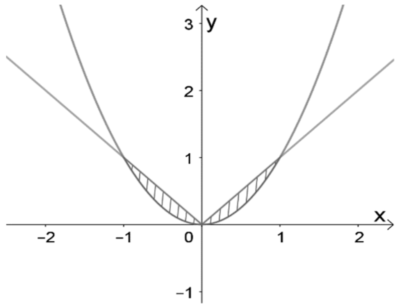
$$V=\pi\int_1^2\left[(-x+6)^2-(x^2-8x+12)^2\right]dx+\pi\int_2^3(-x+6)^2\,dx+\pi\int_3^6(-x^2+8x-12)^2\,dx=\frac{836\pi}{15}$$

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tìm là: $V=\dfrac{836\pi}{15}$.

Câu 37: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi}{3}$ **C.** $\dfrac{2\pi}{15}$ **D.** $\dfrac{4\pi}{15}$

Lời giải



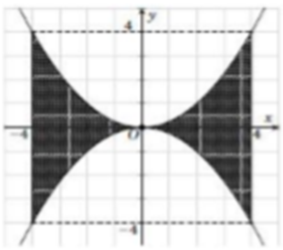
Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$.

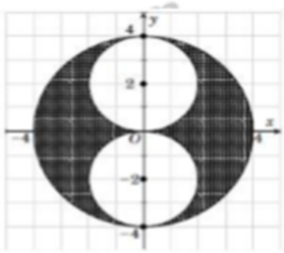
Ta có đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x = y$ và $x = \sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 \left| y - y^2 \right| \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(y - y^2 \right) \mathrm{d}y = \pi . \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}; y = -\frac{x^2}{4}; x = -4; x = 4$ và (H_2) là hình gồm tất cả các điểm $(x;y)$ thỏa $x^2 + y^2 \le 16; x^2 + (y-2)^2 \ge 4; x^2 + (y+2)^2 \ge 4$.





Cho (H_1) và (H_2) quanh quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{1}{2} V_2$ **B.** $V_1 = V_2$ **C.** $V_1 = \frac{2}{3} V_2$ **D.** $V_1 = 2V_2$

Lời giải

V_1 là thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 8 trừ đi bốn lần thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi vật thể bị giới hạn bởi các đường $x = 2\sqrt{y}; x = 0; y = 0; x = 4$ quay quanh trục Oy.

$$\Rightarrow V_1 = \pi.4^2.8 - 4\pi\int_0^4 2y\,dy = 64\pi$$

V_2 là thể tích khối cầu có bán kính bằng 4 trừ đi 2 lần thể tích khối cầu có bán kính bằng 2.

$\Rightarrow V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(4^3 - 2.2^3\right) = 64\pi$. Vậy $V_1 = V_2$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh Ox bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, trục tung và đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{4}$.

A. $\dfrac{\pi^2}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi}{12}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$ (1)

Thay x bởi $-x$ ta có $3f(x) - 2f(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = \tan^2 x$

Thể tích vật thể tròn xoay là:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\frac{1}{\cos^2 x}dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$$

$$= \pi\frac{1}{3}\left(\tan^3 x - \tan x + x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{12}$$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn: $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \neq 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh Ox bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$.

A. $\dfrac{\pi^2}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải

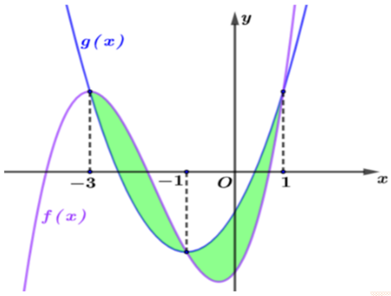
Ta có: $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ (1)

Thay x bởi $\dfrac{1}{x}$ ta có: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = \dfrac{3}{x}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra: $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$

Thể tích vật thể tròn xoay là: $V=\pi\int_1^2\left(\frac{2}{x}-x\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}-4+x^2\right)dx=\pi\left(\frac{-4}{x}-4x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}$

Câu 41: Cho hai hàm số $f(x)=mx^3+nx^2+px-\frac{5}{2}(m,n,p\in\mathbb{R})$ và $g(x)=x^2+2x-1$ có đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ bằng

A. $\frac{18}{5}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow mx^3+(n-1)x^2+(p-2)x-\frac{3}{2}=0$.

Vì hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ nên ta có:

$mx^3+(n-1)x^2+(p-2)x-\frac{3}{2}=m(x+3)(x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow mx^3+(n-1)x^2+(p-2)x-\frac{3}{2}=mx^3+3mx^2-mx-3m$ (*).

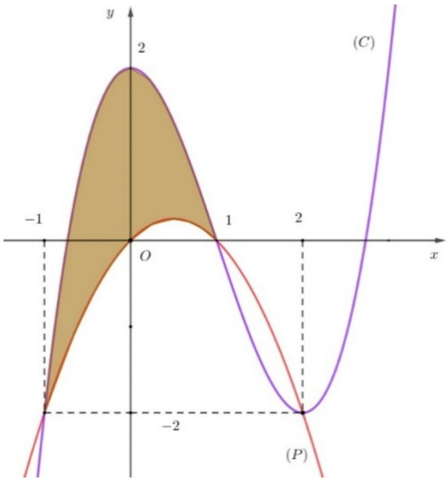
Đồng nhất thức hai vế phương trình (*) ta được $\begin{cases}n-1=3m\\p-2=-m\\-\frac{3}{2}=-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\n=\frac{5}{2}\\p=\frac{3}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Khi đó Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là

$S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=2+2=4.$

Câu 42: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng $\frac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-b$.



A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 25.

Lời giải

Gọi dạng của hàm số bậc ba có đồ thị (C) là $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$. Dựa vào hình vẽ, đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;2)$, $B(-1;-2),C(1;0),D(2;-2)$. Suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases}d=2\\-a+b-c+d=-2\\a+b+c+d=0\\8a+4b+2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\-a+b-c=-4\\a+b+c=-2\\8a+4b+2c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\a=1\\b=-3\\c=0\end{cases}$$. Hay $f(x)=x^3-3x^2+2$.

Gọi dạng của parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành là $g(x)=mx^2+nx+p\,(m\neq 0)$. Dựa vào hình vẽ, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $B(-1;-2),C(1;0)$. Suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}p=0\\m-n+p=-2\\m+n+p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\m-n=-2\\m+n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\m=-1\\m=1\end{cases}$. Hay $g(x)=-x^2+x$.

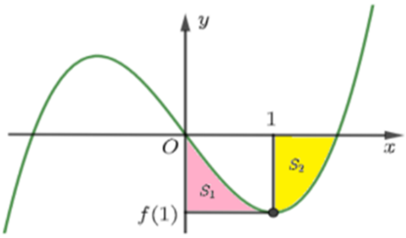
Diện tích của hình phẳng (H) là: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x^2+2-(-x^2+x)\right|\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^{1}\left|x^3-2x^2-x+2\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx=\frac{8}{3}$.

Suy ra $a=8,\ b=3$.

Vậy $T=8-3=5$.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $[f(x)+1]$ và $[f(x)-1]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2+8S_1$



A. $\dfrac{1}{2}$.   **B.** $\dfrac{3}{5}$.   **C.** 4.   **D.** 9.

Lời giải

+ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và đi qua gốc tọa độ O, nên có dạng

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx\ (a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

+ Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1\Rightarrow f'(1)=3a+2b+c=0\quad (1)$

+ Ta có $\left[f(x)+1\right]$ và $\left[f(x)-1\right]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$

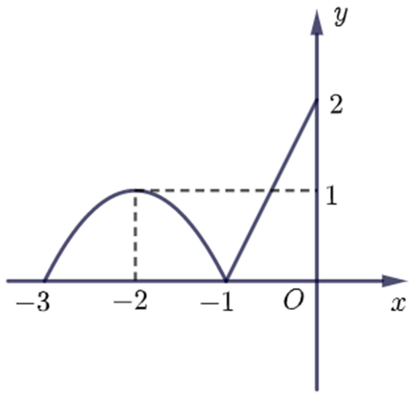
$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)+1=(x-1)^2h(x)\\ f(x)-1=(x+1)^2g(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)+1=0\\ f(-1)-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=-1\\ f(-1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=-1\\ -a+b-c=1\end{cases}\ (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}3a+2b+c=0\\ a+b+c=-1\\ -a+b-c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=0\\ c=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

+ Từ đồ thị ta có: $\begin{cases}S_1=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{8}-\frac{3x^2}{4}+x\right)\right|_0^1=\frac{3}{8}\\ S_2=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)dx=\left.\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{3x^2}{4}\right)\right|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2S_2+8S_1=4$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;0]$ như hình vẽ sau (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Cho $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{1}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$, giá trị $f(0)$ bằng

A. 1.   **B.** $-\dfrac{7}{9}$.   **C.** 2.   **D.** $\dfrac{14}{9}$.

Lời giải

- Xét $y=ax^2+bx+c$, đồ thị đi qua 3 điểm có tọa độ $(-3;0),(-2;1),(-1;0)$ ta có:

$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ 4a-2b+c=1 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2-4x-3 \Rightarrow f'(x)=-x^2-4x-3 \text{ trên } -3\le x\le 0$$

- Xét $y=ax+b$, đồ thị hàm số đi qua 2 điểm có tọa độ $(-1;0),(0;2)$ ta có:

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow y=2x+2 \Rightarrow f'(x)=2x+2 \text{ trên } -1<x\le 0$$

Khi đó: $f'(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3,-3\le x\le -1 \\ 2x+2,-1\le x\le 0 \end{cases}$, suy ra $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1,-3\le x\le -1 \\ x^2+2x+C_2,-1\le x\le 0 \end{cases}$

Xét: $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{1}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

Đặt $t=\ln x$, $x=e^{-3}\Rightarrow t=-3, x=1\Rightarrow t=0$

Khi đó

$$\int_{-3}^{0}f(t)dt=\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+C_2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}+C_1x\Big|_{-3}^{-1}+\left(-\frac{2}{3}\right)+C_2x\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{3}+(-C_1+3C_1)+(0+C_2)=\frac{2}{3}+2C_1+C_2.$$

Theo đề bài: $\dfrac{2}{3}+2C_1+C_2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 2C_1+C_2=0\,(1)$.

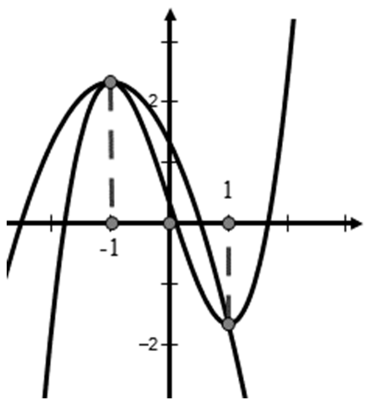
Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-1$

nên $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}+C_1=-1+C_2\Rightarrow C_1-C_2=-\dfrac{7}{3}\,(2)$

Từ (1), (2) ta có: $\begin{cases} C_1=-\dfrac{7}{9} \\ C_2=\dfrac{14}{9} \end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x-\dfrac{7}{9},-3\le x\le -1 \\ x^2+2x+\dfrac{14}{9},-1\le x\le 0 \end{cases}$

Suy ra: $f(0)=0^2+2.0+\dfrac{14}{9}=\dfrac{14}{9}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+3=0 \\ -2a+b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} -2m+n=0 \\ 1+a+b+c=m+n+p \\ -1+a-b+c=m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ m=-1 \\ p-c=1 \end{cases}$$

Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-c\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\in(1;2)$.

Câu 46: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\frac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{17}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=1,x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$ ta có phương trình $\int\limits_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow a\int\limits_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{2}{5}\Leftrightarrow a=3\Rightarrow f(x)=3x^4-6x^2+\frac{12}{5}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(3x^4-6x^2+\frac{12}{5}\right)dx=1$.

Câu 47: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(1;-1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{5}$, tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.
Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.
Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.
Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{5}$ ta có phương trình $\int_0^1 \left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1 \left(x^2-x^4\right)dx=\frac{4}{5} \Leftrightarrow a=6 \Rightarrow f(x)=6x^4-12x^2+5 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(6x^4-12x^2+5\right)dx=3$

Câu 48: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C(1;6)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{15}$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{53}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.
Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.
Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.
Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{15}$ ta có phương trình $\int_0^1 \left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{4}{15}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1 \left(x^2-x^4\right)dx=\frac{4}{15} \Leftrightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2x^4-4x^2+8$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}f(x)dx=\int_0^1\left(x^4-2x^2+4\right)dx=\frac{53}{15}$

Câu 49: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C(1;-5)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$, tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{23}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.
Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$ ta có phương trình $\int\limits_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{14}{15}$

$\Leftrightarrow a\int\limits_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{14}{15}\Leftrightarrow a=7\Rightarrow f\left(x\right)=7x^4-14x^2+2$

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^0\left(7x^4-14x^2+2\right)dx=\frac{23}{15}$

Câu 50: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-5\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$, tích phân $\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{23}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=1,x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$ ta có phương trình $\int\limits_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{14}{15}$

$\Leftrightarrow a\int\limits_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{14}{15}\Leftrightarrow a=7\Rightarrow f\left(x\right)=7x^4-14x^2+2$

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^0\left(7x^4-14x^2+2\right)dx=\frac{23}{15}$

Câu 51: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(2;-12\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{26}{15}$. **D.** $\frac{23}{15}$.

Lời giải

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=2,x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\dfrac{64}{15}$ ta có phương trình $\int\limits_0^2 \left|ax^2(x^2-4)\right|dx=\dfrac{64}{15}$

$\Leftrightarrow a\int\limits_0^2 \left(4x^2-x^4\right)dx=\dfrac{64}{15} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow f\left(x\right)=x^4-8x^2+4 \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 \left(x^4-8x^2+4\right)dx=\dfrac{23}{15}$

Câu 42: **(Đề TK BGD 2024)** Xét các số phức $z, w\left(w \neq 2\right)$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $\dfrac{w+2}{w-2}$ là số thuần ảo. Khi $|z-w| = \sqrt{3}$, giá trị của $|2z+w|$ bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

• Đặt $w = a + bi, \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$, $P = |2z + w|$

• Ta có:

$$\frac{w+2}{w-2} = \frac{(a+2)+bi}{(a-2)+bi} = \frac{\left[(a+2)+bi\right]\left[(a-2)-bi\right]}{(a-2)^2+b^2} = \frac{\left(a^2-4+b^2\right)}{(a-2)^2+b^2} + \frac{\left((a-2)b-(a+2)b\right)i}{(a-2)^2+b^2}$$

$\dfrac{w+2}{w-2}$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow |w|^2 = 4$.

(Ta có thể làm gọn như sau:

$\dfrac{w+2}{w-2}$ là số thuần ảo suy ra $\dfrac{w+2}{w-2} + \dfrac{\overline{w}+2}{\overline{w}-2} = 0$. Biến đổi ta được $|w|^2 = 4$.)

• $|z-w| = \sqrt{3} \Rightarrow 3 = |z-w|^2 = (z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right) \Rightarrow 3 = |z|^2 - \left(z\overline{w} + \overline{z}w\right) + |w|^2$

$\Leftrightarrow 3 = 1 - \left(z\overline{w} + \overline{z}w\right) + 4 \Rightarrow z\overline{w} + \overline{z}w = 2$

• $P^2 = |2z+w|^2 = (2z+w)\left(2\overline{z}+\overline{w}\right) = 4|z|^2 + 2\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right) + |w|^2 = 4.1 + 2.2 + 4 = 12$

$\Rightarrow P = 2\sqrt{3}$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 42

Câu 1: Cho số phức z thỏa $|3z - i| = |3 + iz|$. Gọi w số phức thỏa mãn sao $|w| = 2$ và $|z - w| = \sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z - 3w|$.

A. $P = \sqrt{13}$. **B.** $P = 2\sqrt{13}$. **C.** $P = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **D.** $P = \sqrt{\dfrac{13}{2}}$.

Câu 2: Xét các số phức z, w thoả mãn $(z+2-4i)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo và $|w+2-2i| = 2$. Khi $|z-w| = 1$, giá trị của $|z+w+4-4i|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 3: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|3z - 4i| = |6 + 2iz|$ và $(\mathrm{w} - 3 + 4i)\left(\overline{\mathrm{w}} + 3 + 4i\right)$ là số thuần ảo. Khi $|z - w| = 3\sqrt{2}$, giá trị của $|2z + w|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{37}$. **D.** $3\sqrt{7}$.

Câu 4: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2 + 2i| = 1$, $|3z_1 - z_2| = 5$. Khi $|4z_2 + 1 + 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 5: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}.i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 3$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 4z_2|$ bằng

A. $25-\sqrt{213}$. **B.** $20-\sqrt{553}$. **C.** $25-\sqrt{489}$. **D.** $\sqrt{553}-25$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức $|z-m| = 4$ và $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 0. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 12.

Câu 7: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+\mathrm{i})|z|z-(1-2\mathrm{i})z| = |1+3\mathrm{i}|$ và $|z_1 - 3z_2| = 2$. Tính $Q = |2z_1 + 3z_2|$

A. $Q=\sqrt{5}$. **B.** $Q=5$. **C.** $Q=2\sqrt{15}$. **D.** $Q=\sqrt{6}$.

Câu 8: Cho số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z-3+i| = 2\sqrt{2}$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo. Tìm môđun của số phức z.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 3.

Câu 9: Xét các số phức z và w $(w \neq 2i)$ thỏa $|z| = 4$ và $\frac{w+2i}{w-2i}$ là số thuần ảo. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của z và iw. Biết $\widehat{MON} = 60^o$. Tính $|z^2 + 4w^2|$.

A. 16. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** 12.

Câu 10: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2iz_2| = 4$. Giá trị của $|2iz_1 + z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M + m^2$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$.. **B.** 11. **C.** 7.. **D.** $4+\sqrt{7}$.

Câu 12: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|\mathrm{z}^2 + (2+2i)\mathrm{z} - 1 + 2\mathrm{i}|$. Biết số phức z thỏa mãn $|z+1+2i| = 2$ .Khi đó, giá trị của biểu thức $\mathrm{W} = M + m\sqrt{2}$ bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 13: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=1$, $z_2.\overline{z_2}=4$ và $|z_1+2z_2|=\sqrt{13}$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 14: Gọi A, B là hai điểm tương ứng biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy. Biết $|z_1|=|z_1-z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Diện tích tam giác OAB là

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 15: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z+\mathrm{w}|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{w}+\overline{z}.w=-8$. Khi giá trị của $|2z+\mathrm{w}|=\sqrt{17}$ giá trị của $|\overline{z}-3\overline{\mathrm{w}}|$ bằng

A. $\sqrt{50}$. **B.** $\sqrt{110}$. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{146}$.

Câu 16: Có bao nhiêu số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thoả mãn: $|z-2+i|+|z-5-2i|=\sqrt{58}$ và $(z-2+i)(\overline{z}-2+i)\le 4$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 17: Cho hai số phức z_1, $z_2\neq -1$ thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=2$, $\dfrac{z_2-1}{z_2+1}$ là số thuần ảo và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 18: Cho số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Mođun của số phức z là

A. $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $|z|=1$. **C.** $|z|=\sqrt{3}$. **D.** $|z|=2$.

Câu 19: Cho hai số phức z và w thoả mãn: $|z|=1, |w|=4$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức iz, w. Biết $\widehat{AOB}=60^0$. Khi đó giá trị của biểu thức $|16z^2+w^2|$ bằng

A. 12. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 20: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z|=2 \\ |z^3+4|=12 \end{cases}$.?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 21: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=3$, $z_2+z_3=0$ và $z_1z_2z_3=9(z_1+z_2)$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $9\sqrt{3}$. **D.** 18

Câu 22: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1-2z_2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=2z_1+z_2$ là đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 23: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z-1-i|=|2w-2-2i|=4$ và $|z-w|=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+w|$ gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. $7,3$. **B.** $7,4$. **C.** $8,3$. **D.** $8,4$.

Câu 24: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=2|\overline{w}|=4$ và $|z-w|=2\sqrt{5}$. Tính mô đun của số phức $z+3w$

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 25: Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+i|=6$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 26: Cho hai số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=m\sqrt{2}$ $(m>0)$ và $|z_1+z_2|=|(1+i)z_1|$. Tìm m để số phức $z=z_1-z_2-2-i\sqrt{5}$ có môđun lớn nhất bằng 2024.

A. $\frac{2021\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2021}{2}$. **C.** $\frac{2015}{2}$. **D.** 2021.

Câu 27: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Câu 28: Xét các số phức z, w $(w\neq -i)$ thỏa mãn $|z|=3$ và $\frac{iw+1}{iw-1}$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=2\sqrt{2}$, giá trị $|z^2-zw-6w^2|$ của bằng

A. $2\sqrt{51}$. **B.** $\sqrt{51}$. **C.** $3\sqrt{51}$. **D.** $3\sqrt{17}$.

Câu 29: Cho hai số phức $z;w$ thỏa mãn: $|z-2i|=|(i-1)z+1+i|$; $|w-2i|=|(i+1)w+1-i|$. Biết $|z+w|=\sqrt{7}$, tính $|z-w|$

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Giả sử z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $(z+6)(8-i\overline{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$. Tính giá trị lớn nhất của $|z_1 + 2z_2|$

A. $15+3\sqrt{17}$. **B.** $5+\sqrt{17}$. **C.** $15-3\sqrt{17}$. **D.** $20+3\sqrt{15}$.

Câu 31: Cho số phức z và số phức $u=(z-i)(\overline{z}+i)+2z-3i$ thỏa mãn $|u+1|=|\overline{u}-i|$.Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-1+2i|$ bằng:

A. $\sqrt{23}-1$. **B.** $1+2\sqrt{5}$. **C.** $2+\sqrt{15}$. **D.** $5-\sqrt{17}$.

Câu 32: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $(\overline{z}-1+2i)(zi+2+3i)$ là số thực. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+2z_2|$ gần với kết quả nào nhất dưới đây?

A. $4,2$. **B.** $3,5$. **C.** $3,2$ **D.** $10,2$.

Câu 33: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ có phần thực dương và thỏa mãn $|z_1-2+5i|=\sqrt{13}$; $(z_1+2i)(z_2-2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b+c$ bằng:

A. 16. **B.** 24. **C.** -16. **D.** 4.

Câu 34: Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4-3i|=|\overline{z}-2+i|$. Khi giá trị biểu thức $Q=|z+2-3i|+|z-1+2i|$ nhỏ nhất, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=25$. **B.** $P=\dfrac{353}{25}$. **C.** $P=\dfrac{401}{32}$. **D.** $P=233$.

Câu 35: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=5\sqrt{2},\ |w|=5,\ |z-w|=\sqrt{85}$. Xét số phức $\dfrac{z}{w}=a+bi$

$\dfrac{z}{w}=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Tìm $2a+|b|$

A. $2a+|b|=\dfrac{9}{5}$. **B.** $2a+|b|=1$. **C.** $2a+|b|=2$. **D.** $2a+|b|=\dfrac{6}{5}$.

Câu 36: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=3$ và $(w-2+3i)(\overline{w}+2+3i)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=\sqrt{7}$, giá trị của $|2z-w|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** 15. **D.** 10.

Câu 37: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức $|z+\overline{z}|^2+2|z-\overline{z}|^2=16$ và $z_1+2z_2=3$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1-z_2|$

A. $\dfrac{3\sqrt{66}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{66}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{77}}{8}$.

Câu 38: Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 39: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+\mathrm{i})|z|z-(1-2\mathrm{i})z\right|=|1+3\mathrm{i}|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|3z_1+4z_2|$.

A. $M=19$. **B.** $M=37$. **C.** $M=\sqrt{37}$. **D.** $M=25$.

Câu 40: Cho hai số phức z_1, $z_2\neq 2$ thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=2$, $\frac{z_2+2}{z_2-2}$ là số thuần ảo và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Câu 41: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 42: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2$ và $|2z_1-3z_2|=2\sqrt{7}$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** 28.

Câu 43: Cho số phức z thay đổi thoả mãn $|z|=|z-6-6i|$. Gọi S là tập hợp các số phức $\mathrm{w}=\frac{12z}{|z^2|}$. Biết rằng w_1, w_2 là hai số thuộc S sao cho $|w_1-w_2|=2$, mô đun của số phức w_1+w_2-2-2i bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 44: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$ và $(\mathrm{w}-3+4i)\left(\overline{\mathrm{w}}+3+4i\right)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=3\sqrt{2}$, giá trị của $|2z+w|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{47}$. **C.** $\sqrt{63}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 45: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z-1+2i|=1$ và $(\mathrm{w}-1+2i)\left(\overline{\mathrm{w}}-1-2i\right)=4$. Khi $|z-w|=2$, giá trị của $|z+w-2+4i|$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 46: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1^2=z_2z_3\\ |z_1-z_2|=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, với $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|$.

Tính M^2.

A. $3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 47: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Tìm bình phương của môđun số phức $w=z_1+z_2-6+10i$.

A. 16. **B.** 36. **C.** 8. **D.** 64.

Câu 48: Xét các số phức $z,w\left(w\neq 4\right)$ thỏa mãn $|z|=3$ và $\dfrac{w+4}{w-4}$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=\sqrt{13}$, giá trị của $|3z+2w|$ bằng

A. $\sqrt{74}$. **B.** $\sqrt{73}$. **C.** $\sqrt{219}$. **D.** $\sqrt{217}$.

Câu 49: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z|=2,\left(w+i\right)\left(\overline{w}+i\right)+\left(4+i\right)\left(1+7i\right)$ là số thuần ảo và $|z+2w|=4$. Giá trị của $|2z-w|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Câu 50: Cho hai số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn: $|z-2i|=|\left(i-1\right)z+1+i|$; $|w-2i|=|\left(i+1\right)w+1-i|$. Biết $|z-w|=1$, tính $|z+w|$

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 51: Cho hai số phức z, w thỏa mãn điều kiện $|2z-3i|=\sqrt{3}|2+iz|$ và $|z-w|=2$. Môđun $|2z+3w|$ bằng

A. $\sqrt{52}$. **B.** $\sqrt{53}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{51}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho số phức z thỏa $|3z-i|=|3+iz|$. Gọi w số phức thỏa mãn sao $|w|=2$ và $|z-w|=\sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $P=|2z-3w|$.

A. $P=\sqrt{13}$. **B.** $P=2\sqrt{13}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{13}}{2}$. **D.** $P=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$ với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|3z-i|=|3+iz| \Leftrightarrow |3x+(3y-1)i|=|3-y+ix| \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+(3y-1)^2}=\sqrt{x^2+(3-y)^2}$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ (1)

Đặt $w=a+bi$ với a, b $\in\mathbb{R}$.

$|w|=2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=4$ (2)

$|z-w|=\sqrt{7} \Leftrightarrow |(x-a)+(y-b)i|=\sqrt{7} \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=7$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)+\left(a^2+b^2\right)-2(ax+by)=7$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $ax+by=-1$

$$P=|2z-3w|=|(2x-3a)+(2y-3b)i|=\sqrt{(2x-3a)^2+(2y-3b)^2}$$
$$=\sqrt{4(x^2+y^2)+9(a^2+b^2)-12(ax+by)}=2\sqrt{13}.$$

Câu 2: Xét các số phức $z,\ w$ thoả mãn $(z+2-4i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo và $|w+2-2i|=2$. Khi $|z-w|=1$, giá trị của $|z+w+4-4i|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải

Gọi A,B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $z,\ w$.

Đặt $z=x+iy,\ (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $(z+2-4i)(\bar{z}+2)=\left[x+2+(y-4)i\right].\left[x+2-yi\right]$ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow (x+2)^2+y(y-4)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=4$

Suy ra A thuộc đường tròn tâm $I(-2;2)$, bán kính $R=2$.

$|w+2-2i|=2 \Leftrightarrow IB=2 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $I(-2;2)$, bán kính $R=2$.

$|z-w|=1 \Rightarrow AB=1$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ và H là điểm biểu diễn số phức $\frac{z+w}{2}$

Ta có $IH = \sqrt{R^2 - HA^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \left|\frac{z+w}{2} + 2 - 2i\right| = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |z+w+4-4i| = \sqrt{15}$.

Câu 3: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|3z-4i| = |6+2iz|$ và $(w-3+4i)(\overline{w}+3+4i)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w| = 3\sqrt{2}$, giá trị của $|2z+w|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{37}$. **D.** $3\sqrt{7}$.

Lời giải

+) Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ thì $|3z-4i| = |6+2iz| \Leftrightarrow |3(x+yi)-4i| = |6+2xi-2y|$

$\Leftrightarrow |3x+(3y-4)i| = |6-2y+2xi| \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+(3y-4)^2} = \sqrt{(6-2y)^2+4x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$.

+) Đặt $w = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ thì $(w-3+4i)(\overline{w}+3+4i) = (a-3+(b+4)i)(a+3+(-b+4)i)$

Vì $(w-3+4i)(\overline{w}+3+4i)$ là số thuần ảo $(a-3)(a+3)-(b+4)(-b+4) = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow |w| = 5$.

+) $|z-w| = 3\sqrt{2} \Rightarrow 18 = |z-w|^2 = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \Rightarrow 18 = |z|^2 - (z\overline{w}+\overline{z}w) + |w|^2$

$\Rightarrow 18 = 4 - (z\overline{w}+\overline{z}w) + 25 \Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w = 11$.

+) Đặt $P = |2z+w|$

Ta có $P^2 = |2z+w|^2 = (2z+w)(2\overline{z}+\overline{w}) = 4|z|^2 + 2(z\overline{w}+\overline{z}w) + |w|^2 = 16 + 22 + 25 = 63$

$\Rightarrow P = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$, chọn D

Cách 2:

$|3z-4i| = |6+2iz| \Leftrightarrow (3z-4i)(3\overline{z}+4i) = (6+2iz)(6-2i\overline{z}) \Leftrightarrow 9|z|^2 + 16 = 36 + 4|z|^2 \Leftrightarrow |z| = 2$

$(w-3+4i)(\overline{w}+3+4i) = (|w|^2 - 25) + \left[3(w-\overline{w}) + 4i(w+\overline{w})\right]$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow |w| = 5$.

Do đó $|2z+w| = \sqrt{4|z|^2 + |w|^2 + 2(z\overline{w}+\overline{z}w)} = \sqrt{6|z|^2 + 3|w|^2 - 2|z-w|^2} = 3\sqrt{7}$.

Câu 4: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2 + 2i| = 1, |3z_1 - z_2| = 5$. Khi $|4z_2 + 1 + 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = z_1 + z_2 \\ v = 3z_1 - z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{u+v}{4} \\ z_2 = \dfrac{3u-v}{4} \end{cases}$ và $\begin{cases} |u+2i| = 1 \\ |v| = 5 \end{cases}$

Đặt $P = |4z_2 + 1 + 6i| = |3u - v + 1 + 6i| = |3(u+2i) - (v-1)|$

$P \geq \big|3|u+2i| - |v-1|\big| = \big|3 - |v-1|\big|$

mà $\big||v|-1\big| \leq |v-1| \leq |v|+1$ hay $4 \leq |v-1| \leq 6$

Do đó $P \geq 1$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} v = 5 \\ u + 2i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - 2i \\ v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{3-i}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1-3i}{2} \end{cases}$

$|z_1 + 3z_2| = |-5i| = 5$.

Câu 5: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}.i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 3$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 4z_2|$ bằng

A. $25 - \sqrt{213}$. **B.** $20 - \sqrt{553}$. **C.** $25 - \sqrt{489}$. **D.** $\sqrt{553} - 25$.

Lời giải

Chọn C

+ Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Vì $[(x-6)+yi][(y+8)+xi]$ là số thực nên $x(x-6) + y(y+8) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

$\Leftrightarrow |z - 3 + 4i| = 5 \Rightarrow \begin{cases} |z_1 - 3 + 4i| = 5 \\ |z_2 - 3 + 4i| = 5 \end{cases}$.

+Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 - 3 + 4i \\ w_2 = z_2 - 3 + 4i \end{cases}$, khi đó: $|w_1| = |w_2| = 5$

Vì $|z_1 - z_2| = 3 \Rightarrow |w_1 - w_2| = 3 \Rightarrow 9 = (w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) \Leftrightarrow 9 = |w_1|^2 + |w_2|^2 - w_1\overline{w}_2 - \overline{w}_1 w_2$

$\Rightarrow w_1\overline{w}_2 + \overline{w}_1 w_2 = 16$;

$|w_1 + 4w_2| = \sqrt{|w_1|^2 + 16|w_2|^2 + 4(w_1\overline{w}_2 + \overline{w}_1 w_2)} = \sqrt{489}$.

Suy ra $|z_1 + 4z_2 - 15 + 20i| = \sqrt{489}$.

$+|z_1 + 4z_2| = |(z_1 + 4z_2 - 15 + 20i) + (15 - 20i)| \geq \big||z_1 + 4z_2 - 15 + 20i| - |15 - 20i|\big| = -\sqrt{489} + 25$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\exists k\in\mathbb{R}, k\le 0: z_1+4z_2-15+20i=k(15-20i)\\ |z_1+4z_2-15+20i|=\sqrt{489}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{\sqrt{489}}{25}\\ z_1+4z_2=\left(1-\dfrac{\sqrt{489}}{25}\right)(15-20i)\end{cases}$$

Vậy $\min|z_1+4z_2|=25-\sqrt{489}$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức $|z-m|=4$ và $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 0. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 12.

Lời giải

Điều kiện $z\ne 6$

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{Z})$

Ta có $|z-m|=4\Leftrightarrow|x-m+yi|=4\Leftrightarrow(x-m)^2+y^2=16\,(C)$.

Lại có $\dfrac{z}{z-6}=1+\dfrac{6}{z-6}=1+\dfrac{6}{x-6+yi}=1+\dfrac{6(x-6-yi)}{(x-6)^2+y^2}=\dfrac{6(x-6)}{(x-6)^2+y^2}-\dfrac{6i}{(x-6)^2+y^2}i$.

Khi đó $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo khi $1+\dfrac{6(x-6)}{(x-6)^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow(x-6)^2+y^2+6(x-6)=0\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=9\ (C')$.

Như vậy (C) có tâm $I(m;0)$, bán kính $R=4$ và (C') có tâm $I'(3;0)$, bán kính $R'=3$.

Do đó $\overrightarrow{II'}=(3-m;0)\Rightarrow II'=|m-3|$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(C)$ và (C') tiếp xúc trong hoặc tiếp xúc ngoài

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}II'=|R-R'|=1\\ II'=R+R'=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|m-3|=1\\ |m-3|=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=2\\ m=10\\ m=-4\end{array}\right.\Rightarrow S=12.$$

Câu 7: Giả sử z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+\mathrm{i})|z|z-(1-2\mathrm{i})z\right|=|1+3\mathrm{i}|$ và $|z_1-3z_2|=2$. Tính $Q=|2z_1+3z_2|$

A. $Q=\sqrt{5}$. **B.** $Q=5$. **C.** $Q=2\sqrt{15}$. **D.** $Q=\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $\left|(2|z|-1)+(|z|+2)i\right|.|z|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2\right].|z|^2=10$

$\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10=0 \Leftrightarrow |z|=1$ (vì $|z|\geq 0$).

Ta có $|z_1|=|z_2|=1$

$|z_1-3z_2|=2 \Rightarrow |z_1-3z_2|^2=4 \Leftrightarrow (z_1-3z_2)(\overline{z_1}-3\overline{z_2})=4 \Leftrightarrow |z_1|^2-3(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+9|z_2|^2=4$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2$

$Q^2=|2z_1+3z_2|^2=4|z_1|^2+6(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+9|z_2|^2=25 \Rightarrow Q=5$.

Câu 8: Cho số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z-3+i|=2\sqrt{2}$ và $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo. Tìm môđun của số phức z.

A. 1.		**B.** $\sqrt{2}$.		**C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.		**D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $z\neq 2$.

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R};\ y>0$.

Ta có $|z-3+i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow x^2+y^2=6x-2y-2\ (1)$.

$$\frac{z}{z-2}=\frac{(x+yi)(x-2-yi)}{(x-2)^2+y^2}=\frac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}-\frac{2y}{(x-2)^2+y^2}i.$$

Mà $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $\dfrac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ (x;y)\neq(2;0)\end{cases} (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=8 \\ 4x-2y-2=0 \\ (x;y)\neq(2;0)\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(2x)^2=8 \\ y=2x-1 \\ (x;y)\neq(2;0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=1;y=1 \\ x=\frac{1}{5};y=-\frac{3}{5}\end{array}\right. \\ (x;y)\neq(2;0)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1;y=1 & (t/m) \\ x=\frac{1}{5};y=-\frac{3}{5} & (l)\end{array}\right..$$

Vậy ta có được $z=1+i \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.

Câu 9: Xét các số phức z và w $(w \neq 2i)$ thỏa $|z| = 4$ và $\dfrac{w+2i}{w-2i}$ là số thuần ảo. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của z và iw. Biết $\widehat{MON} = 60^o$. Tính $|z^2 + 4w^2|$.

A. 16. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Vì $|z| = 4$ nên tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm O và bán kính bằng 4.

Vì $\dfrac{w+2i}{w-2i}$ là số thuần ảo nên tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm O và bán kính bằng 2. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $2iw$ là đường tròn tâm O và bán kính bằng 4.

Gọi A và B là điểm biểu diễn của số phức $2iw$ và $-2iw$.

$|z^2 + 4w^2| = |z^2 - (2iw)^2| = |z - 2iw||z + 2iw| = MA.MB = 4.4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2iz_2| = 4$. Giá trị của $|2iz_1 + z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $|z_1| = |iz_2| = 2$.

Ta có: $16 = |z_1 + 2iz_2|^2 = (z_1 + 2iz_2)(\overline{z_1} + 2\overline{iz_2}) = |z_1|^2 + 4|iz_2|^2 + 2(z_1.\overline{iz_2} + \overline{z_1}.iz_2)$ (1)

$|2iz_1 + z_2|^2 = |2z_1 - iz_2|^2 = 4|z_1|^2 + |iz_2|^2 - 2(z_1.\overline{iz_2} + \overline{z_1}.iz_2)$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $|2iz_1 + z_2|^2 = 5|z_1|^2 + 5|iz_2|^2 - 16 = 9 \Leftrightarrow |2iz_1 + z_2| = 3$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M + m^2$ bằng

A. $4 - \sqrt{7}$.. **B.** 11. **C.** 7.. **D.** $4 + \sqrt{7}$.

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

Ta có $8 = |z-3| + |z+3| \geq |z - 3 + z + 3| = |2z| \Rightarrow |z| \leq 4$.

Do đó $M = max|z| = 4$.

Mà $|z-3|+|z+3|=8 \Leftrightarrow |x-3+yi|+|x+3+yi|=8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$8=1.\sqrt{(x-3)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+3)^2+y^2} \le \sqrt{(1^2+1^2)\left[(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 8 \le \sqrt{2(2x^2+2y^2+18)} \Leftrightarrow 2(2x^2+2y^2+18) \ge 64$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \ge \sqrt{7}$.

Do đó $m=min|z|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m^2=4+7=11$.

Câu 12: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z^2+(2+2i)z-1+2i|$. Biết số phức z thỏa mãn $|z+1+2i|=2$ .Khi đó, giá trị của biểu thức $W=M+m\sqrt{2}$ bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Đặt:

- $T=|z^2+(2+2i)z-1+2i|=|(z+i)(z+2+i)|$.
- $\alpha=z+i$ và $\alpha=a+bi$, điểm $B(a;b)$, biểu diễn số phức α.

Theo đề bài, ta có:

$|z+1+2i|=2 \Leftrightarrow |\alpha+1+i|=2 \Leftrightarrow |a+1+(b+1)i|=2 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=4$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=2-2a-2b$

Ta lại có:

$T=\ |\alpha|.|\alpha+2|$

$\Rightarrow T=\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{(a+2)^2+b^2}$

$=\sqrt{(2-2a-2b)(6+2a-2b)}$

$=2.\sqrt{(1-(a+b))(3+(a-b))}$

$=2.\sqrt{3-2a-4b-a^2+b^2}$

$=2.\sqrt{(b-2)^2-(a+1)^2}$

$=2.\sqrt{(b-2)^2+(b+1)^2-4}$

$= 2.\sqrt{2b^2 - 2b + 1}$

Ta đặt: $h(b) = 2b^2 - 2b + 1$, với $(a+1)^2 + (b+1)^2 = 4 \Rightarrow (b+1)^2 \le 4 \Rightarrow -3 \le b \le 1$

Xét hàm: $h(b) = 2b^2 - 2b + 1$ với $-3 \le b \le 1$

Ta có:

$h'(b) = 4b - 2$

$h'(b) = 0 \Rightarrow 4b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2} \in [-3;1]$

$h(-3) = 25,\ h(1) = 1,\ h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}.$

Vậy: $M = 2\sqrt{25} = 10;\ m = 2.\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Do đó: $W = M + m\sqrt{2} = 12.$.

Câu 13: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 1$, $z_2.\overline{z_2} = 4$ và $|z_1 + 2z_2| = \sqrt{13}$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Giả sử $z_1 = a + bi$, $(a,\ b \in \mathbb{R})$; $z_2 = c + di$, $(c,\ d \in \mathbb{R})$.

Ta có $z_2.\overline{z_2} = 4 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 4$

Kết hợp giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2|^2 = 4 \\ |z_1 + 2z_2| = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 4 \\ (a+2c)^2 + (b+2d)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 4 & (2) \\ a^2 + b^2 + 4(c^2 + d^2) + 4(ac + bd) = 13 & (3) \end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac + bd = -1$ (4).

Ta có $|2z_1 - z_2| = \sqrt{(2a-c)^2 + (2b-d)^2} = \sqrt{4(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 4(ac+bd)}$ (5).

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$.

Câu 14: Gọi A, B là hai điểm tương ứng biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy. Biết $|z_1| = |z_1 - z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Diện tích tam giác OAB là

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $8=2\left|z_1-z_2\right|^2=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2-2\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)$.

$16=\left|z_1+2z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+4\left|z_2\right|^2+2\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)$.

Suy ra $24=3\left|z_1\right|^2+6\left|z_2\right|^2\Leftrightarrow\left|z_2\right|=\sqrt{2}$ suy ra $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 15: Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|z+w\right|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{w}+\overline{z}.w=-8$. Khi giá trị của $\left|2z+w\right|=\sqrt{17}$ giá trị của $\left|\overline{z}-3\overline{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{50}$. **B.** $\sqrt{110}$. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{146}$.

Lời giải

Ta có: $\left|z+w\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left|z+w\right|^2=10\Leftrightarrow(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=10$

$\Leftrightarrow(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=10\Leftrightarrow\left|z\right|^2+z.\overline{w}+\overline{z}.w+\left|w\right|^2=10\Leftrightarrow\left|z\right|^2+\left|w\right|^2=18$ (1)

Tương tự

$\left|2z+w\right|=\sqrt{17}\Leftrightarrow4\left|z\right|^2+2(z.\overline{w}+\overline{z}.w)+\left|w\right|^2=17\Leftrightarrow4\left|z\right|^2+\left|w\right|^2=33$ (2)

Từ $(1),(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\left|z\right|^2=5\\ \left|w\right|^2=13\end{cases}$

Khi đó: $\left|\overline{z}-3\overline{w}\right|^2=\left|z\right|^2-3(z.\overline{w}+\overline{z}.w)+9\left|w\right|^2=146$

Vậy $\left|\overline{z}-3\overline{w}\right|=\sqrt{146}$.

Câu 16: Có bao nhiêu số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thoả mãn:
$\left|z-2+i\right|+\left|z-5-2i\right|=\sqrt{58}$ và $(z-2+i)\left(\overline{z}-2+i\right)\le4$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

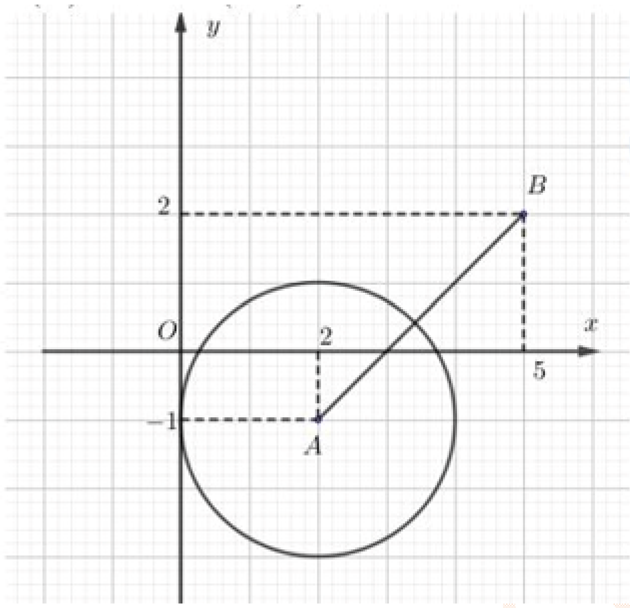
Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, $A(2;-1),B(5;2)$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z

Ta có $\left|z-2+i\right|+\left|z-5-2i\right|=\sqrt{58}\Leftrightarrow MA+MB=\sqrt{58}$, mà $AB=\sqrt{58}$ nên M nằm trong đoạn AB.

Lại có: $(z-2+i)\left(\overline{z}-2+i\right)\le4\Leftrightarrow\left|z-2+i\right|^2\le4\Leftrightarrow\left|z-2+i\right|\le2$.

Do đó, M thuộc hình tròn (C) có tâm $A(2;-1)$, bán kính $R=2$.



Dựa vào hình vẽ ta có 2 điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Do đó có 2 số phức thoả mãn yêu cầu.

Câu 17: Cho hai số phức z_1, $z_2 \neq -1$ thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 2$, $\frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$ là số thuần ảo và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

• Đặt $z_2 = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$,

• Ta có:

$$\frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} = \frac{(a-1) + bi}{(a+1) + bi} = \frac{[(a-1) + bi][(a+1) - bi]}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{(a^2 - 1 + b^2)}{(a+1)^2 + b^2} + \frac{((a+1)b - (a-1)b)i}{(a+1)^2 + b^2}$$

$\frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |z_2|^2 = 1$.

• $|z_1 + 2z_2| = 4 \Rightarrow 16 = |z_1 + 2z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1} + 2\overline{z_2}) = 16$

$\Rightarrow |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 16 \Rightarrow (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4$

Ta có $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4 + 1 - 4 = 1$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$.

Câu 18: Cho số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ là số thực. Mođun của số phức z là

A. $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $|z| = 1$. **C.** $|z| = \sqrt{3}$. **D.** $|z| = 2$.

Lời giải

Ta có $\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} = 1 + 2.\frac{z}{1 - z + z^2}$.

Vì $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực nên $\frac{z}{1-z+z^2}$ là số thực, suy ra $\frac{1-z+z^2}{z}$ là số thực.

Ta có $\frac{1-z+z^2}{z}=z+\frac{1}{z}-1$. Do đó $z+\frac{1}{z}$ là số thực.

Suy ra $z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}} \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z-\overline{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=0 \Leftrightarrow z-\overline{z}-\frac{z-\overline{z}}{z.\overline{z}}=0$

$\Leftrightarrow \left(z-\overline{z}\right)\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\overline{z} \\ |z|=1 \end{array}\right.$.

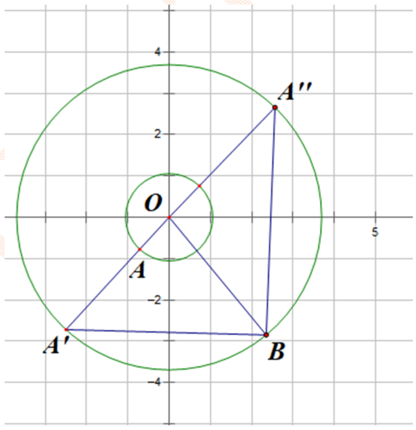
Với $z=\overline{z}$ thì số phức z có phần ảo bằng 0 nên loại.

Vậy $|z|=1$.

Câu 19: Cho hai số phức z và w thoả mãn: $|z|=1, |w|=4$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức iz, w. Biết $\widehat{AOB}=60^0$. Khi đó giá trị của biểu thức $\left|16z^2+w^2\right|$ bằng

A. 12. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $|w|=4$ nên điểm biểu diễn của số phức w là điểm B nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 4.

$|4iz|=|4||iz|=4$ nên điểm biểu diễn của số phức $4iw$ là điểm A' (A' là giao điểm của tia OA với đường tròn (C), điểm biểu diễn của số phức $-4iz$ là điểm A'' đối xứng với điểm A' qua O.

Theo giả thiết: $\widehat{AOB}=60^0 \Rightarrow \widehat{A'OB}=60^0; \widehat{A''OB}=120^0$

Ta có $\left|16z^2+w^2\right|=\left|w^2-(4iz)^2\right|=|w-4iz||w+4iz|=|w-4iz||w-(-4iz)|$

$=BA'.BA''=4.4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$.

Câu 20: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z|=2 \\ \left|z^3+4\right|=12 \end{cases}$.?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases}|z|=2\\|z^3+4|=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\\left|z^3+|z|^2\right|=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\|z^3+z\bar{z}|=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\|z(z^2+\bar{z})|=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\|z||z^2+\bar{z}|=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\|z^2+\bar{z}|=6\end{cases}$$

Giả sử $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\begin{cases}x^2+y^2=4 & (1)\\\left(x^2-y^2+x\right)^2+(2x-1)^2y^2=36 & (2)\end{cases}$

Từ $(1)\Rightarrow y^2=4-x^2$ thế vào (2) ta được:

$$\left(2x^2+x-4\right)^2+(2x-1)^2\left(4-x^2\right)=36$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x-2=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}\\x=2\Rightarrow y=0\end{array}\right.$$

Vậy có ba số phức thỏa mãn: $z=2;\ z=-1-\sqrt{3};\ z=-1+\sqrt{3}$.

Câu 21: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=3$, $z_2+z_3=0$ và $z_1z_2z_3=9(z_1+z_2)$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $9\sqrt{3}$. **D.** 18

Lời giải

Ta có $z_2+z_3=0\Leftrightarrow z_2=-z_3\Rightarrow|z_1|=|z_2|=|z_3|=3\Rightarrow$ Tam giác ABC nội tiếp $(O,3)$.

Mà $z_2=-z_3$ nên B đối xứng với C qua O hay BC là đường kính $(O,3)$ nên tam giác ABC vuông tại A và $BC=6$.

Ta có $z_1z_2z_3=9(z_1+z_2)\Rightarrow|z_1||z_2||z_3|=9|z_1+z_2|\Leftrightarrow|z_1+z_2|=3$.

Ta có $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow AB=|z_1-z_2|=3\sqrt{3}\Rightarrow AC=3\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1-2z_2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=2z_1+z_2$ là đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Gọi M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức z_1, z_2,ω trong mặt phẳng phức.

Suy ra $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ biểu diễn ω.

Vì $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=2\\|z_1-2z_2|=4\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{ON}|=2\ (1)\\|\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{ON}|=4\ (2)\end{cases}$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}^2-4\overrightarrow{OM}\overrightarrow{ON}+4\overrightarrow{ON}^2=16 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OM}\overrightarrow{ON}=4$ (vì từ (1) có $\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{ON}^2=4$).

Suy ra $|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}^2=\left(2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)^2=4\overrightarrow{OM}^2+4\overrightarrow{OM}\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON}^2=24$.

Từ đó $OP=2\sqrt{6}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=2z_1+z_2$ là đường tròn tâm O, bán kính bằng $2\sqrt{6}$.

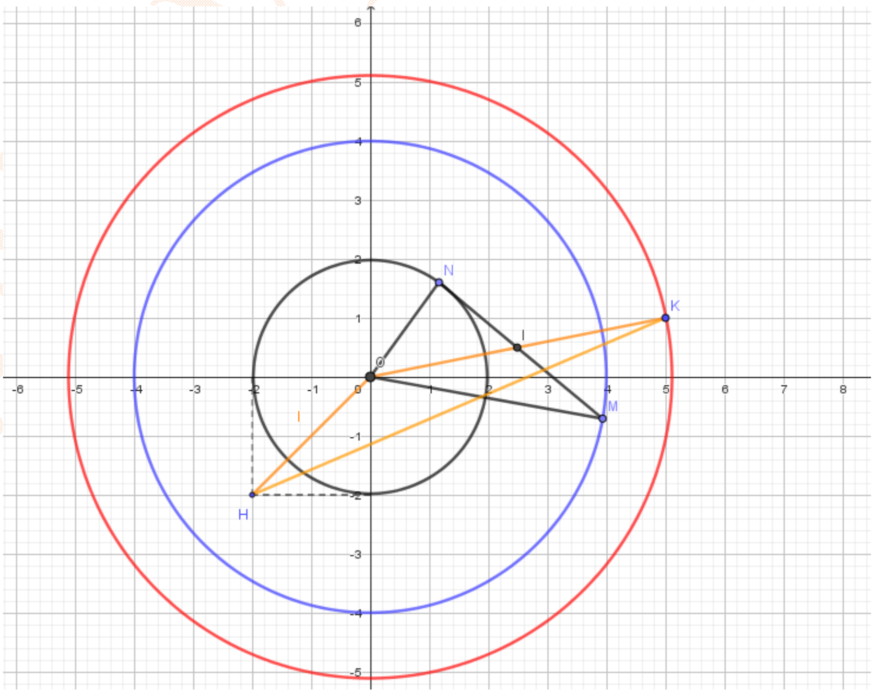
Câu 23: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z-1-i|=|2w-2-2i|=4$ và $|z-w|=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+w|$ gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. $7,3$. **B.** $7,4$. **C.** $8,3$. **D.** $8,4$.

Lời giải

Đặt $z'=z-1-i;w'=w-1-i\Rightarrow|z'|=4;|w'|=2;|z'-w'|=3$. Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z',w'\Rightarrow OM=4;ON=2;MN=3$. Gọi $H(-2;-2)$

Dễ thấy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là đường tròn tâm O bán kính bằng 4; quỹ tích điểm biểu diễn số phức w' là đường tròn tâm O bán kính bằng 2 (Tham khảo hình vẽ).



Xét tam giác ΔOMN với OI là trung tuyến kẻ từ O, ta có

$$OI^2=\frac{2.OM^2+2.ON^2-MN^2}{4}=\frac{31}{4}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{31}}{2}.$$

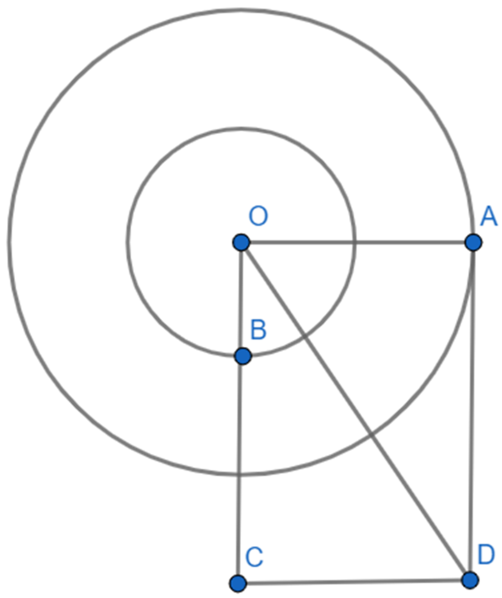
Gọi K là điểm biểu diễn số phức $z'+w' \Rightarrow \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2.\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ Quỹ tích điểm K là đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{31}$.

Khi đó ta có $P = |z+w| = |z'+w'+2+2i| = \left|\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}\right| = HK \le \sqrt{31} + 2\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2|\overline{w}| = 4$ và $|z-w| = 2\sqrt{5}$. Tính mô đun của số phức $z+3w$

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Lời giải



Gọi $z = a_1 + b_1 i$ được biểu diễn bởi điểm $A(a_1; b_1)$.

$w = a_2 + b_2 i$ được biểu diễn bởi điểm $B(a_2; b_2)$

Ta có $|z| = 4$ suy ra điểm A thuộc đường tròn tâm O bán kính $R_1 = 4$

$|\overline{w}| = |w| = 2$ suy ra điểm B thuộc đường tròn tâm O bán kính $R_2 = 2$

$|z-w| = AB = 2\sqrt{5}$

Ta thấy $OA^2 + OB^2 = 4^2 + 2^2 = 20 = AB^2$ suy ra tam giác OAB vuông tại O.

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $3w$ khi đó $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OB}$

$|z+3w| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right| = OD$ với D là đỉnh hình chữ nhật $OADC$

Theo Pitago ta có $OD = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

Câu 25: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+i|=6$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$.		**B.** $2\sqrt{5}$.		**C.** 6.		**D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu biểu diễn của số phức z_1, z_2.

Do hai số phức z_1, z_2 thoả mãn điều kiện $|z-2+i|=6$ nên M, N thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=6$.

Gọi số phức $z=x+yi \ (x, y \in \mathbb{R})$.

Mà $|z+1+mi|=|z+m+2i| \Leftrightarrow |(x+1)+(y+m)i|=|(x+m)+(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+m)^2}=\sqrt{(x+m)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow (2-2m)x+(2m-4)y-3=0$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng $d:(2-2m)x+(2m-4)y-3=0$.

Do đó M, N là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C).

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên khi $|z_1-z_2|$ lớn nhất thì MN là đường kính của đường tròn (C).

Khi đó $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=2|\overrightarrow{OI}|=2\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=m\sqrt{2}$ $(m>0)$ và $|z_1+z_2|=|(1+i)z_1|$. Tìm m để số phức $z=z_1-z_2-2-i\sqrt{5}$ có môđun lớn nhất bằng 2024.

A. $\frac{2021\sqrt{2}}{2}$.		**B.** $\frac{2021}{2}$.		**C.** $\frac{2015}{2}$.		**D.** 2021.

Lời giải

Giả sử $z_1=a+bi; z_2=c+di\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Giả thiết: $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=m\sqrt{2}\\ |z_1+z_2|=|(1+i)z_1|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=2m^2\\ (a+c)^2+(b+d)^2=2(a^2+b^2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=2m^2\\ (a+c)^2+(b+d)^2=4m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=2m^2\\ a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)=4m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=2m^2\\ ac+bd=0\end{cases}$

.

Do vậy: $|z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)=4m^2 \Rightarrow |z_1-z_2|=2m$.

Ta có: $|z| = |z_1 - z_2 - 2 - i\sqrt{5}| \le |z_1 - z_2| + |-2 - i\sqrt{5}| = 2m + 3$.

Do vậy số phức z có môđun lớn nhất bằng 2024 $\Leftrightarrow 2m + 3 = 2024 \Leftrightarrow m = \dfrac{2021}{2}$.

Câu 27: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

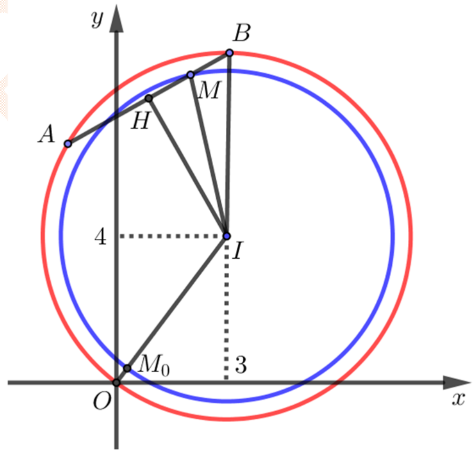
A. $5 - \sqrt{21}$. **B.** $20 - 4\sqrt{21}$. **C.** $20 - 4\sqrt{22}$. **D.** $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2.

Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.



Ta có $(z-6)(8+\overline{zi}) = [(x-6)+yi].[(8-y)-xi]$

$= (8x + 6y - 48) - (x^2 + y^2 - 6x - 8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên

ta suy ra $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C)

tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 5$.

Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = 2$ và $MA = \dfrac{3}{4}AB = 3 \Rightarrow HM = MA - HA = 1$.

Từ đó $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21$, $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OM_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \sqrt{22}$.

Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 4\sqrt{22}$.

Câu 28: Xét các số phức $z,\ w\ (w \neq -i)$ thỏa mãn $|z| = 3$ và $\dfrac{iw+1}{iw-1}$ là số thuần ảo. Khi $|z-w| = 2\sqrt{2}$, giá trị $|z^2 - zw - 6w^2|$ của bằng

A. $2\sqrt{51}$. **B.** $\sqrt{51}$. **C.** $3\sqrt{51}$. **D.** $3\sqrt{17}$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $w = x + yi$, ta có:

$\dfrac{iw+1}{iw-1} = \dfrac{1-y+xi}{-1-y+xi} = \dfrac{(1-y+xi)(-1-y-xi)}{(-1-y)^2 + x^2}$ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow (1-y)(-1-y) + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$

Ta có:

+) $|z^2 - zw - 6w^2| = |(z+2w)(z-3w)| = |z+2w|.|z-3w|$

+) $|z+2w|^2 + 2|z-w|^2 = (z+2w)(\overline{z}+2\overline{w}) + 2(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = 3|z|^2 + 6|w|^2 \Rightarrow |z+2w| = \sqrt{17}$

+) $|z-3w|^2 - 3|z-w|^2 = (z-3w)(\overline{z}-3\overline{w}) - 3(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = -2|z|^2 + 6|w|^2 \Rightarrow |z+2w| = 2\sqrt{3}$

Do đó: $|z^2 - zw - 6w^2| = 2\sqrt{51}$

Cách 2: Gọi $A,\ B$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $z,\ w$.

Ta có: $|z| = 3 \Leftrightarrow OA = 3$

Đặt $w = x + yi$, ta có:

$\dfrac{iw+1}{iw-1} = \dfrac{1-y+xi}{-1-y+xi} = \dfrac{(1-y+xi)(-1-y-xi)}{(-1-y)^2 + x^2}$ là số thuần ảo

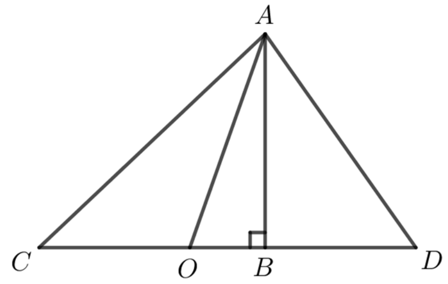
$\Leftrightarrow (1-y)(-1-y) + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow OB = 1$

$|z-w| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}$

Ta thấy: $OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại B.

Ta có: $|z^2 - zw - 6w^2| = |(z+2w)(z-3w)| = |z+2w|.|z-3w| = AC.AD$

Với $C,\ D$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $-2w,\ 3w$.



Ta có: $OC = 2OB = 2;\ OD = 3OB = 3 \Rightarrow BC = 3;\ BD = 2$

Do đó: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{17};\ AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Vậy $\left|z^2 - zw - 6w^2\right| = AC.AD = 2\sqrt{51}$.

Câu 29: Cho hai số phức $z; w$ thỏa mãn: $|z-2i| = |(i-1)z+1+i|$; $|w-2i| = |(i+1)w+1-i|$. Biết $|z+w| = \sqrt{7}$, tính $|z-w|$

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\begin{cases} z = a+bi \\ w = c+di \end{cases} \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$|z-2i| = |(i-1)z+1+i| \Leftrightarrow |z-2i| = |(i-1)||z-i|$

$\Leftrightarrow |z-2i| = \sqrt{2}|z-i|$

$\Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 = 2\left[a^2 + (b-1)^2\right] \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\ (1)$

$|w-2i| = |(i+1)w+1-i| \Leftrightarrow |w-2i| = |(i+1)||w-i|$

$\Leftrightarrow |w-2i| = \sqrt{2}|w-i|$

$\Leftrightarrow c^2 + (d-2)^2 = 2\left[c^2 + (d-1)^2\right] \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 2\ (2)$

Mà $|z+w| = \sqrt{7} \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 7 \Leftrightarrow 2(ac+bd) = 3 \Leftrightarrow ac+bd = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $|z-w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd)} = 1$.

Câu 30: Giả sử z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $(z+6)(8-i\bar{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$. Tính giá trị lớn nhất của $|z_1 + 2z_2|$

A. $15 + 3\sqrt{17}$. **B.** $5 + \sqrt{17}$. **C.** $15 - 3\sqrt{17}$. **D.** $20 + 3\sqrt{15}$.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2

Ta có: $(z+6)(8-i\bar{z})=(x+6+yi)(8-y-xi)=(x+6)(8-y)+xy+[-x(x+6)+(8-y)y]i$

Theo giả thiết $(z+6)(8-i\bar{z})$ là số thực nên ta có:

$-x^2-y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x-8y=0$.

Suy ra A,B thuộc đường tròn tâm $I(-3;4)$ bán kính $R=5$

$|z_1-z_2|=6 \Leftrightarrow AB=6$

Gọi M là điểm thuộc đoạn AB sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OM}$

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow IH \perp AB$ và $IH=\sqrt{R^2-HB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Trong tam giác vuông IHM ta có: $IM^2=IH^2+HM^2=4^2+1^2=17 \Rightarrow IM=\sqrt{17}$

Suy ra M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R'=\sqrt{17}$

Ta có: $|z_1+2z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|3\overrightarrow{OM}\right|=3OM$ đạt giá trị lớn nhất khi OM đạt giá trị lớn nhất.

$OM_{\max}=OI+R'=5+\sqrt{17}$

Vậy $|z_1+2z_2|_{\max}=3OM_{\max}=15+3\sqrt{17}$.

Câu 31: Cho số phức z và số phức $u=(z-i)(\bar{z}+i)+2z-3i$ thỏa mãn $|u+1|=|\bar{u}-i|$.Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-1+2i|$ bằng:

A. $\sqrt{23}-1$. **B.** $1+2\sqrt{5}$. **C.** $2+\sqrt{15}$. **D.** $5-\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi $u=x+yi$ với $x,y\in R$. Ta có:

$|u+1|-|\bar{u}-i|=0 \Leftrightarrow |x+yi+1|=|x-yi-i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x=y$. Do đó số phức u có phần thực bằng phần ảo.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in R$. Ta có:

$u=(z-i)(\bar{z}+i)+2z-3i=|z|^2+i(z-\bar{z})+1+2z-3i=a^2+b^2+i(2bi)+1+2(a+bi)-3i$

$=(a^2+b^2+2a-2b+1)+(2b-3)i$

Suy ra: $(a^2+b^2+2a-2b+1)=(2b-3) \Leftrightarrow (a+1)^2+(b-2)^2=1$

Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=1$

Biểu thức $T=|z-1+2i|=MA$, với điểm M biểu diễn số phức z và nằm trên đường tròn (C); điểm $A(1;-2)$. Suy ra $T=MA\le MI+IA=R+IA=1+2\sqrt{5}$.

Câu 32: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $(\bar{z}-1+2i)(zi+2+3i)$ là số thực. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 2z_2|$ gần với kết quả nào nhất dưới đây?

A. $4,2$. **B.** $3,5$. **C.** $3,2$ **D.** $10,2$.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(\bar{z} - 1 + 2i)(zi + 2 + 3i) = [(x-1) + (-y+2)i][(2-y) + (x+3)i]$ là số thực

$\Rightarrow (x-1)(x+3) + (2-y)(2-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 + (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

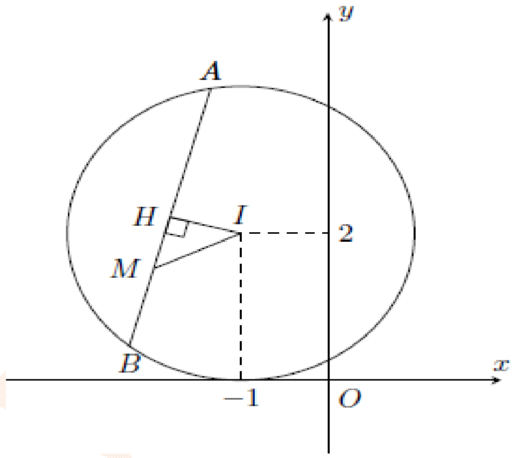
$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi A là điểm biểu diễn của z_1, B là điểm biểu diễn của z_2. $\Rightarrow A, B \in (C)$

Theo đề bài $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Khi đó $P = |z_1 + 2z_2| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})| = |3\overrightarrow{OM}| = 3OM$



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow IH = \sqrt{IB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 1$

Ta có $MH = \frac{1}{3}HB = \frac{1}{6}AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IM = \sqrt{IH^2 + MH^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R' = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow P = 3OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM = OI - R' = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $P_{\min} = 3 \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$.

Câu 33: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ có phần thực dương và thỏa mãn $|z_1 - 2 + 5i| = \sqrt{13}$; $(z_1 + 2i)(z_2 - 2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b + c$ bằng:

A. 16. **B.** 24. **C.** -16. **D.** 4.

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu các nghiệm của phương trình là các số thực $x; y$ thì

$|z_1-2+5i|=|(x-2)+5i|=\sqrt{(x-2)^2+25}>\sqrt{13}$ mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 2: Các nghiệm phức của phương trình không là các số thực, khi đó với $z_1=x+yi\ (x>0)\Rightarrow z_2=\overline{z_1}=x-yi$.

Khi đó: $|z_1-2+5i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+5)^2=13\quad(1)$.

Và:

$(z_1+2i)(z_2-4)=[x+(y+2)i].[(x-4)-yi]=x.(x-4)+y.(y+2)+[(x-4).(y+2)-xy].i$

là số phức thuần ảo khi và chỉ khi phần thực bằng 0 tức là:

$x.(x-4)+y.(y+2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y=0\quad(2)$.

Giải hệ gồm (1) và (2): $\begin{cases}(x-2)^2+(y+5)^2=13\\ x^2+y^2-4x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\ x^2+y^2-2x+2y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=0\ (l)\end{array}\right.\\ y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}$.

$\Rightarrow z_1=4-2i; z_2=4+2i$.

Vì vậy theo Vi-et ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=-b=(4-2i)+(4+2i)=4\\ z_1.z_2=c=(4-2i).(4+2i)=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\ c=20\end{cases}$

$\Rightarrow b+c=-4+20=16$.

Câu 34: Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4-3i|=|\overline{z}-2+i|$. Khi giá trị biểu thức $Q=|z+2-3i|+|z-1+2i|$ nhỏ nhất, tính $P=a^2+b^2$.

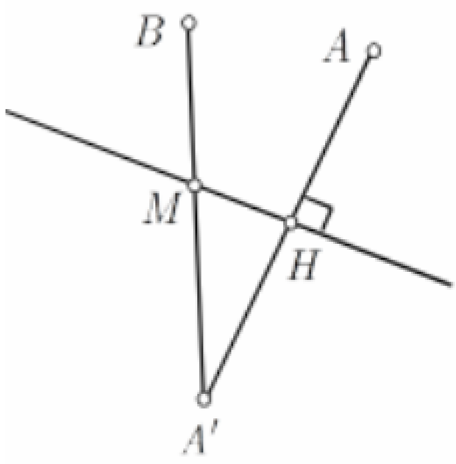
A. $P=25$. **B.** $P=\dfrac{353}{25}$. **C.** $P=\dfrac{401}{32}$. **D.** $P=233$.

Lời giải

Ta có: $|z-4-3i|=|\overline{z}-2+i|\Leftrightarrow(a-4)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b-1)^2\Leftrightarrow a+b-5=0$.

Do đó, tập hợp các điểm biểu diễn $M(a;b)$ của z là đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$.

Lại có $Q=MA+MB$ với $A(-2;3)$; $B(1;-2)$. Nhận thấy A, B cùng phía so với Δ.



Gọi d là đường thẳng đi qua A vuông góc với $\Delta \Rightarrow d: x-y+c=0$.

Có $A \in d \Rightarrow -2-3+c=0 \Leftrightarrow c=5$. Vậy phương trình $d: x-y+5=0$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua $\Delta \Rightarrow H = d \cap \Delta \Rightarrow$ tọa độ điểm H thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow H(0;5)$. Mà H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(2;7)$

Ta có $\overrightarrow{A'B} = (-1;-9) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $(A'B): 9x-y-11=0$.

Khi đó $Q = MA + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{82} \Rightarrow Q_{\min} = \sqrt{82}$.

Dấu bằng xảy ra khi M, A, B thẳng hàng hay $M = \Delta \cap A'B$.

Vậy $\begin{cases} a+b=5 \\ 9a-b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{5} \\ b=\dfrac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{353}{25}$.

Câu 35: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 5\sqrt{2},\ |w| = 5,\ |z-w| = \sqrt{85}$. Xét số phức $\dfrac{z}{w} = a+bi$

$\dfrac{z}{w} = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm $2a+|b|$

A. $2a+|b| = \dfrac{9}{5}$. **B.** $2a+|b| = 1$. **C.** $2a+|b| = 2$. **D.** $2a+|b| = \dfrac{6}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} |z| = 5\sqrt{2} & (1) \\ |w| = 5 & (2) \\ |z-w| = \sqrt{85} & (3) \end{cases}$

Đặt $z_0 = \dfrac{z}{w} = a+bi \Rightarrow z = z_0.w$ (4)

Thay (4) vào (1) và (3) ta được: $\begin{cases} |z_0|.|w| = 5\sqrt{2} \\ |z_0-1|.|w| = \sqrt{85} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_0| = \sqrt{2} \\ |z_0-1| = \dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a-1)^2+b^2=\dfrac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a=-\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm\dfrac{7}{5} \\ a=-\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Vậy: $2a+|b|=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{5}=1$.

Câu 36: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=3$ và $(w-2+3i)(\overline{w}+2+3i)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=\sqrt{7}$, giá trị của $|2z-w|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

* Đặt $w=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, $P=|2z+w|$

Ta có:

$(w-2+3i)(\overline{w}+2+3i)=(a-2+(b+3)i)(a+2+(3-b)i)$

$=a^2-4+b^2-9+[(a-2)(3-b)+(b+3)(a+2)]i$

$(w-2+3i)(\overline{w}+2+3i)$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2=13$

$\Rightarrow |w|=\sqrt{13}$

* Ta có: $|z-w|=\sqrt{7}\Rightarrow (z-w)(\overline{z}-\overline{w})=7$

$\Leftrightarrow |z|^2+|w|^2-(z\overline{w}+\overline{z}w)=7$

$\Leftrightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=|z|^2+|w|^2-7=3^2+13-7=15$

* $P^2=|2z+w|^2=(2z-w)(2\overline{z}-\overline{w})=4|z|^2+|w|^2-2(z\overline{w}+\overline{z}w)$

$=4.3^2+13-2.15=19$

$\Rightarrow P=\sqrt{19}$.

Câu 37: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức $|z+\overline{z}|^2+2|z-\overline{z}|^2=16$ và $z_1+2z_2=3$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1-z_2|$

A. $\dfrac{3\sqrt{66}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{66}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{77}}{8}$.

Lời giải

Gọi $z_2=x+yi,\ x,y\in R$ ta có

$|z+\overline{z}|^2+2|z-\overline{z}|^2=16\Rightarrow 4x^2+8y^2=16\Rightarrow x^2+2y^2=4$. (1)

Gọi $z_1=a+bi,\ a,b\in R$ ta cũng có $a^2+2b^2=4$ (2)

$z_1 + 2z_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} a + 2x = 3 \\ b + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - 2x \\ b = -2y \end{cases}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ (3 - 2x)^2 + 2(-2y)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y^2 = \dfrac{15}{32} \end{cases}$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \dfrac{3\sqrt{66}}{8}$.

Câu 38: Cho số phức z thoả mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$, vì $z \neq 0$ nên $a^2 + b^2 > 0$ $(*)$.

Khi đó $w = \dfrac{1+i}{z} = \dfrac{1+i}{a+bi} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a + b + (a-b)i\right] = \dfrac{a+b}{a^2+b^2} + \dfrac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên $a = b$ (1). Kết hợp $(*)$ suy ra $a = b \neq 0$.

Mặt khác: $|a - 2 + bi| = m \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = m^2$ (2). (Vì m là môđun nên $m \geq 0$).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2 + a^2 = m^2 \Leftrightarrow g(a) = 2a^2 - 4a + 4 - m^2 = 0$ (3).

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a \neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a \neq 0$

ĐK: $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 0 \\ 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \sqrt{2}$.

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a = 0$

ĐK: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 > 0 \\ 4 - m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2$.

Vậy có 2 giá trị thoả mãn yêu cầu bài toán đó là $\left[\begin{array}{l} m = \sqrt{2} \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Câu 39: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+\mathrm{i})|z|z - (1-2\mathrm{i})z\right| = |1+3\mathrm{i}|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |3z_1 + 4z_2|$.

A. $M = 19$. **B.** $M = 37$. **C.** $M = \sqrt{37}$. **D.** $M = 25$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\left|\left(2|z|-1\right)+\left(|z|+2\right)i\right|.|z|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\left(2|z|-1\right)^2+\left(|z|+2\right)^2\right].|z|^2=10$

$\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10=0\Leftrightarrow|z|=1$ (vì $|z|\geq 0$).

Gọi $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$. Ta có $|z_1|=|z_2|=1$ nên $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=1$.

Mặt khác, $|z_1-z_2|=1$ nên $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$. Suy ra $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$.

Khi đó $M=|3z_1+4z_2|=\sqrt{(3x_1+4x_2)^2+(3y_1+4y_2)^2}$

$=\sqrt{9\left(x_1^2+y_1^2\right)+16\left(x_2^2+y_2^2\right)+24\left(x_1x_2+y_1y_2\right)}$

Vậy $M=\sqrt{37}$.

Câu 40: Cho hai số phức z_1, $z_2\neq 2$ thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=2$, $\frac{z_2+2}{z_2-2}$ là số thuần ảo và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

• Đặt $z_2=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$,

• Ta có:

$\frac{z_2+2}{z_2-2}=\frac{(a+2)+bi}{(a-2)+bi}=\frac{\left[(a+2)+bi\right]\left[(a-2)-bi\right]}{(a-2)^2+b^2}=\frac{\left(a^2-4+b^2\right)}{(a-2)^2+b^2}+\frac{\left((a-2)b-(a+2)b\right)i}{(a-2)^2+b^2}$

$\frac{z_2+2}{z_2-2}$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2=4\Rightarrow|z_2|^2=4$.

• $|z_1+2z_2|=4\Rightarrow 16=|z_1+2z_2|^2\Leftrightarrow(z_1+2z_2)\left(\overline{z_1}+2\overline{z_2}\right)=16$

$\Rightarrow|z_1|^2+4|z_2|^2+2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=16\Rightarrow\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=-2$

Ta có $|2z_1-z_2|^2=(2z_1-z_2)\left(2\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=4|z_1|^2+|z_2|^2-2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=24$

$\Rightarrow|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$

Câu 41: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow|2x+(2y-1)i|=|2-y+xi|\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O;1)$

$\Rightarrow|z_1|=|z_2|=1$.

Ta có: $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)\Rightarrow P^2=1\Rightarrow P=1$.

Câu 42: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=2$ và $\left|2z_1-3z_2\right|=2\sqrt{7}$. Giá trị của $\left|2z_1-z_2\right|$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** 28.

Lời giải

Ta có:

$\left|2z_1-3z_2\right|^2-3\left|2z_1-z_2\right|^2=4\left|z_1\right|^2+9\left|z_2\right|^2-6\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)-12\left|z_1\right|^2-3\left|z_2\right|^2+6\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)$

$\Leftrightarrow 28-3\left|2z_1-z_2\right|^2=-32+24\Leftrightarrow\left|2z_1-z_2\right|=\sqrt{12}$

Câu 43: Cho số phức z thay đổi thoả mãn $|z|=|z-6-6i|$. Gọi S là tập hợp các số phức $w=\dfrac{12z}{\left|z^2\right|}$. Biết rằng w_1,w_2 là hai số thuộc S sao cho $\left|w_1-w_2\right|=2$, mô đun của số phức w_1+w_2-2-2i bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

$w=\dfrac{12z}{\left|z^2\right|}=\dfrac{12z}{|z|^2}=\dfrac{12z}{z.\overline{z}}=\dfrac{12}{\overline{z}}\Rightarrow\overline{z}=\dfrac{12}{w}$

Theo giả thiết ta có $|z|=|z-6-6i|\Rightarrow\left|\dfrac{12}{\overline{w}}\right|=\left|\dfrac{12}{\overline{w}}-6-6i\right|$

$\Leftrightarrow 12=\left|12-(6+6i)\overline{w}\right|\Leftrightarrow\dfrac{12}{6\sqrt{2}}=\left|1-i-\overline{w}\right|$

$\Leftrightarrow|w-1-i|=\sqrt{2}$

Đặt $t=w-1-i\Rightarrow|t|=\sqrt{2}$

$\left|t_1-t_2\right|=\left|w_1-w_2\right|=2$

$\Rightarrow\left|w_1+w_2-2-2i\right|^2=\left|t_1+t_2\right|^2=2\left(\left|t_1\right|^2+\left|t_2\right|^2\right)-\left|t_1-t_2\right|^2=2(2+2)-4=4$

$\Rightarrow\left|w_1+w_2-2-2i\right|=2$.

Câu 44: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$ và $(w-3+4i)\left(\overline{w}+3+4i\right)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=3\sqrt{2}$, giá trị của $|2z+w|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{47}$. **C.** $\sqrt{63}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

• Đặt $w=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, $P=|2z+w|$

• Ta có:

$(w-3+4i)\left(\overline{w}+3+4i\right)=(a-3+(b+4)i)(a+3+(-b+4)i)$

$(w-3+4i)\left(\overline{w}+3+4i\right)$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2=25\Rightarrow|w|=5$.

• $|z-w|=3\sqrt{2}\Rightarrow 18=|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)\Rightarrow 18=|z|^2-\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+|w|^2$

$\Leftrightarrow 18=4-\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+25\Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=11$

• $P^2=|2z+w|^2=(2z+w)\left(2\overline{z}+\overline{w}\right)=4|z|^2+2\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+|w|^2=16+22+25=63$

$\Rightarrow P=\sqrt{63}$.

Câu 45: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z-1+2i|=1$ và $(\mathrm{w}-1+2i)(\overline{\mathrm{w}}-1-2i)=4$. Khi $|z-w|=2$, giá trị của $|z+w-2+4i|$ bằng

A. $2\sqrt{3}$.	**B.** $\sqrt{5}$.	**C.** $\sqrt{6}$.	**D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

• Đặt $u=z-1+2i$ suy ra $|z-1+2i|=1 \Leftrightarrow |u|=1$

Đặt $v=\mathrm{w}-1+2i$ suy ra $(\mathrm{w}-1+2i)(\overline{\mathrm{w}}-1-2i)=4 \Leftrightarrow v.\overline{v}=4 \Leftrightarrow |v|^2=4 \Leftrightarrow |v|=2$.

• $|z-w|=2 \Leftrightarrow |(z-1+2i)-(w-1+2i)| \Leftrightarrow |u-v|=2$.

$\Rightarrow 4=|u|^2-(u\overline{v}+\overline{u}v)+|v|^2 \Rightarrow u\overline{v}+\overline{u}v=1$

• $P^2=|z+w-2+4i|^2=|(z-1+2i)+(w-1+2i)|^2=|u+v|^2=|u|^2+|v|^2+u\overline{v}+\overline{u}v=6$.

Vậy $P=|z+w-2+4i|=\sqrt{6}$

Câu 46: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} |z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \\ z_1{}^2=z_2z_3 \\ |z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, với $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|$.

Tính M^2.

A. $3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.	**B.** $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.	**C.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$.	**D.** $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Lời giải

Ta có

$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=4-\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{4-\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}}$

Khi đó, $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|=\left|z_2-\dfrac{z_1^2}{z_2}\right|-|z_1||z_3-z_1|$

$=\left|\dfrac{z_2^2-z_1^2}{z_2}\right|-|z_1z_3-z_1^2|=\dfrac{|z_1-z_2|.|z_1+z_2|}{|z_2|}-|z_1z_3-z_2z_3| =\dfrac{|z_1-z_2|.|z_1+z_2|}{|z_2|}-|z_3|.|z_1-z_2|$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.\sqrt{4-\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Khi đó $M^2=3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Câu 47: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Tìm bình phương của môđun số phức $w=z_1+z_2-6+10i$.

A. 16.	**B.** 36.	**C.** 8.	**D.** 64.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

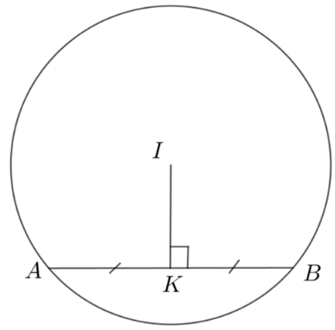
Ta có: $|z-3+5i| = 5 \Rightarrow M(x;y)$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$, bán kính $R = 5$.

Xét $|w| = |z_1 + z_2 - 6 + 10i| \Rightarrow \dfrac{|w|}{2} = \left|\dfrac{z_1+z_2}{2} - \dfrac{6}{2} + \dfrac{10i}{2}\right| = \left|\dfrac{z_1+z_2}{2} - 3 + 5i\right|$.

Gọi A, B lần lượt biểu diễn z_1, z_2; Khi đó điểm K biểu diễn $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ là trung điểm của AB.

Ta có $|z_1 - z_2| = 6 \Rightarrow AB = 6$, $KB = 3$.

Do $\dfrac{|w|}{2} = \left|\dfrac{z_1+z_2}{2} - 3 + 5i\right|$ nên $|w| = 2IK$.



Vì $IK \perp AB$ nên $IK = \sqrt{IB^2 - KB^2} = 4$.

Vậy $|w| = 2IK = 8$. Khi đó bình phương của môđun số phức $w = z_1 + z_2 - 6 + 10i$ bằng 64.

Câu 48: Xét các số phức $z, w\,(w \neq 4)$ thỏa mãn $|z| = 3$ và $\dfrac{w+4}{w-4}$ là số thuần ảo. Khi $|z-w| = \sqrt{13}$, giá trị của $|3z+2w|$ bằng

A. $\sqrt{74}$. **B.** $\sqrt{73}$. **C.** $\sqrt{219}$. **D.** $\sqrt{217}$.

Lời giải

+) Ta có: $\dfrac{w+4}{w-4} = ai \Rightarrow w = \dfrac{-4(1+ai)}{1-ai} \Rightarrow |w| = 4$

+) $|z-w| = \sqrt{13} \Rightarrow (z-w)\left(\overline{z-w}\right) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 13$

$\Rightarrow |z|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) + |w|^2 = 13 \Rightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 12$

+) $P^2 = |3z+2w|^2 = (3z+2w)\left(3\bar{z}+2\bar{w}\right) = 9|z|^2 + 6(z\bar{w}+\bar{z}w) + 4|w|^2 = 9.9 + 6.12 + 4.4^2 = 217$

$\Rightarrow P = \sqrt{217}$.

Câu 49: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z| = 2, (w+i)\left(\bar{w}+i\right) + (4+i)(1+7i)$ là số thuần ảo và $|z+2w| = 4$. Giá trị của $|2z-w|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Gọi $w = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

$(w+i)\left(\bar{w}+i\right) + (4+i)(1+7i) = w.\bar{w} - 1 + i\left(w+\bar{w}\right) - 3 + 29i = a^2 + b^2 - 4 + (2a+29)i$

$(w+i)\left(\bar{w}+i\right) + (4+i)(1+7i)$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2 + b^2 - 4 = 0 \Rightarrow |w| = 2$

+) $|z+2w|=4\Rightarrow(z+2w)(\overline{z+2w})=(z+w)(\overline{z}+2\overline{w})=16$

$\Rightarrow|z|^2+2(z\overline{w}+\overline{z}w)+4|w|^2=16\Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=-2$

+) $|2z-w|^2=(2z-w)(2\overline{z}-\overline{w})=4|z|^2-2(z\overline{w}+\overline{z}w)+|w|^2=4.4-2.(-2)+4=24$

$\Rightarrow\ |2z-w|=2\sqrt{6}$.

Câu 50: Cho hai số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn: $|z-2i|=|(i-1)z+1+i|$; $|w-2i|=|(i+1)w+1-i|$. Biết $|z-w|=1$, tính $|z+w|$

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Đặt: $\begin{cases}z=a+bi\\w=c+di\end{cases}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Ta có:

✔ $|z-2i|=|(i-1)z+1+i|\Leftrightarrow|z-2i|=|(i-1)||z-i|$

$\Leftrightarrow|z-2i|=\sqrt{2}|z-i|$

$\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=2\left[a^2+(b-1)^2\right]\Leftrightarrow a^2+b^2=2\ (1)$

✔ $|w-2i|=|(i+1)w+1-i|\Leftrightarrow|w-2i|=|(i+1)||w-i|$

$\Leftrightarrow|w-2i|=\sqrt{2}|w-i|$

$\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=2\left[a^2+(b-1)^2\right]\Leftrightarrow a^2+b^2=2\ (2)$

Mà: $|z-w|=1\Leftrightarrow(a-c)^2+(b-d)^2=1\Leftrightarrow 2ac+2bd=3$ (do (1) và (2))

Vậy: $|z+w|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)}=\sqrt{7}$.

Câu 51: Cho hai số phức z, w thỏa mãn điều kiện $|2z-3i|=\sqrt{3}|2+iz|$ và $|z-w|=2$. Môđun $|2z+3w|$ bằng

A. $\sqrt{52}$. **B.** $\sqrt{53}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{51}$.

Lời giải

$|2z-3i|=\sqrt{3}|2+iz|\Leftrightarrow|2x+(2y-3)i|=\sqrt{3}|(2-y)+ai|$

$\Leftrightarrow(2x)^2+(2y-3)^2=3(2-y)^2+3x^2\Leftrightarrow x^2+y^2=3$

$\Rightarrow|z|=|w|=\sqrt{3}$

Giả sử $z=a+bi$, (a, $b\in\mathbb{R}$); $w=c+di$, (c, $d\in\mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{3}\\|w|=\sqrt{3}\\|z-w|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=3\\c^2+d^2=3\\(a-c)^2+(b-d)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=3 & (1)\\c^2+d^2=3 & (2)\\a^2+b^2+(c^2+d^2)-2(ac+bd)=4 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=1\ (4)$.

Ta có $|2z+3w|=\sqrt{(2a+3c)^2+(2b+3d)^2}$

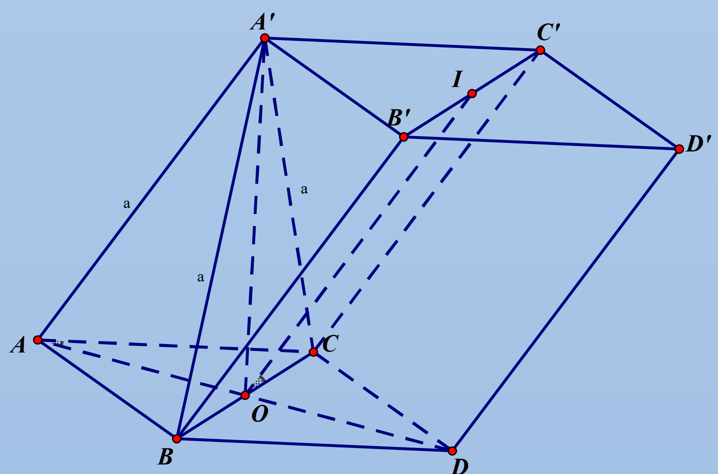
$=\sqrt{4(a^2+b^2)+9(c^2+d^2)+12(ac+bd)}=\sqrt{4.3+9.3+12.1}=\sqrt{51}$.

Câu 43: **(Đề TK BGD 2024)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $A'A = A'B = A'C = a$ Biết góc giữa $(BCC'B')$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Do ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $A'A = A'B = A'C = a$

Gọi O là trung điểm của BC $\Rightarrow$ O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy là điểm O

Gọi D sao cho $ABCD$ là hình vuông và I là trung điểm của $B'C'$.

$(BCC'B') \cap (ABC) = BC$

$(ABC): OD \perp BC$

$(BCC'B'): IO \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{IOD} = 30^0$

Do $\widehat{A'OD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A'OI} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$OI // A'A \Rightarrow \widehat{AA'O} = \widehat{A'OI} = 60^0$ (so le trong)

Ta có $\Delta AA'O$ vuông tại O: $\sin 60^0 = \dfrac{AO}{A'A} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$A'O = \sqrt{a^2 - \dfrac{3}{4}a^2} = \dfrac{1}{2}a$

Ta có ΔABC: vuông cân tại A: $AB = AO\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'O = \dfrac{1}{2}AB.AC.A'O = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2.\dfrac{1}{2}a = \dfrac{3}{8}a^3$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 43

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều có các cạnh $AB = BC = CD = \dfrac{1}{2}AD = a$. Biết $A'A = A'B = A'C$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'CD)$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{10}a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{20}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}a^3$. **D.** $\frac{9\sqrt{5}}{20}a^3$.

Câu 2: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với đáy một góc 45^0. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{3a}{2\sqrt{2}}$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC}=120°$. Chân đường cao hạ từ A' trùng với trọng tâm tam giác ABD; góc giữa mặt phẳng $(ADD'A')$ với đáy bằng $60°$. Thể tích hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu biết khoảng cách từ C đến $B'C'$ bằng $a\sqrt{3}$.

A. $\frac{27\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{9\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=\sqrt{3}, BC=\sqrt{10}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(AA'C'C)$ lần lượt tạo với đáy các góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ nếu biết cạnh bên bằng 1.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=AB'=AC'$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=2a$. Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^0$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC), góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, A'A=A'B=A'C=a$. Biết diện tích $\Delta A'BC=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{24}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ **C.** $\frac{3a^3}{8}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ trọng tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác nội tiếp đường tròn đường kính BC, A là điểm chính giữa của cung BC, $A'A = A'B = A'C = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và (ABC) bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 11: Hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ $SB = a\sqrt{10}$. Gọi G_1, G_2 và G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAC, SAD và SDC. Tính thể tích khối tứ diện $DG_1G_2G_3$.

A. $\frac{a^3}{54}$. **B.** $\frac{a^3}{27}$. **C.** $\frac{a^3}{36}$. **D.** $\frac{a^3}{45}$.

Câu 12: Cho khối hộp $ABCD.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng a, các góc $\widehat{BAD} = \widehat{BNP} = \widehat{PQD} = 60^0$. Thể tích của khối hộp là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = 2a, \widehat{BAC} = 45°, SA \perp (ABC)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V = \sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{2}a^3$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 14: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2a$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Biết $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = a^3\sqrt{3}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân $AC = BC = 3a$, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{9a^3\sqrt{6}}{8}$ **B.** $\frac{9a^3\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{9a^3}{4}$

Câu 17: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $2a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là $BCC'B'$ hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** a^3.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=1, AC=2$. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'B$ là $\sqrt{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 20: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A=A'B=A'C$. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a}{2}$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 22: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$. Biết tam giác BCB' là tam giác cân tại B' và mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC). Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng $60°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A'A=A'B=A'C$, $A'A=2a$. Mặt bên $BCC'B'$ tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(\mathrm{ACC'A'})$ và (ABC) bằng 45°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{16}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $BA=BC=a,\widehat{ABC}=120^o$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(\mathrm{ACC'A'})$ và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{12}$.

Câu 28: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 29: Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông và cạnh bên bằng $2a$. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD, đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc là 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{16a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{30}}{27}$. **C.** $\frac{16a^3}{9}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{30}}{9}$.

Câu 30: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Tam giác ABC' có diện tích bằng $12\sqrt{3}a^2$ và mặt phẳng (ABC') tạo với đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $216a^3$. **B.** $24a^3$. **C.** $72a^3$. **D.** $18a^3$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Biết $SD=a$, gọi K là trung điểm của AB, góc giữa đường thẳng SK với mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{42}}{49}$ **B.** $V=\frac{2a^3\sqrt{42}}{147}$ **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{42}}{49}$ **D.** $V=\frac{4a^3\sqrt{42}}{147}$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm I, cạnh a, góc BAD bằng $60°$, hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm M của BI, góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đó.

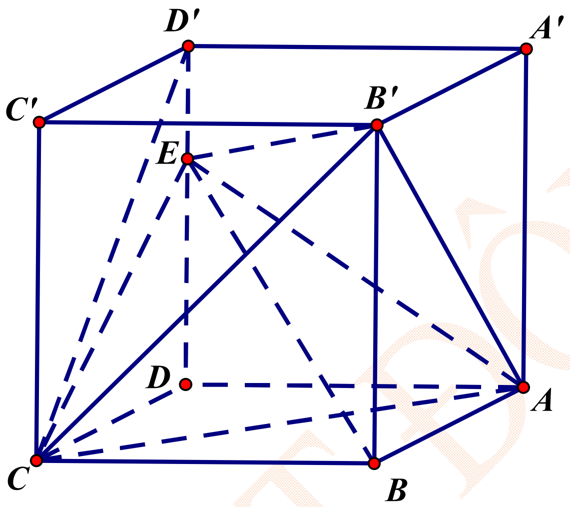
A. $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{12}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{48}$

C. $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{8}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{24}$

Câu 33: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30^0. Tìm thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.	**B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.	**C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.	**D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi E là một điểm thuộc cạnh DD' sao cho $\tan\left(BE;(CDD')\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Thể tích của khối tứ diện $EB'AC$ bằng



A. $\frac{5a^3}{18}$	**B.** $\frac{2a^3}{3}$	**C.** $\frac{6a^3}{\sqrt{38}}$	**D.** $\frac{\sqrt{19}a^3}{3}$

Câu 35: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A'A = A'B = A'C = 2a$. Biết góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích lớn nhất của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $a^3 2\sqrt{3}$	**B.** $\frac{a^3 2\sqrt{3}}{3}$	**C.** $a^3\sqrt{3}$	**D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 36: Cho lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.	**B.** $\frac{2a^3}{3}$.	**C.** a^3.	**D.** $2a^3$.

Câu 37: Cho lăng trụ $ABCD.EFGH$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABD} = 60°$. Góc giữa mặt phẳng (EBD) và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh E cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.	**B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.	**C.** $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.	**D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$	**B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$	**C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$	**D.** $\frac{3a^3}{4}$

Câu 39: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $B'A = B'B = B'C = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{96\sqrt{7}a^3}{49}$. **B.** $\frac{72\sqrt{7}a^3}{49}$. **C.** $\frac{36\sqrt{7}a^3}{49}$. **D.** $\frac{27\sqrt{7}a^3}{49}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $V = \frac{3a^3}{16}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 46: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

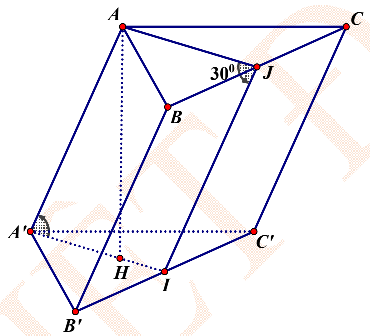
Câu 48: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120^0$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60^0. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 49: Cho khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $AA' = AB' = AC' = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D**. $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải



I là trung điểm của $B'C'$, H là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Chóp $A.A'B'C'$ đều nên ta có $AH \perp (A'B'C')$. Suy ra AH là chiều cao và $BC \perp (AA'IJ)$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là $\widehat{AJI} = \widehat{AA'I} = 30^\circ$,

$\Delta A'B'C'$ đều cạnh a nên $A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{2}{3}A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta AA'H$ vuông tại H ta có $\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{AH}{A'H} \Leftrightarrow AH = A'H.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$

$S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 50: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'C$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

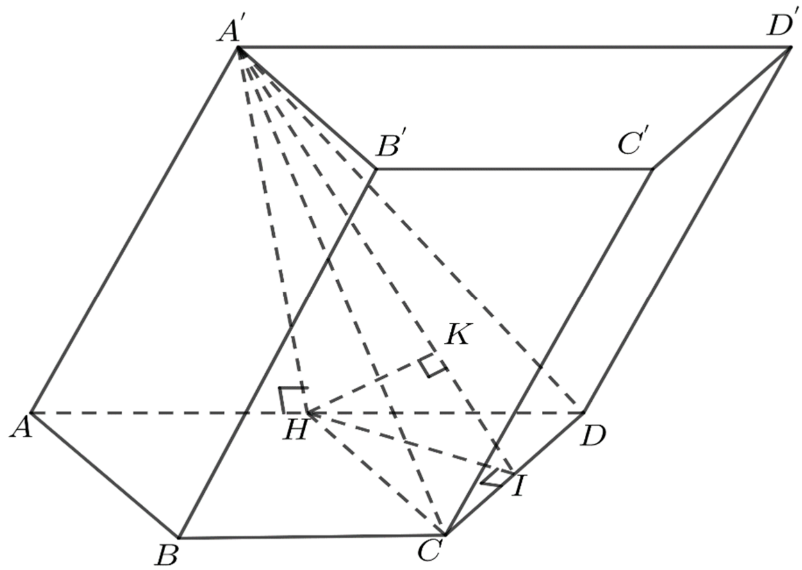
A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều có các cạnh $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD = a$. Biết $A'A = A'B = A'C$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'CD)$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{10}a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{20}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}a^3$. **D.** $\frac{9\sqrt{5}}{20}a^3$.

Lời giải



Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A' xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Do $A'A = A'B = A'C \Rightarrow \Delta A'HA = \Delta A'HB = \Delta A'HC \Rightarrow HA = HB = HC$,

Đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên H là trung điểm $AB \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm $CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp A'H \end{cases} \Rightarrow CD \perp (A'HI)$

Dựng $HK \perp A'I \Rightarrow HK \perp (A'CD)$

Theo giả thiết

$$\frac{d(H,(A'CD))}{d(A,(A'CD))} = \frac{HD}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HK = d(H,(A'CD)) = \frac{1}{2}d(A,(A'CD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

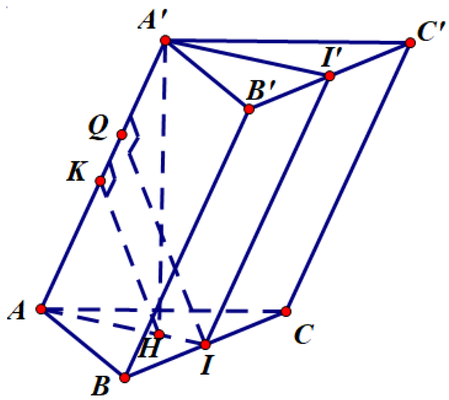
Xét $\Delta A'HI$ có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HA' = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{5}}{20}a^3.$$

Câu 2: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với đáy một góc 45^0. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{3a}{2\sqrt{2}}$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải



Kẻ $A'H \perp (ABC), H \in (ABC)$. Từ giả thiết ta có $\widehat{A'AH} = \widehat{A'BH} = \widehat{A'CH} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta A'AH = \Delta A'BH = \Delta A'CH \Rightarrow AH = BH = CH$ do đó H là tâm của tam giác đều ABC .

Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.

Ta dễ dàng chứng minh : $H \in AI$; tứ giác $A'I'IA$ là hình bình hành, $(A'I'IA) \perp BC$ do $BC \perp AI, BC \perp A'H$.

Kẻ $IQ \perp AA', HK \perp AA'$ ta có IQ là đường vuông góc chung của AA' và BC và $IQ \parallel HK; \frac{IQ}{HK} = \frac{AI}{AH} = \frac{3}{2}$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, khi đó $AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, do tam giác $A'AH$ vuông cân tại H nên $HK = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}.\sqrt{2}AH = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}x$

Mặt khác $IQ = d(AA', BC) = \frac{3a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}IQ = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$

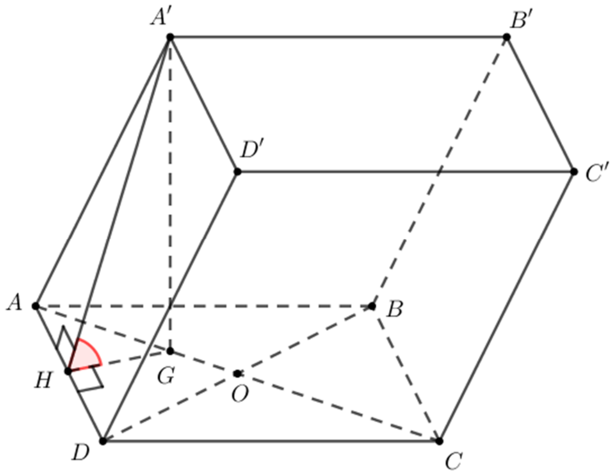
Vậy $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\sqrt{3}a\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $A'H = AH = \frac{x\sqrt{3}}{3} = a$

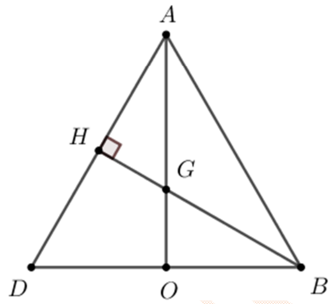
$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a.\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 120°$. Chân đường cao hạ từ A' trùng với trọng tâm tam giác ABD; góc giữa mặt phẳng $(ADD'A')$ với đáy bằng $60°$. Thể tích hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu biết khoảng cách từ C đến $B'C'$ bằng $a\sqrt{3}$.

<u>A.</u> $\frac{27\sqrt{3}\,a^3}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}\,a^3}{8}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}\,a^3}{4}$. **D.** $\frac{9\sqrt{3}\,a^3}{12}$.

Lời giải





Xét hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=120°$, suy ra $\widehat{BAD}=60°$. Do đó tam giác ABD đều.
Dựng GH vuông với AD tại H.

Ta có $\begin{cases} AD\perp GH \\ AD\perp A'G \end{cases} \Rightarrow AD\perp\left(A'GH\right)$. Do đó $AD\perp A'H$.

Ta có $\begin{cases} \left(ADD'A'\right)\cap\left(ABCD\right)=AD \\ AD\perp A'H\subset\left(ADD'A'\right) \\ AD\perp GH\subset\left(ABCD\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\left(ADD'A'\right);\left(ABCD\right)\right)=\left(A'H;GH\right)=\widehat{A'HG}$.

$\Rightarrow \widehat{A'HG}=60°$.

Gọi x là độ dài cạnh của tam giác ABD.

Ta có $GH=\dfrac{1}{3}BH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.

Xét $\Delta A'GH$ có $A'H=\dfrac{GH}{\cos 60°}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $d\left(C;B'C'\right)=d\left(BC;B'C'\right)=d\left(A'D';AD\right)=d\left(A';AD\right)=A'H$.

Suy ra $a\sqrt{3}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=3a$.

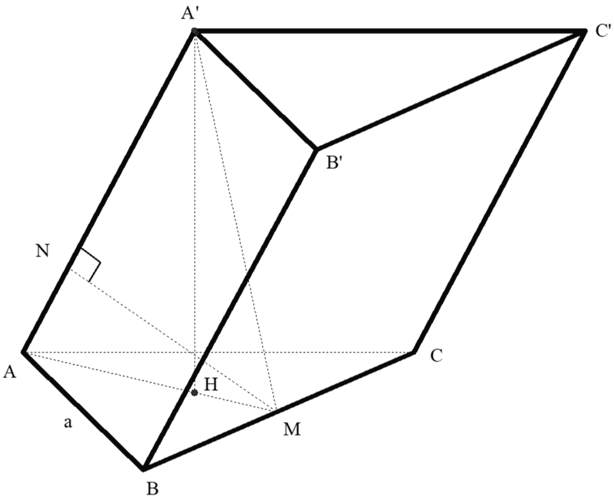
Ta có $GH=\dfrac{x\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó $A'G=HG.\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.ABCD}=A'G.S_{ABCD}=\dfrac{3a}{2}.2.(3a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



+ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

+ $AM \perp BC$ và $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

+ Trong tam giác $AA'M$, kẻ $MN \perp AA'$ tại N

$MN \perp BC$ tại M vì $BC \perp (AA'M)$.

$\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC $\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

+ Tam giác $AA'M$ có $S_{\Delta AA'M} = \frac{1}{2}A'H.AM = \frac{1}{2}MN.AA'$

$\Rightarrow A'H.AM = MN.AA' \Leftrightarrow A'H.AM = MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}$

$$\Rightarrow A'H = \frac{MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}.$$

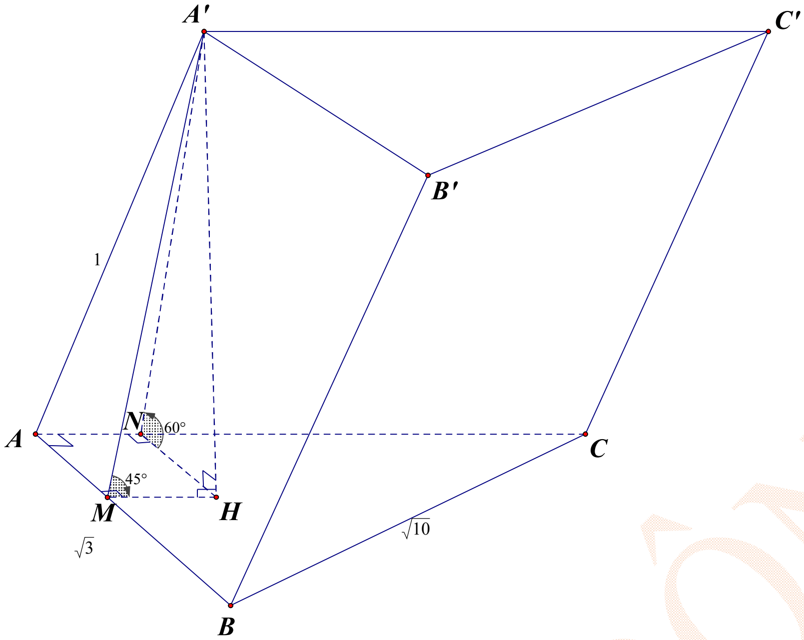
$$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = \sqrt{3}, BC = \sqrt{10}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(AA'C'C)$ lần lượt tạo với đáy các góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ nếu biết cạnh bên bằng 1.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải



Kẻ $A'H \perp (ABC), HM \perp AB, HN \perp AC \Rightarrow A'M \perp AB, A'N \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 45^0, \widehat{A'NH} = 60^0$. Đặt $A'H = x$. Khi đó

$A'N = \dfrac{x}{\sin 60^0} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}; AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}}$

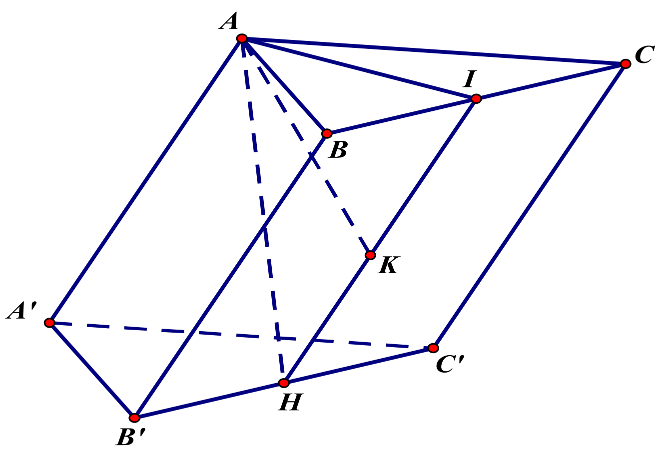
Mà $HM = x.\cot 45^0 = x$, mà $HM = AN$ do đó: $x = \sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}AB.AC.x = \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{BC^2 - AB^2}.x = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB' = AC'$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 2a$. Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm $B'C'$. Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A' nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Mặt khác $AA' = AB' = AC'$, từ đó suy ra A, H cách đều 3 điểm A', B', C' hay $AH \perp (A'B'C')$.

Gọi I là trung điểm của BC khi đó $AI \perp BC$ (1).

Mà $B'C' \perp AH$ và $BC // B'C'$ suy ra $BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp (AHI) \Rightarrow (BCC'B') \perp (AHI)$ theo giao tuyến là HI.

Kẻ $AK \perp HI$, ta được $AK \perp (BCC'B')$ hay $d(A',(BCC'B')) = d(A,(BCC'B')) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

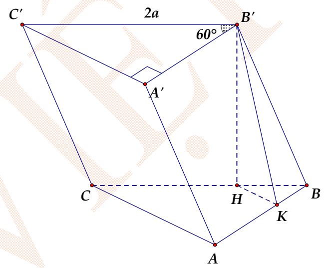
Xét tam giác AIH vuông tại A, ta được $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^0$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC), góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^0$

$AB = 2a.\cos 60^0 = a$, $AC = 2a.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$. Ta có : $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Dựng $B'H$ vuông góc với BC tại H.

Vì $(BCC'B') \perp (ABC)$ nên $B'H \perp (ABC) \Rightarrow B'H \perp AB$.

Trong (ABC) dựng $HK \perp AB$ tại K.

$\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp B'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (B'HK) \Rightarrow AB \perp B'K$.

$\begin{cases} HK \perp AB, HK \subset (ABC) \\ B'K \perp AB, B'K \subset (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow ((ABB'A'),(ABC)) = \widehat{B'KH} = 45^0$.

Vậy $\Delta B'HK$ vuông cân tại H $\Rightarrow B'H = HK$. Đặt $B'H = HK = x$.

Xét $\Delta B'HB$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - x^2}$.

Ta lại có HK song song AC.

$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{HK}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2a} = \frac{x}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow a\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 - x^2} = 2a.x \Leftrightarrow 4x^2 = 3(4a^2 - x^2)$

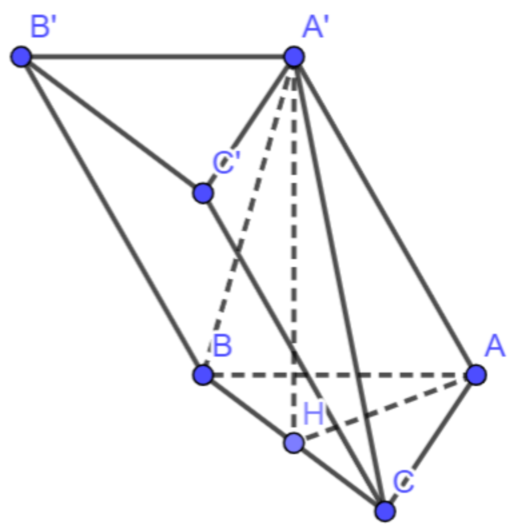
$\Leftrightarrow 7x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Vậy thể tích hình lăng trụ là $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, A'A = A'B = A'C = a$. Biết diện tích $\Delta A'BC = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{24}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC

Gọi $AH = x$. Ta có : $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - x^2 (1)$

$A'H = \dfrac{\sqrt{3}a}{4BH} = \dfrac{\sqrt{3}a}{4x} (2)$

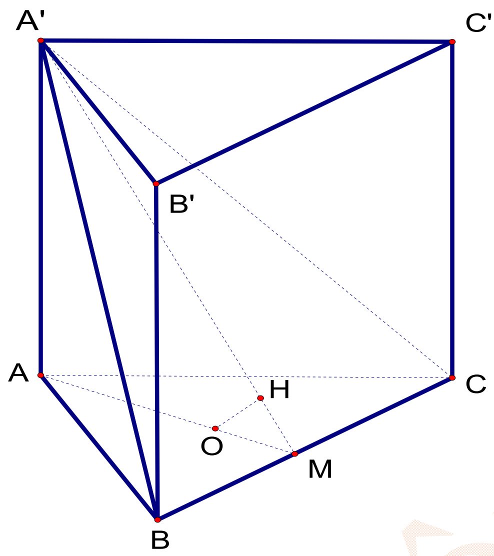
Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow A'H = \dfrac{a}{2} \Rightarrow V = AH.BH.A'H = \left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ trọng tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\left(A'AM\right)\perp\left(A'BC\right)$ theo giao tuyến $A'M$.

Trong $\left(A'AM\right)$ kẻ $OH\perp A'M\ (H\in A'M)$.

$\Rightarrow OH\perp\left(A'BC\right)$.

Suy ra: $d\left(O,\left(A'BC\right)\right)=OH=\dfrac{a}{3}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{OH}{A'A}=\dfrac{OM}{A'M}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{3}}{A'A}=\dfrac{\frac{1}{3}.a\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{A'A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

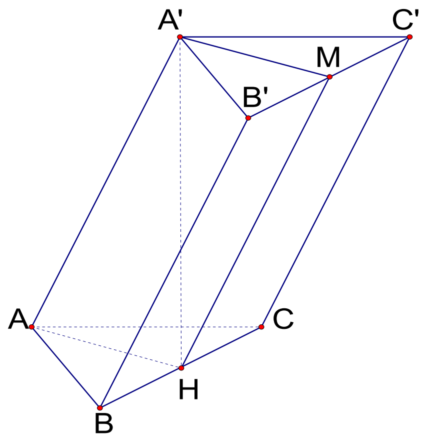
Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của hình lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác nội tiếp đường tròn đường kính BC, A là điểm chính giữa của cung BC, $A'A=A'B=A'C=2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

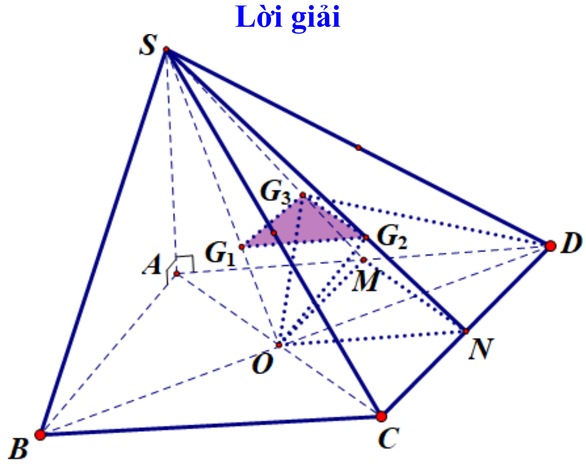


Tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên đây là tam giác vuông tại A .
Lại có A là điểm chính giữa của cung BC nên số đo cung AB và AC bằng nhau, do đó hai dây $AB = AC$. Vì vậy tam giác ABC vuông cân tại A.
Gọi H, M lần lượt là trung điểm cạnh huyền BC, $B'C'$, khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Theo giả thiết $A'A = A'B = A'C = 2a$ nên $A'H \perp (ABC), A'H \perp (A'B'C')$ suy ra $A'H \perp B'C'$ (1)
Ta có $A'M$ là đường trung tuyến của tam giác cân nên $A'M$ là đường cao do đó $A'M \perp B'C'$ (2).
Lại có góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng $30°$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra số đo của góc $A'MH$ là $30°$.
Gọi x là độ dài của $A'M$, do đó $B'C' = 2A'M = 2x$.
Xét tam giác vuông $A'MH$ ($A'H \perp A'M$); $MH = A'A = 2a$, $A'H = HM.\sin 30° = 2a.\dfrac{1}{2} = a$,
$A'M = x = HM.\cos 30° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Do đó $B'C' = 2\sqrt{3}a$.
Diện tích tam giác $A'B'C'$ là $\dfrac{1}{2}.A'M.B'C' = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.2\sqrt{3}a = 3a^2$.
Thể tích khối lăng trụ là $V = A'H.S_{\Delta A'B'C'} = a.3a^2 = 3a^3$ (đvtt).

Câu 11: Hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ $SB = a\sqrt{10}$. Gọi G_1, G_2 và G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAC, SAD và SDC. Tính thể tích khối tứ diện $DG_1G_2G_3$.

A. $\dfrac{a^3}{54}$. **B.** $\dfrac{a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3}{45}$.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}a^2\sqrt{10a^2-a^2}=a^3 \Rightarrow V_{S.OMN}=\frac{a^3}{8} \Rightarrow V_{S.G_1G_2G_3}=\frac{a^3}{27}$

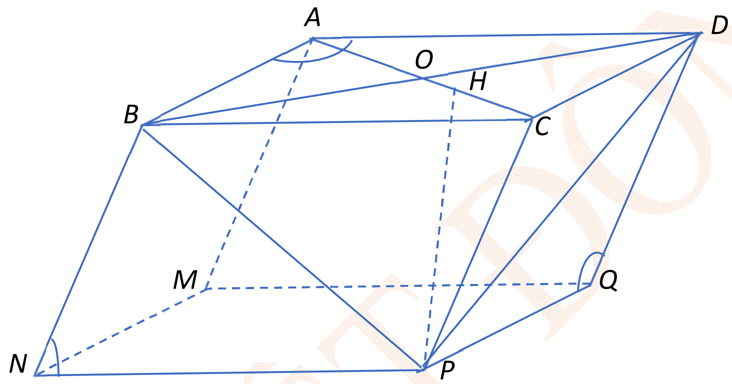
Hai mặt phẳng $(G_1G_2G_3)//(ABCD) \Rightarrow d(D;G_1G_2G_3)=d(O;G_1G_2G_3)=\frac{1}{2}d(S;G_1G_2G_3)$

Vậy thể tích khối $V_{DG_1G_2G_3}=\frac{1}{2}V_{SG_1G_2G_3}=\frac{a^3}{54}$

Câu 12: Cho khối hộp $ABCD.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng a, các góc $\widehat{BAD}=\widehat{BNP}=\widehat{PQD}=60^0$. Thể tích của khối hộp là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Nhận xét các tam giác ΔBAD, ΔBNP, ΔDQP là các tam giác đều cạnh a.
Do đó tứ diện $PBCD$ là tứ diện đều cạnh a.
Gọi $O=AC\cap BD$, H là trọng tâm ΔBCD khi đó:

$OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}, HC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, diện tích tam giác BCD là $S_{\Delta BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

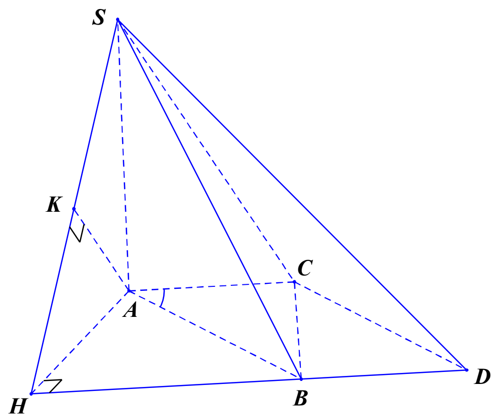
$HP=\sqrt{PC^2-HC^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Thể tích khối hộp là $V=6V_{PBCD}=6.\frac{1}{3}.PH.S_{\Delta BCD}=2.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=2a, \widehat{BAC}=45°, SA\perp(ABC)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V=\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=4\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $ABDC$, khi đó $AC//(SBD)$.

Ta có $d(SB,AC)=d(AC,(SBD))=d(A,(SBD))$

Kẻ $AH\perp BD$ ($H\in BD$), $AK\perp SH$ ($K\in SH$) $\Rightarrow AK=d(SB,AC)=\dfrac{4a}{3}$.

Ta có $AH=AB\sin 45°=2a\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAH vuông tại A có $AK\perp SH$ có

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AH^2}\Rightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{\left(\frac{4a}{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{16a^2}\Rightarrow SA=4a\Rightarrow h=4a.$$

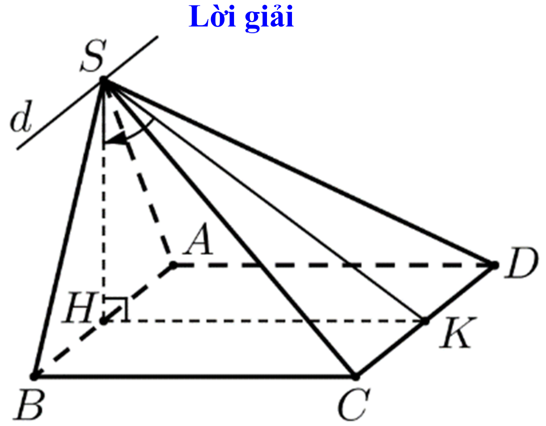
Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 45°=\dfrac{1}{2}(2a)^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2\sqrt{2}$.

Vì vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{Sh}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 14: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình chữ nhật $ABCD$ với $AD=2a$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Biết $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=a^3\sqrt{3}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lời giải



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Vì $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = d \\ SH \perp d, \quad SH \subset (SAB) \\ SK \perp d, \quad SK \subset (SCD) \end{cases}$. Do đó $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \left(\widehat{SH,SK}\right) = \widehat{HSK}$.

Xét tam giác vuông SHK, có $\tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \frac{2a}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

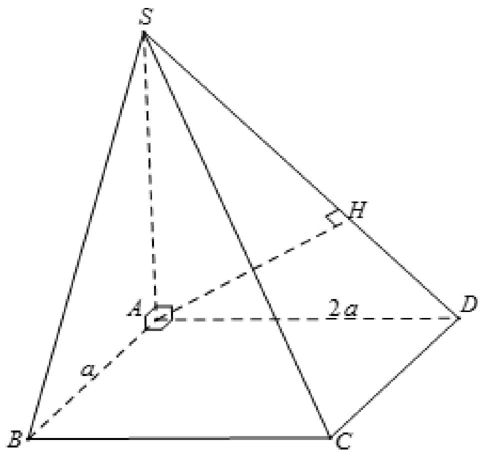
Xét tam giác đều SAB có: $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = a\sqrt{6}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a\sqrt{6}.2a.\frac{3a\sqrt{2}}{2} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải



Kẻ $AH \perp SD$ (1).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

Trong ΔSAD ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow SA = \frac{AH.AD}{\sqrt{AD^2 - AH^2}}$

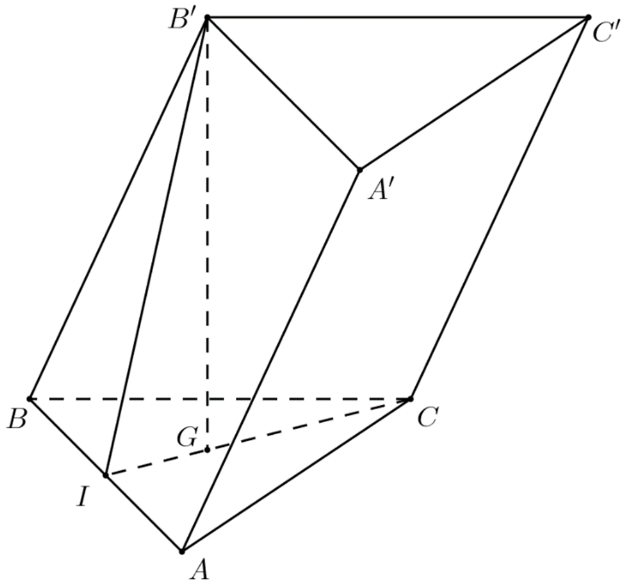
$= \frac{\frac{a}{2}\cdot 2a}{\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{15}}{15}$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}SA.AB.AD=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a\sqrt{15}}{15}.a.2a=\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân $AC=BC=3a$, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{9a^3\sqrt{6}}{8}$ **B.** $\frac{9a^3\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{9a^3}{4}$

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB, G là trọng tâm $\triangle ABC$.

$\Rightarrow B'G\perp(ABC)$ và $CI\perp AB$

Ta có $(B'GI)\perp AB\Rightarrow\widehat{B'IG}=60°$.

Mặt khác $CI=\frac{1}{2}AB=\frac{3a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow GI=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

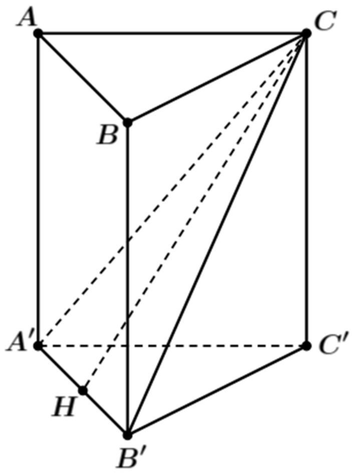
$\Rightarrow B'G=GI.\tan 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=B'G.S_{ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{9a^2}{2}=\frac{9a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $2a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C) \Rightarrow d(AB, A'C) = d(AB,(A'B'C)) = d(B,(A'B'C)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Đặt $AA' = x > 0$.

Tam giác $CA'B'$ cân tại C, $CA' = CB' = \sqrt{4a^2 + x^2}$.

Diện tích tam giác $CA'B'$ là

$S_{CA'B'} = \dfrac{1}{2}CH.A'B' = \dfrac{1}{2}.2a.\sqrt{3a^2 + x^2} = a.\sqrt{3a^2 + x^2}$

Thể tích lăng trụ $V = x.a^2\sqrt{3}$ (1)

Lại có $V = 3V_{B.A'B'C} = 3.\dfrac{1}{3}d(B,(A'B'C)).S_{A'B'C} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.a.\sqrt{3a^2 + x^2}$.

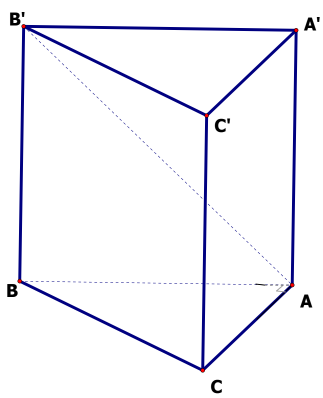
Do đó $x.a^2\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.a.\sqrt{3a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $V = \dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là $BCC'B'$ hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.   **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.   **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.   **D.** a^3.

Lời giải:



Ta có: $AC \perp AB$ (giả thiết), $AC \perp AA'$ (vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng) $\Rightarrow AC \perp (AA'B'B)$.

Ta có: $CC' // BB' \Rightarrow CC' // (AA'B'B)$

$\Rightarrow d(CC', AB') = d(CC',(AA'B'B)) = d(C,(AA'B'B)) = AC = a$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC = AC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác $BCC'B'$ hình vuông nên $BB' = BC = a\sqrt{2}$.

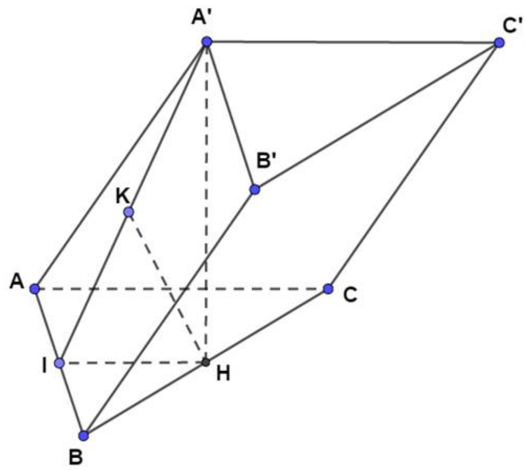
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{ABC}.BB' = \frac{a^2}{2}a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = 2$. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'B$ là $\sqrt{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D



Do $CC' // BB'$ nên $CC' // (AA'B'B)$

$\Rightarrow d(CC', A'B) = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B)) = \sqrt{2}$.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AB, dễ thấy $IH // AC$ và $IH = \frac{1}{2}AC = 1$.

+) $\begin{cases} AB \perp IH \\ AB \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI)$.

Kẻ $HK \perp A'I$ $(K \in A'I)$.

+) $\begin{cases} HK \perp A'I \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow HK \perp (AA'B'B)$. Ta có $KH = d(H, (AA'B'B)) = \frac{1}{2}d(C, (AA'B'B)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

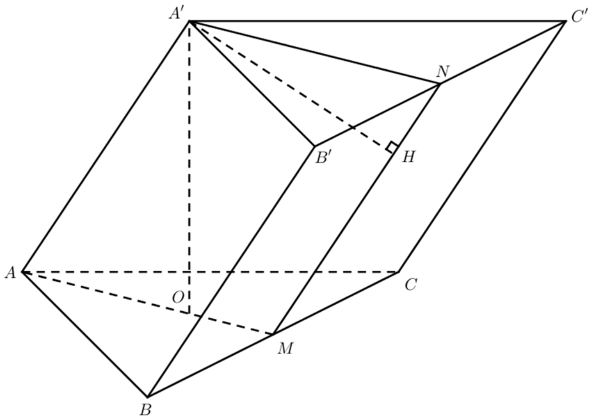
Tam giác vuông $A'IH$ có $HI = 1$, đường cao $HK = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác $A'IH$ vuông cân tại H.

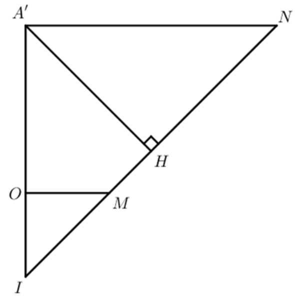
Suy ra $A'H = 1$. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot A'H = 1$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = A'B = A'C$. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a}{2}$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải





Gọi O là tâm tam giác đều ABC. Do $A'A = A'B = A'C$ nên $A'O \perp (ABC)$.

Gọi M, N là trung điểm $BC, B'C' \Rightarrow BC \perp AM$, mà $BC \perp A'O$ nên $BC \perp (AMA')$.
Dựng $A'H \perp MN$, mà $A'H \perp BC$ nên $A'H \perp (BCC'B')$.

Do $AA' // (BCC'B')$ nên $d(A,(BCC'B')) = d(A',(BCC'B')) \Leftrightarrow A'H = \frac{a}{2}$

Gọi $I = A'O \cap MN \Rightarrow \Delta IA'N$ có $OM // A'N$ nên $\frac{IO}{IA'} = \frac{OM}{A'N} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'O = \frac{2}{3}IA'$

Ta có: $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'N^2} + \frac{1}{A'I^2} \Leftrightarrow \frac{1}{A'I^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'N^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow A'I = \frac{\sqrt{6}a}{4}$

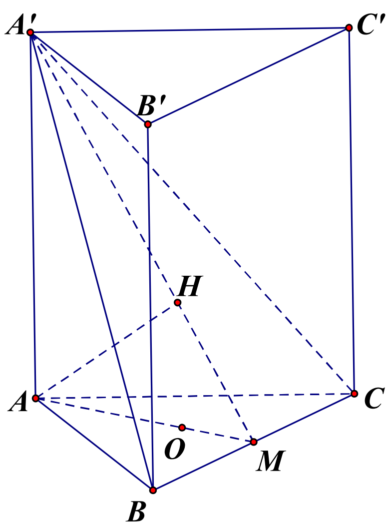
$\Rightarrow A'O = \frac{2}{3}A'I = \frac{\sqrt{6}a}{6}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{6}a}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp \left(AA'M\right) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $AH \perp A'M$ (2)

Từ và $\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AH$.

Ta có $\dfrac{d\left(O,\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A,\left(A'BC\right)\right)} = \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = 3d\left(O,\left(A'BC\right)\right) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

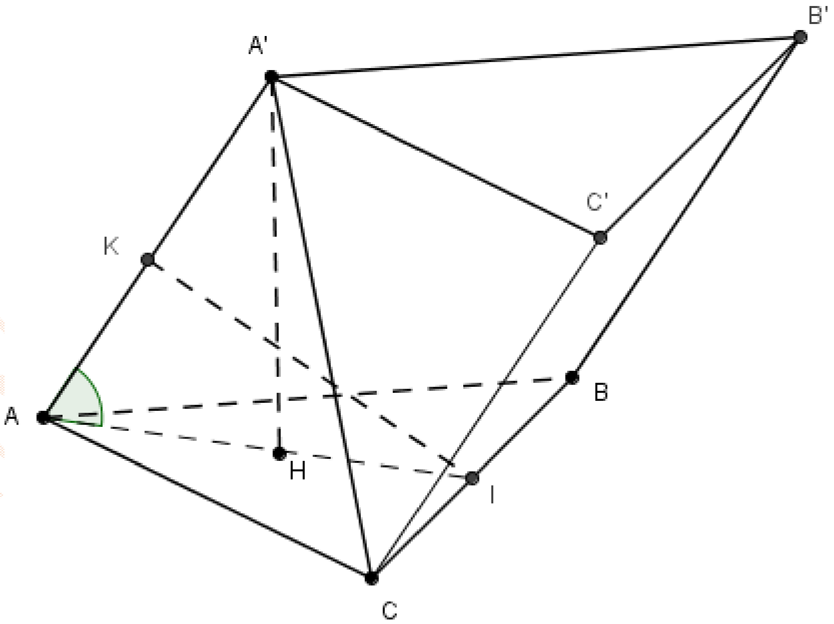
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 22: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm BC. Ta có

$$\begin{cases} A'H \perp BC \\ AI \perp BC \\ A'H \cap AI = H \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(A'AI\right) \Rightarrow BC \perp AA'.$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AA'. Khi đó IK là đoạn vuông góc chung của AA' và BC nên $IK = d\left(AA', BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Xét tam giác vuông AIK vuông tại K có

$$IK=\frac{a\sqrt{3}}{4},\ AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IK=\frac{1}{2}AI\Rightarrow \widehat{KAI}=30^\circ.$$

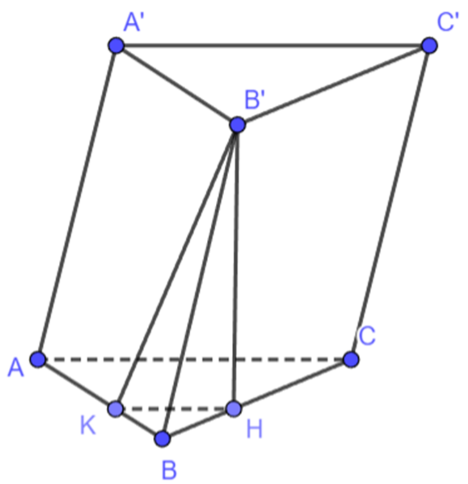
Xét tam giác vuông $AA'H$ vuông tại H có $A'H=AH.\tan 30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$. Biết tam giác BCB' là tam giác cân tại B' và mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC). Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$ nên $AB=AC=a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2$

Dựng $B'H\perp BC$ thì H là trung điểm của BC. Vì 2 mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) nên $B'H\perp(ABC)\Rightarrow B'H\perp HK$;

HK song song với AC, vì ABC là tam giác vuông cân tại A nên $HK\perp AB$

Mà $B'H\perp(ABC)\Rightarrow B'H\perp AB$. Do đó $AB\perp(B'KH)\Rightarrow AB\perp B'K$

Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{B'KH}$ bằng 60°,

Tam giác $B'KH$ vuông tại H có

$\widehat{B'KH}=60^\circ; KH=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B'H=KH.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V=S_{ABC}.B'H=a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A'A=A'B=A'C$, $A'A=2a$. Mặt bên $BCC'B'$ tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

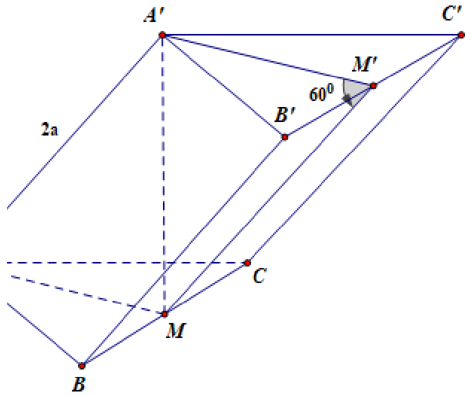
Vì $A'A = A'B = A'C$ nên hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $B'C'$ khi đó $\left(\left(BCC'D'\right),\left(A'B'C'\right)\right) = \angle A'M'M = 60^0 \Rightarrow \angle A'AM = 60^0$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ ta có

$$\begin{cases} \sin 60^0 = \dfrac{A'M}{AA'} \Rightarrow A'M = AA'.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \\ \tan 60^0 = \dfrac{A'M}{AM} \Rightarrow AM = a \Rightarrow BC = 2a \end{cases}$$

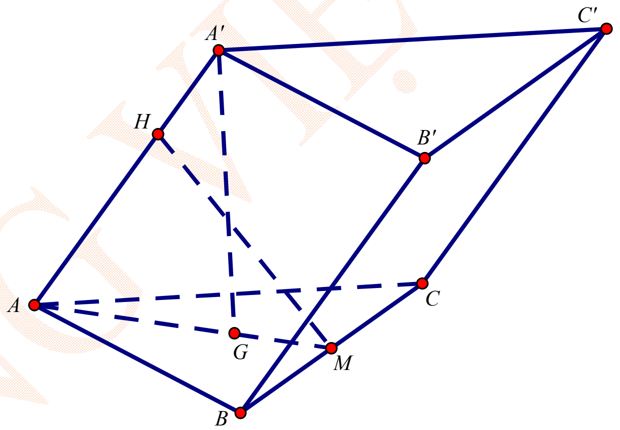
Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = B.h = \dfrac{1}{2}a.2a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.



Câu 25: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow A'G$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Gọi M là trung điểm của BC thì A, G, M thẳng hàng và $AM \perp BC$

Vẽ $MH \perp AA'$ tại H ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp MH$, suy ra MH là đường vuông góc chung của BC và AA'.

Do $AA' // BB'$ nên $AA' // \left(BCC'B'\right) \Rightarrow d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = d\left(AA', BC\right) = MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \dfrac{3a}{4}$.

Xét hai tam giác AGA' và AHM có $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AHM} = \widehat{AGA'} = 90^0$ nên $\Delta AHM \sim \Delta AGA'$

Suy ra $\frac{A'G}{AG}=\frac{HM}{AH}\Rightarrow A'G=\frac{AG.HM}{AH}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}}=\frac{a}{3}$

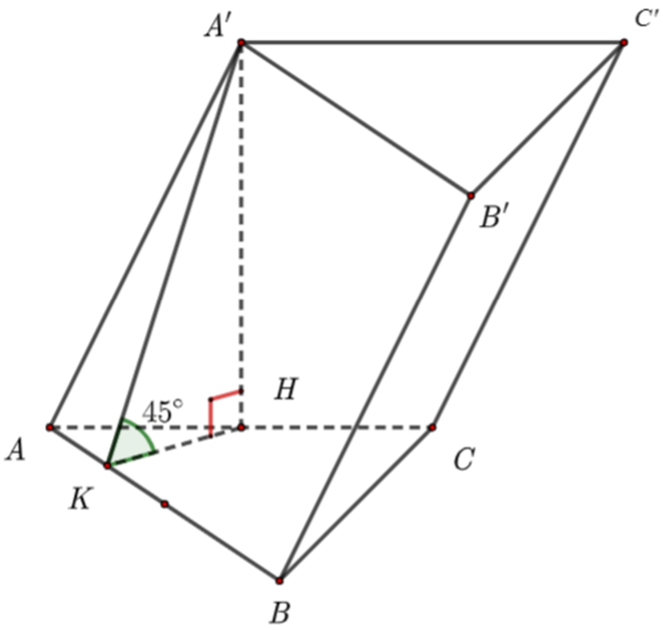
Diện tích đáy $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích lăng trụ $V=S_{ABC}.A'G=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(\mathrm{ACC'A'})$ và (ABC) bằng 45°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{16}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow A'H\perp(ABC)$.

Kẻ $HK\perp AC$ $(K\in AC)$ và $A'H\perp AC\Rightarrow AC\perp(A'HK)$.

Suy ra $\widehat{(ACC'A');(ABC)}=\widehat{(A'K;HK)}=\widehat{A'KH}=45^0$

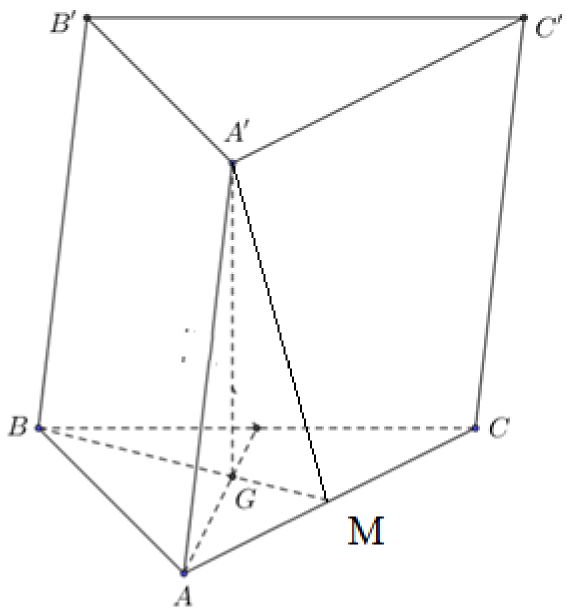
Tam giác $A'HK$ vuông tại H, CÓ $\widehat{A'KH}=45^0\Rightarrow A'H=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2}{16}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $BA=BC=a,\widehat{ABC}=120^o$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(\mathrm{ACC'A'})$ và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{12}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của AC.

Ta có: $A'G\perp(ABC)$.

$BM\perp AC$, $A'G\perp AC \Rightarrow AC\perp(A'BG)\Rightarrow AC\perp A'M$.

Suy ra góc hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MG}$ và $\widehat{A'MG}=60^\circ$.

Ta có: $AC=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\cos120^o}=a\sqrt{3}$; $BM=\sqrt{\frac{BC^2+BA^2}{2}-\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}$

$GM=\frac{1}{3}BM=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a}{6}$

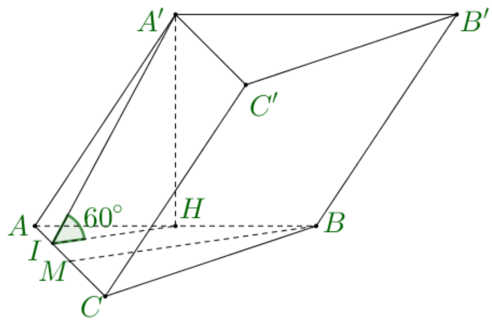
Trong $\Delta A'GM: A'G=GM.\tan\widehat{A'MG}=\frac{a}{6}.\tan60^o=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'G=\frac{1}{2}BA.BC.\sin120^o.A'G=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3}{8}$.

Câu 28: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Lời giải



Ta có đáy là tam giác đều cạnh a nên diện tích đáy bằng $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB, do đó AH là đường cao của khối lăng trụ.

Gọi M là trung điểm của AC, khi đó $BM\perp AC$ và $BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi I là trung điểm của AM, khi đó HI là đường trung bình của tam giác ABM.

$\Rightarrow HI=\frac{1}{2}BM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và $HI\perp AC$. Suy ra góc $\left((ACC'A'),(ABC)\right)=\widehat{AIH}=60°$.

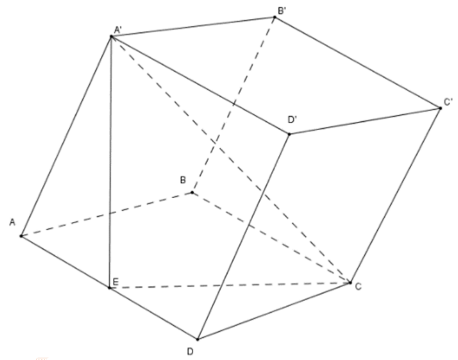
Xét tam giác vuông AIH, $AH=HI.\tan 60°=\frac{3a}{4}$

Thể tích của khối lăng trụ là $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 29: Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông và cạnh bên bằng $2a$. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD, đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc là 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{16a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{30}}{27}$. **C.** $\frac{16a^3}{9}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{30}}{9}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của $AD\Rightarrow A'E\perp(ABCD)$.

Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc là $45^0\Rightarrow\widehat{A'CE}=45^0$.

Gọi cạnh của hình vuông $ABCD$ là x.

Xét tam giác vuông ΔDEC: $CE=\sqrt{ED^2+DC^2}=\frac{\sqrt{5}\,x}{2}$.

Tam giác $\Delta A'EC$ vuông cân tại $E\Rightarrow EC=A'E=\frac{\sqrt{5}x}{2}$.

Xét tam giác vuông $\Delta A'EA$, ta có:

$A'A^2=AE^2+A'E^2\Leftrightarrow 4a^2=\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x^2=\frac{6x^2}{4}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

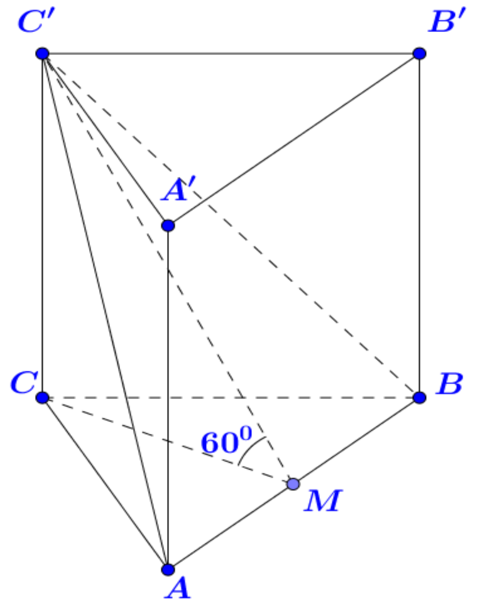
$\Rightarrow A'E=\frac{2\sqrt{30}}{6}a=\frac{\sqrt{30}}{3}a$ và $S_{ABCD}=x^2=\frac{8}{3}a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V=A'E.S_{ABCD}=\frac{8a^3\sqrt{30}}{9}$.

Câu 30: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Tam giác ABC' có diện tích bằng $12\sqrt{3}a^2$ và mặt phẳng (ABC') tạo với đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $216a^3$. **B.** $24a^3$. **C.** $72a^3$. **D.** $18a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB, ta có:

$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (C'CM) \Rightarrow AB \perp C'M \Rightarrow \widehat{C'MC} = 60^\circ$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC).

Do tam giác ABC là hình chiếu của tam giác ABC' trên mặt phẳng (ABC) nên:

$$S_{ABC} = S_{ABC'}.\cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}a^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}a.$$

Lại có: $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}.4\sqrt{3}a = 6a$.

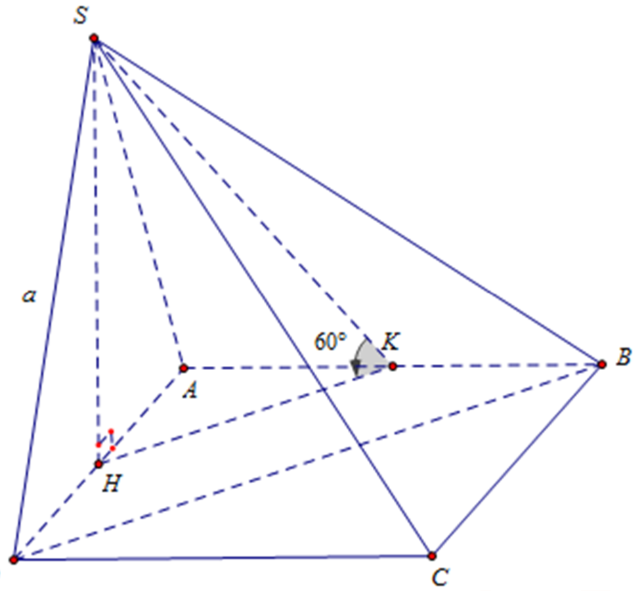
Xét tam giác $C'CM$ vuông tại C, có: $CC' = CM\tan 60^\circ = 6\sqrt{3}a$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = CC'.S_{ABC} = 6\sqrt{3}a.\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}a\right)^2 = 216a^3$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Biết $SD = a$, gọi K là trung điểm của AB, góc giữa đường thẳng SK với mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{4a^3\sqrt{42}}{49}$ **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{42}}{147}$ **C.** $V = \frac{2a^3\sqrt{42}}{49}$ **D.** $V = \frac{4a^3\sqrt{42}}{147}$

Lời giải



Gọi độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là $x\left(x>0\right)$.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow HA=HD=\frac{AD}{2}=\frac{x}{2}$ và $SH\perp AD$ (vì ΔSAD cân tại S).

Ta có: $\begin{cases}\left(SAD\right)\perp\left(ABCD\right)\\ \left(SAD\right)\cap\left(ABCD\right)\\ SH\perp AD\end{cases}\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Do đó: $\left(SK,\left(ABCD\right)\right)=\left(SK,HK\right)=\angle SKH=60^\circ$.

Ta lại có: $HK=\frac{BD}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (Vì HK là đường trung bình trong ΔABD).

$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$ (Vì ΔSHA vuông tại H).

Xét ΔSHK vuông tại H có: $\frac{SH}{HK}=\tan 60^\circ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow a^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3}{2}x^2\Leftrightarrow\frac{7}{4}x^2=a^2\Leftrightarrow x^2=\frac{4a^2}{7}\Leftrightarrow x=\frac{2a}{\sqrt{7}}$

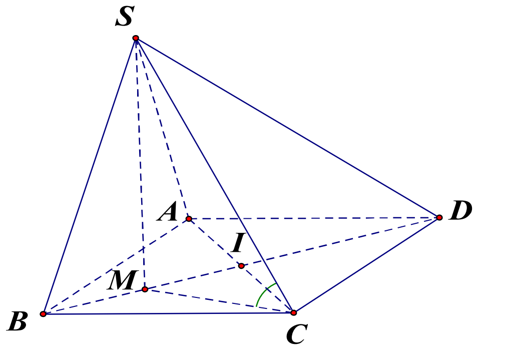
$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{4a^2}{7}$; $SH=\frac{a\sqrt{42}}{7}$. Do đó: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{42}}{7}.\frac{4a^2}{7}=\frac{4a^3\sqrt{42}}{147}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm I, cạnh a, góc BAD bằng 60°, hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm M của BI, góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45°. Tính theo a thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{12}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{48}$

C. $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{8}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{39}}{24}$

Lời giải



Các tam giác ABD, CBD đều nên $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $MI = \frac{BD}{4} = \frac{a}{4}; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CM = \sqrt{MI^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

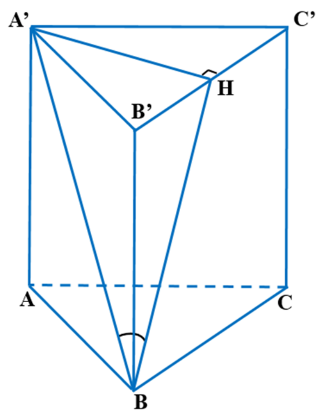
Theo bài ra $\widehat{\left(SC,(ABCD)\right)} = \widehat{SCM} = 45^\circ \Rightarrow h = SM = CM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.h.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{39}}{24}$.

Câu 33: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30^0. Tìm thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Đặt : $AA' = x$

Gọi H là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'H \perp B'C'$. Lại có $A'H \perp BB'$ nên $A'H \perp (BCC'B')$.

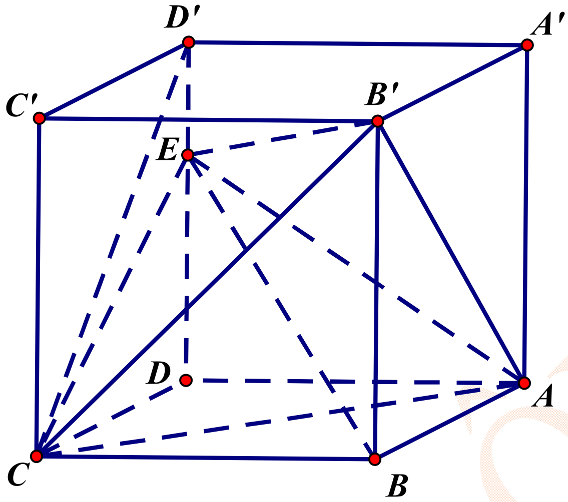
Suy ra HB là hình chiếu của $A'B$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$, suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và HB và bằng góc $\widehat{A'BH}$.

Xét tam giác $A'HB$ vuông tại H ta có $A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$ và $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó

$$\sin\widehat{A'BH} = \frac{A'H}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

Thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi E là một điểm thuộc cạnh DD' sao cho $\tan\left(BE;\left(CDD'\right)\right)=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Thể tích của khối tứ diện $EB'AC$ bằng



A. $\dfrac{5a^3}{18}$ **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{38}}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{19}a^3}{3}$

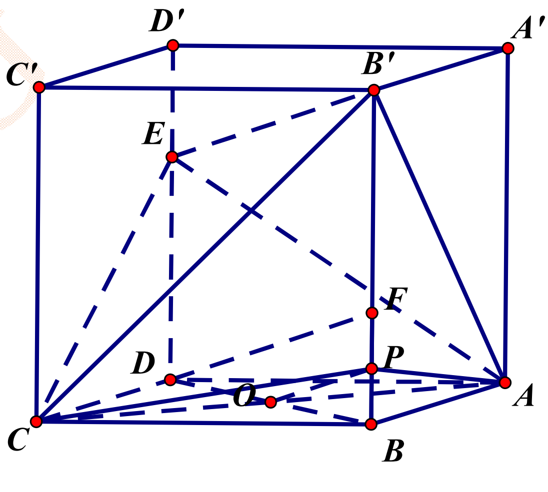
Lời giải

* Xác định vị trí điểm E:

Ta có $BC\perp\left(CDD'\right)$ nên $\tan\left(BE;\left(CDD'\right)\right)=\tan\widehat{BEC}=\dfrac{BC}{CE}$ hay $\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ suy ra $CE=\dfrac{\sqrt{13}}{3}a$.

Lại có $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{a^2+DE^2}$ do đó $DE=\dfrac{2}{3}a$.

* Tính thể tích tứ diện $EB'AC$:



Gọi F là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $\dfrac{BF}{B'B}=\dfrac{1}{3}$ suy ra $DF//EB'$.

Gọi $O=AC\cap BD$, P là trung điểm của MF. Dễ dàng suy ra được $OP//DF//EB'$ nên $EB'//\left(ACP\right)$.

Do đó $d\left(EB';AC\right)=d\left(EB';\left(ACP\right)\right)=d\left(B';\left(ACP\right)\right)=5d\left(M;\left(ACP\right)\right)$ (vì $\dfrac{BP}{MP}=5$).

Ta có $M.ACP$ là tam diện vuông (vuông tại M) nên

$$\frac{1}{\left[d\left(M;\left(ACP\right)\right)\right]^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MP^2}+\frac{1}{MC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{6}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{38}{a^2}.$$

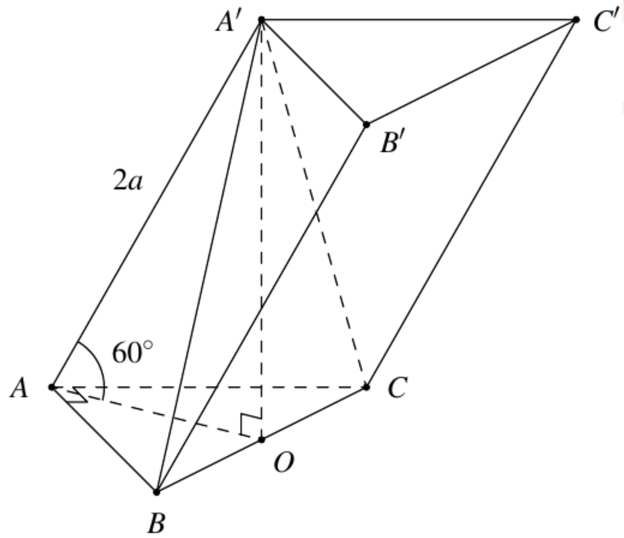
Suy ra $d\left(M;\left(ACP\right)\right)=\frac{a}{\sqrt{38}}$ nên $d\left(EB';AC\right)=\frac{5a}{\sqrt{38}}$.

$$V_{EB'AC}=\frac{1}{6}\cdot EB'\cdot AC\cdot d\left(EB';AC\right)\cdot\sin\left(EB';AC\right)=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{19}{9}a^2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{5a}{\sqrt{38}}\cdot\sin 90^\circ=\frac{5a^3}{18}.$$

Câu 35: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A'A=A'B=A'C=2a$. Biết góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60°. Thể tích lớn nhất của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $a^3 2\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a^3 2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $a^3\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi O là hình chiếu vuông góc của A' trên $\left(ABC\right)$. Vì $A'A=A'B=A'C=2a$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC vuông tại A nên O là trung điểm của BC. Khi đó, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là $\widehat{A'AO}=60^\circ$.

Ta tính được $OA=AA'.\cos\widehat{A'AO}=2a.\cos 60^\circ=a$, $A'O=A'A.\sin\widehat{A'AO}=2a.\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=S_{ABC}\cdot A'O$ lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác ABC lớn nhất.

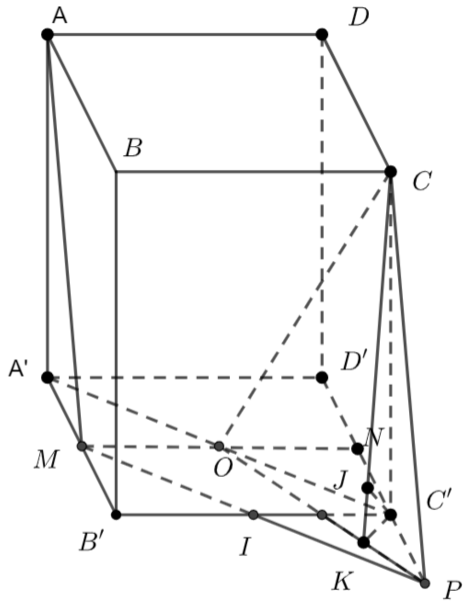
Ta có $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOB}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\widehat{AOB}=a^2\sin\widehat{AOB}\le a^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OA\perp BC$, tức là tam giác ABC vuông cân tại A.

Vậy thể tích lớn nhất của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=a^2\cdot a\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$.

Câu 36: Cho lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$. Gọi M,O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $2a^3$.

Lời giải



Gọi N, I lần lượt là trung điểm $D'C'$ và $B'C'$ và P là điểm đối xứng M qua I, khi đó $AMPC$ là hình bình hành. Ta được $AM // (COP)$.

$\Rightarrow d(AM;OC) = d(AM;(COP)) = d(M;(COP)) = d(N;(COP)) = 2d(C';(COP)) = \dfrac{4a}{9}$.

$\Rightarrow d(C';(COP)) = \dfrac{2a}{9}$.

Gọi độ dài cạnh đáy bằng x.

Ta có: $C'K = \dfrac{1}{2}d(N;OP) = \dfrac{1}{2}NH$ với $\dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{NO^2} + \dfrac{1}{NP^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{5}{x^2}$.

$\Rightarrow NH = \dfrac{x\sqrt{5}}{5}; C'K = \dfrac{x\sqrt{5}}{10}$.

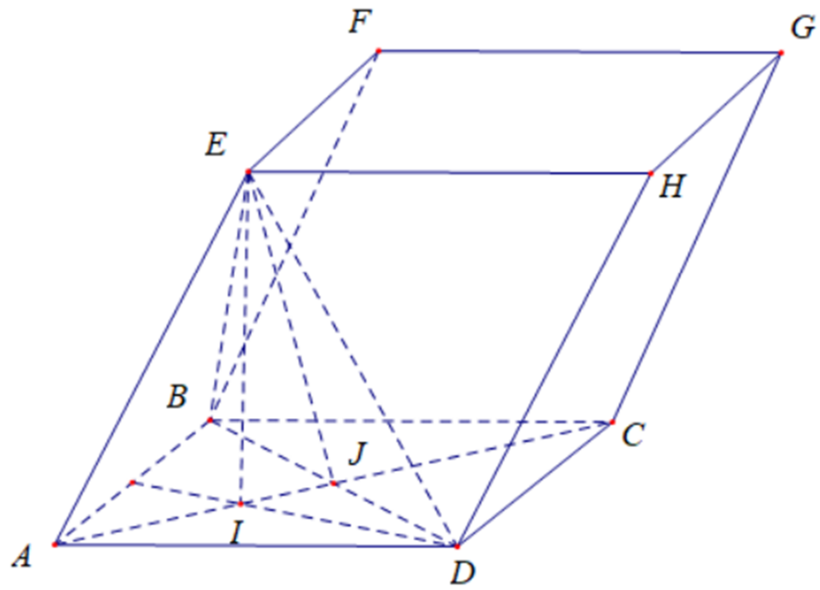
Trong tam giác $CC'K$ có $\dfrac{1}{C'J^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{C'K^2} \Leftrightarrow \dfrac{81}{4a^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{x\sqrt{5}}{10}\right)^2} \Rightarrow x = a$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a.a^2 = 2a^3$.

Câu 37: Cho lăng trụ $ABCD.EFGH$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABD} = 60°$. Góc giữa mặt phẳng (EBD) và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh E cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I là trọng tâm tam giác ABD. Vì E cách đều A, B, D nên EI là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do đó $EI \perp (ABD)$.

Gọi J là trung điểm BD. Do tam giác EBD cân đỉnh J nên $EJ \perp BD$

Ta có tam giác ABD tam giác đều nên $AJ \perp BD$

Suy ra góc giữa (EBD) và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{EJI} = 60°$.

Ta có $IJ = \frac{1}{3}AJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $EI = IJ.\tan 60° = a$.

Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

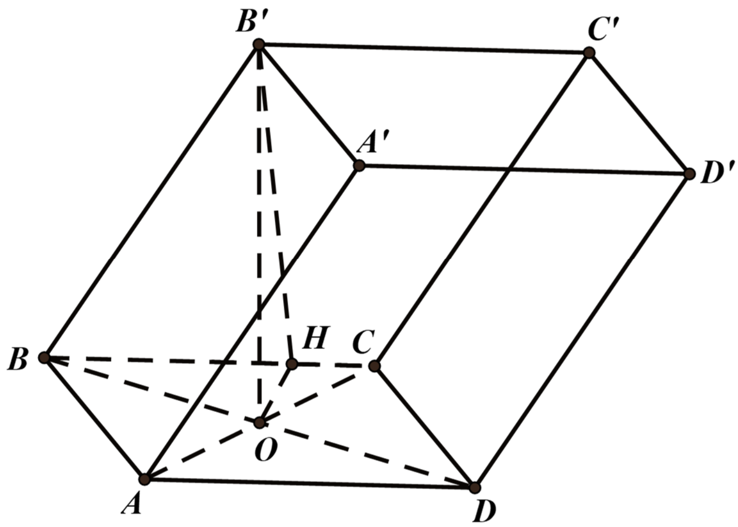
Thể tích khối lăng trụ $ABCD.EFGH$ là $V = S_{ABCD}.EI = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

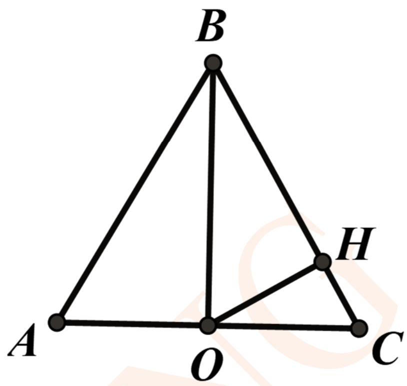
Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A





$ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$. Lại có $\widehat{ABC} = 60°$ nên ΔABC là tam giác đều. $OH \perp BC$.

Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO} = 60°$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{3a^2}. \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

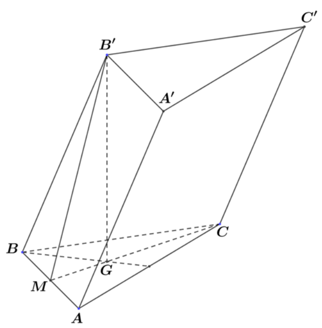
$B'O = OH.\tan\widehat{B'HO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{day}.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 39: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $B'A = B'B = B'C = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{96\sqrt{7}a^3}{49}$. **B.** $\dfrac{72\sqrt{7}a^3}{49}$. **C.** $\dfrac{36\sqrt{7}a^3}{49}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{7}a^3}{49}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm ΔABC, M là trung điểm của AB.

Do $B'A = B'B = B'C = 2a$ và ΔABC đều có G là trọng tâm nên $B'G \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là $\widehat{B'MG} = 60^\circ$.

Đặt $AB = BC = CA = x$ với $x > 0$.

Ta có: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CG = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ và $MG = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.

Xét $\Delta B'MG$ vuông tại G có: $\tan\widehat{B'MG} = \dfrac{B'G}{MG} \Leftrightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{B'G}{MG}$

$\Rightarrow B'G = MG.\tan 60^\circ = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{x}{2}$.

Xét $\Delta B'CG$ vuông tại G có: $B'C^2 = B'G^2 + GC^2 \Leftrightarrow (2a)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4a^2 = \dfrac{7x^2}{12} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{48a^2}{7} \Rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{21}a}{7}$.

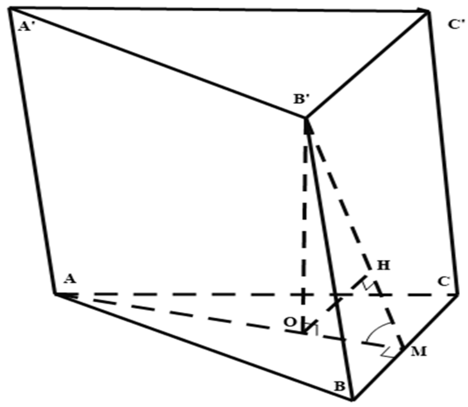
$B'G = \dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$ và $AB = BC = CA = \dfrac{4\sqrt{21}a}{7}$ $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \left(\dfrac{4\sqrt{21}a}{7}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{12\sqrt{3}a^2}{7}$ (đvdt).

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = B'G.S_{\Delta ABC} = \dfrac{2\sqrt{21}a}{7}.\dfrac{12\sqrt{3}a^2}{7} = \dfrac{72\sqrt{7}a^3}{49}$ (đvtt).

Câu 40: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác ABC, H là hình chiếu vuông góc của O lên $B'M$. Giả sử cạnh đáy bằng x.

Ta có $B'O \perp (ABC)$ và $((A'B'C'),(BCC'B')) = ((ABC),(BCC'B')) = \widehat{B'MO} = 60^0$.

$d(A'A, B'C') = d(A'A,(B'C'CB)) = d(A,(B'C'CB)) = 3d(O,(B'C'CB)) = 3OH = 3a$

$\Rightarrow OH = a$.

Trong tam giác $B'OM$ có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{B'O^2} + \dfrac{1}{OM^2}$, trong đó $\begin{cases} OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \\ B'O = OM.\tan 60° = \dfrac{x}{2} \end{cases}$.

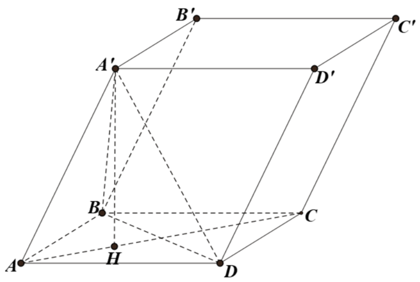
Suy ra $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{12}{x^2} \Rightarrow x = 4a$.

Thể tích khối lăng trụ $V = B'O.S_{ABC} = \dfrac{x}{2}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 8a^3\sqrt{3}$.

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD}=\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=60^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải



Từ giả thuyết ta có các tam giác ΔABD, $\Delta A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều.

$\Rightarrow A'A=A'B=A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD.

$\Rightarrow AH=\dfrac{2}{3}.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\Rightarrow A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

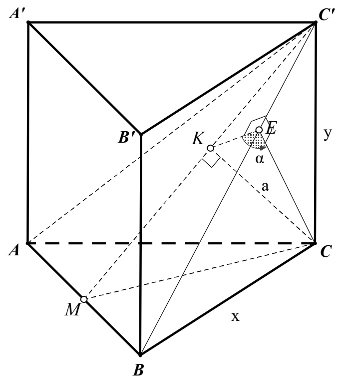
Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V=A'H.S_{ABCD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.2.\dfrac{4a^2.\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{2}a^3$.

thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB.

Do $\begin{cases} AB\perp CC' \\ AB\perp CM \end{cases}\Rightarrow AB\perp(MCC')\Rightarrow(ABC')\perp(MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK\perp(ABC')$, do đó $CK=d(C;(ABC'))=a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải $(1),(2)$ ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

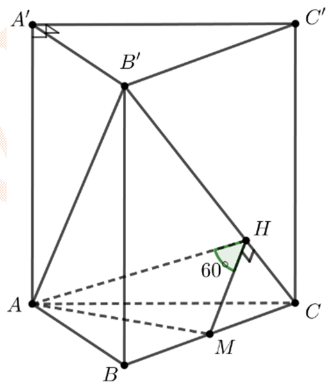
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH. Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60°$.

$\Rightarrow MH = AM.\cot 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin\widehat{HCM}=\frac{MH}{MC}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\widehat{MCH}=\frac{1}{1-\sin^2\widehat{MCH}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\Rightarrow \tan\widehat{MCH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

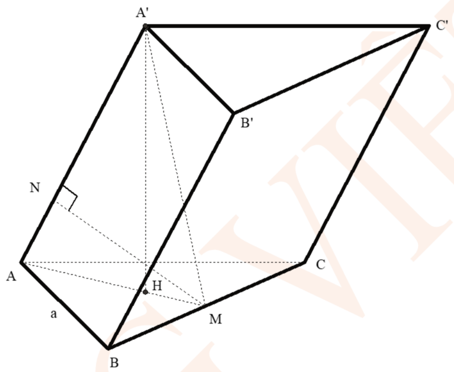
$$\Rightarrow BB'=BC.\tan\widehat{MCH}=a\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{AB'CA'C'}=V_{B'.ACC'A'}=\frac{1}{3}B'A'.AC.BB'=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}.$$

Câu 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

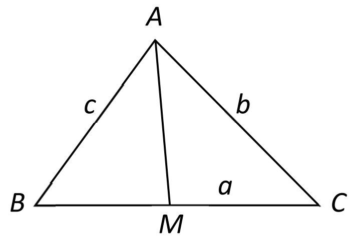


+ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H\perp(ABC)$.

+ $AM\perp BC$ và $AH\perp BC$ $\Rightarrow BC\perp(AA'M)$.

+ Trong tam giác $AA'M$, kẻ $MN\perp AA'$ tại N

$MN\perp BC$ tại M vì $BC\perp(AA'M)$.



$\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC $\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

+ Tam giác $AA'M$ có $S_{\Delta AA'M}=\frac{1}{2}A'H.AM=\frac{1}{2}MN.AA'$

$\Rightarrow A'H.AM=MN.AA'\Leftrightarrow A'H.AM=MN.\sqrt{A'H^2+AH^2}$

$$\Rightarrow A'H=\frac{MN.\sqrt{A'H^2+AH^2}}{AM}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2+\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{A'H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}.$$

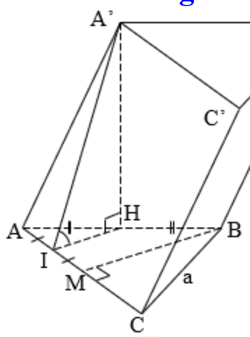
$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $V = \frac{3a^3}{16}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{2}$.

Lời giải



Gọi *H, M, I* lần lượt là trung điểm của *AB, AC, AM*.

Ta có *IH* là đường trung bình của tam giác AMB, *MB* là trung tuyến của tam giác đều *ABC*.

Do đó: $\begin{cases} IH \,//\, MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$.

Có: $\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

Có: $\begin{cases} (ABC) \cap (ACC'A') = AC \\ (ABC): AC \perp IH \\ (ACC'A'): AC \perp A'I \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IH}$ là góc nhọn và là góc gữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$

và $(ABCD) \Rightarrow \widehat{A'IH} = 45°$.

Trong tam giác $A'HI$ vuông tại *H*, ta có: $\tan 45° = \frac{A'H}{HI}$

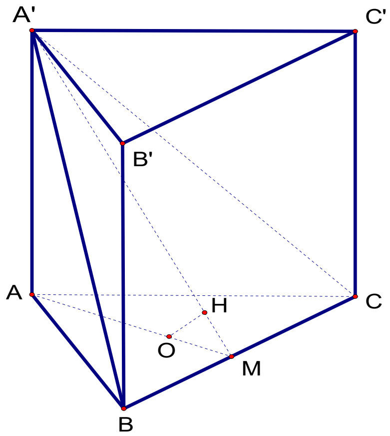
$\Rightarrow A'H = IH.\tan 45^\circ = IH = \frac{1}{2}MB = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}$

Câu 46: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $(A'AM)\perp(A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.

Trong $(A'AM)$ kẻ $OH\perp A'M\ (H\in A'M)$.

$\Rightarrow OH\perp(A'BC)$.

Suy ra: $d\left(O,(A'BC)\right)=OH=\dfrac{a}{6}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{OH}{A'A}=\dfrac{OM}{A'M}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{6}}{A'A}=\dfrac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{A'A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

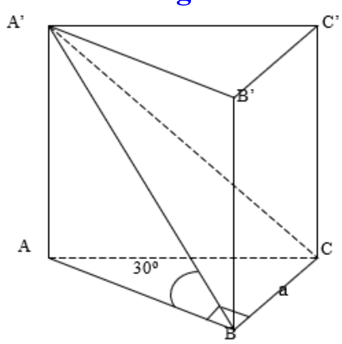
$+\ S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



Do $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AA'B'B)\Rightarrow BC\perp A'B$

Và $\begin{cases} BC=(ABC)\cap(A'BC) \\ (ABC): BC\perp AB \\ (A'BC): BC\perp A'B \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(A'BC)}\right)=\left(\widehat{AB,A'B}\right)=\widehat{ABA'}=30^0$

Ta có:

$S_{\Delta A'BC}=\dfrac{1}{2}A'B.BC$

$\Rightarrow A'B=\dfrac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC}=\dfrac{2.a^2\sqrt{3}}{a}=2a\sqrt{3}$.

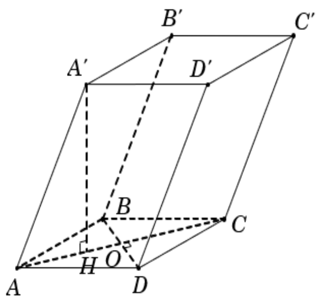
$AB=A'B.\cos\widehat{ABA'}=2a\sqrt{3}.\cos 30^0=3a; AA'=A'B.\sin\widehat{ABA'}=2a\sqrt{3}.\sin 30^0=a\sqrt{3}$

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.AA'=\dfrac{1}{2}.AB.BC.AA'=\dfrac{1}{2}.3a.a.a\sqrt{3}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC}=120^0$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60^0. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi H là tâm của tam giác ABD.

Vì A' cách đều các điểm A, B, D nên $A'H\perp(ABD)$.

Do đó $\left(\widehat{AA',(ABCD)}\right)=\left(\widehat{AA',HA}\right)=\widehat{A'AH}=60^0$.

Ta có $AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông $A'AH$, có $A'H=AH.\tan\widehat{A'AH}=a$.

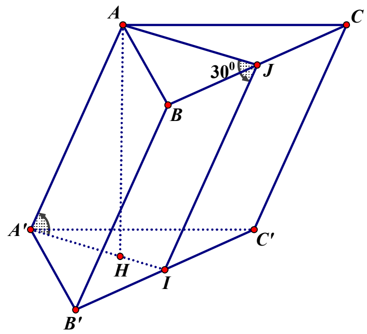
Diện tích hình thoi $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 49: Cho khối lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $AA'=AB'=AC'=a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải



I là trung điểm của $B'C'$, H là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Chóp $A.A'B'C'$ đều nên ta có $AH \perp (A'B'C')$. Suy ra AH là chiều cao và $BC \perp (AA'IJ)$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là $\widehat{AJI} = \widehat{AA'I} = 30^\circ$,

$\Delta A'B'C'$ đều cạnh a nên $A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{2}{3}A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

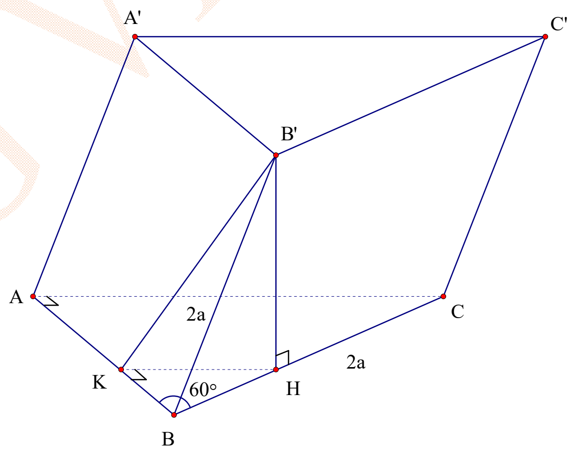
$\Delta AA'H$ vuông tại H ta có $\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{AH}{A'H} \Leftrightarrow AH = A'H.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$

$S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 50: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$. **<u>D.</u>** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Do ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$ nên $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên $BC \Rightarrow H$ thuộc đoạn BC (do $\widehat{B'BC}$ nhọn)
$\Rightarrow B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC)).

Kẻ HK song song AC $(K \in AB)$ $\Rightarrow HK \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

$\Rightarrow \left[\widehat{(ABB'A'),(ABC)}\right] = \widehat{B'KH} = 45° \Rightarrow B'H = KH$ (1)

Ta có $\Delta BB'H$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - B'H^2}$ (2)

Mặt khác HK song song $AC \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HK}{AC} \Rightarrow BH = \dfrac{HK.2a}{a\sqrt{3}}$ (3)

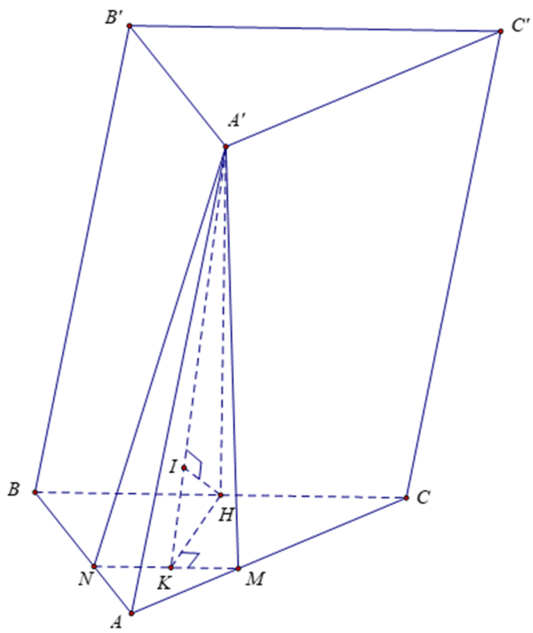
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sqrt{4a^2 - B'H^2} = \dfrac{B'H.2a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow B'H = a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

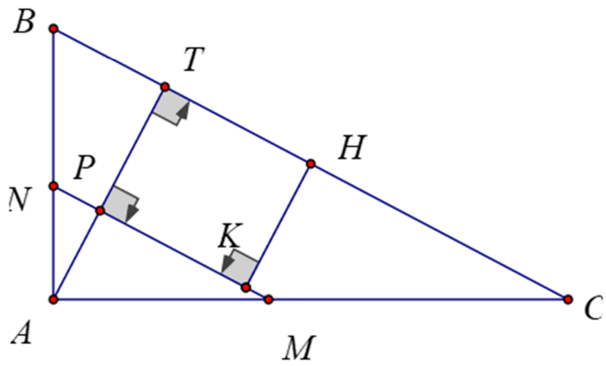
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.B'H = \dfrac{1}{2}AB.AC.B'H = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'C$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải





$d\left(A'M;BC\right) = d\left(BC;\left(A'MN\right)\right) = d\left(H;\left(A'MN\right)\right) = HI \Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT // HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

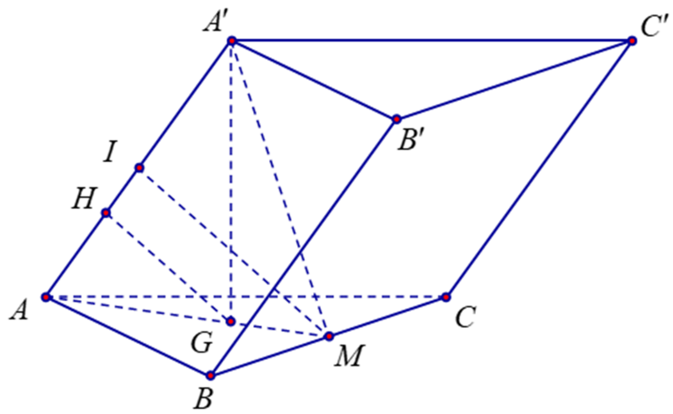
Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = A'H.S_{ABC} = a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



Ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$; $BC \perp AM$ $\Rightarrow BC \perp (MAA')$

Kẻ $MI \perp AA'$; $BC \perp IM$ nên $d(AA';\ BC) = IM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH \perp AA'$, ta có $\frac{AG}{AM} = \frac{GH}{IM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow GH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2 - HG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}}} = \frac{a}{3}$$

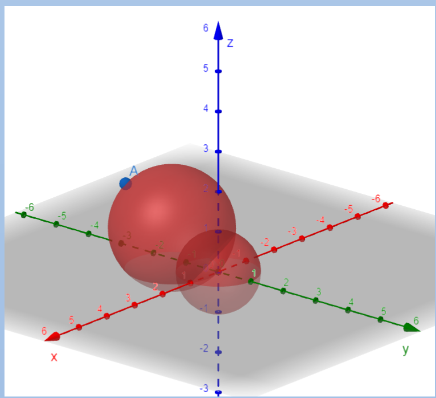
$V_{ABC.A'B'C'} = A'G.S_{ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ (đvtt).

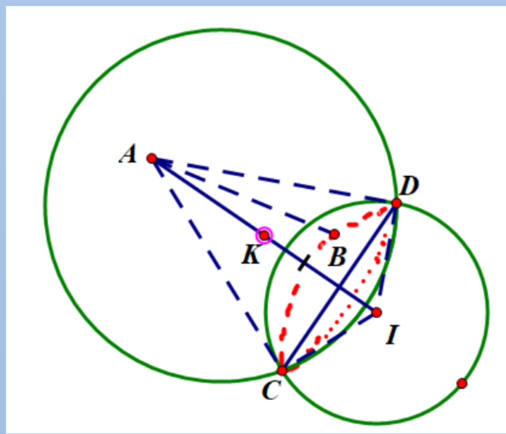
Câu 44: **(Đề TK BGD 2024)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Biết B,C,D là ba điểm phân biệt trên (S) sao cho các tiếp diện của (S) tại mỗi điểm đó đều đi qua A. Hỏi mặt phẳng (BCD) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(1;1;1)$ **B.** $P(-3;1;1)$ **C.** $N(-1;1;1)$. **D.** $Q(1;1;-1)$.

Lời giải

Chọn A





$(S): x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $I(0;0;0)$ và bán kính $R=1$

Ta có $AO=3>R$. Nên A nằm ngoài mặt cầu.

Do $\widehat{ACI}=\widehat{ABI}=\widehat{ADI}=90^0$.

Nên B,C,D thuộc mặt cầu (S_2) tâm $K\left(\frac{1}{2};-1;1\right)$ và bán kính $\frac{AI}{2}=\frac{3}{2}$

$$(S_2):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0$$

Khi đó mặt phẳng (BCD) là giao của 2 mặt cầu $(S);(S_2)$

Giải hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow x-2y+2z-1=0$

Ta có $M(1;1;1)$ thuộc (BCD) vì $1-2.1+2.1-1=0$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 44

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A,B,C là tiếp điểm) thỏa mãn góc $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=-4+3t\\z=1-t\end{cases}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z=0$. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A,B. Gọi I tà tâm mặt cầu (S). Giá trị $\tan\widehat{AIB}$ bằng

A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **C.** $-2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và điểm $A(2;3;3)$. Qua A kẻ các tiếp tuyến đến (S). Khi đó, tập hợp các tiếp điểm M là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\sqrt{69}}{46}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\frac{2\sqrt{69}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho dường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng

A. 4. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$, biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới các mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Giá trị $T=2a+b+c$ bằng

A. $T=\frac{134}{25}$. **B.** $T=\frac{62}{25}$. **C.** $T=\frac{84}{25}$. **D.** $T=\frac{116}{25}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 9. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 7.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=25$ và một điểm $M(9;4;2)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính thể tích khối nón (N) có đỉnh là M và đáy là đường tròn (C) gần nhất với đáp án nào sau đây.

A. 107. **B.** 39. **C.** 113. **D.** 337

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ chứa d tiếp xúc mặt cầu (S) tại các tiếp điểm các tiếp điểm D, E. Khi đó độ dài đoạn thẳng DE bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và một điểm $M(4;-2;4)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm nằm trong mặt phẳng (α). Hỏi mặt phẳng (α) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(3;0;4)$. **B.** $B(0;3;0)$. **C.** $C(0;0;4)$. **D.** $D(4;0;0)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-8x-4y+2z+5=0$. Xét các mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (α) đi qua. Tính giá trị biểu thức $S=a-2b+3c$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 9. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** -9.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Điểm B thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác OAB cân tại B và có diện tích bằng 8. Phương trình mặt phẳng qua ba điểm O, A, B là

A. $z=0$ **B.** $z-y-z=0$. **C.** $x-y+2z=0$. **D.** $x-y+z=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A. $6x+8y+11=0$. **B.** $3x+4y-2=0$. **C.** $3x+4y+2=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12$ và điểm $A(4;4;0)$. Gọi $B(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác OAB cân tại B và diện tích tam giác OAB bằng $4\sqrt{3}$, (với O là gốc tọa độ). Khi đó $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và hai điểm $A(5;-3;3)$, $B(-2;2;-2)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu (S). Gọi (P) là mặt phẳng qua hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ điểm M đến (P) là lớn nhất. Hỏi khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào?

A. $(0;0,5)$. **B.** $(0,5;0,8)$. **C.** $(0,7;1)$. **D.** $(0,9;1,2)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm I, có điểm $C(3;-2;-1)$ và điểm $A'(-1;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu nội tiếp hình lập phương. Biết tiếp diện của (S) tại điểm M trên đoạn IC có phương trình $(P): ax+by+cz+6=0$. Tính tích abc.

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+z^2=12$ và điểm $A(a;b;c)\in(Oxy)$, với a,b,c là những số nguyên. Qua A ta kẻ hai tiếp tuyến đến (S) tại những tiếp điểm M và N. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm A để $\widehat{MAN}=120°$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 16.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu *(S)* có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P), hãy tính tích $m.n$ biết m,n là các số nguyên.

A. $m.n=2$. **B.** $m.n=-2$. **C.** $m.n=4$. **D.** $m.n=-4$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=4$. Điểm M thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\\z=t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến là MA, MB, MC đến mặt cầu (S). Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng $(P): x+y+4z+3=0$. Tính thể tích khối nón có đỉnh M và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{18\pi\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** $\frac{2116\pi}{81\sqrt{27}}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$ có tâm là I. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại hai tiếp điểm A,B. Tìm toạ độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích khối chóp $D.AIB$ bằng $\sqrt{42}$.

A. $D\left(11;\frac{9}{2};18\right)$ hoặc $D\left(-7;\frac{9}{2};-18\right)$. **B.** $D\left(11;-\frac{9}{2};18\right)$ hoặc $D\left(-7;\frac{9}{2};-18\right)$.

C. $D\left(11;-\frac{9}{2};18\right)$ hoặc $D\left(-7;\frac{9}{2};18\right)$. **D.** $D\left(11;-\frac{9}{2};18\right)$ hoặc $D\left(7;\frac{9}{2};-18\right)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;5), B(3;-4;6)$. Gọi (S) là mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+(z-8)^2=25$. Tập hợp các điểm M thuộc mặt cầu (S) và cách đều hai điểm A,B là đường tròn (C). Tính chu vi của đường tròn (C).

A. $\frac{5\sqrt{3}}{4}\pi$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$. **D.** $5\sqrt{3}\pi$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): -3x+2y+2z-1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, vuông góc với mặt phẳng (α) và tiếp xúc mặt cầu (S).

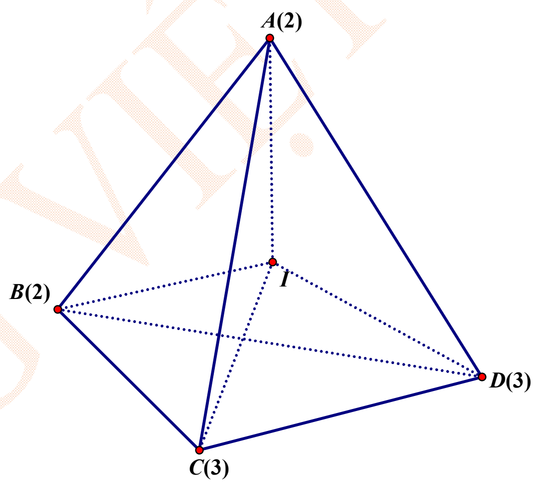
A. $2x+2y+z+18=0$; $2x+y+2z-19=0$. **B.** $2x-y-2z-10=0$; $2x+y+2z-19=0$.

C. $2x+y+2z-19=0$; $2x+2y+z-18=0$. **D.** $2x-y-2z+3=0$; $2x+2y+z+18=0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=45$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{2}=z-2$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), vuông góc với d và cắt (S) theo dây cung có độ dài lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $(-2;4;1)$. **B.** $(-1;3;7)$. **C.** $(0;2;5)$. **D.** $(1;-2;4)$.

Câu 23: Trong không gian, cho bốn mặt cầu tâm A,B,C,D có bán kính lần lượt là $2;3;3;2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu tâm I tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng



A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 24: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$ và điểm $A(5;1;-1)$. Biết các đường thẳng đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) đều nằm trên một một mặt nón đỉnh A. Khi đó thể tích khối nón đỉnh A và có đường tròn đáy được tạo ra bởi các tiếp điểm của đường thẳng qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $V=\frac{588}{125}\pi$ **B.** $V=\frac{58\sqrt{21}}{125}\pi$ **C.** $V=\frac{249\sqrt{21}}{125}\pi$ **D.** $V=\frac{50}{3}\pi$

Câu 25: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.Tìm điểm M thuộc trục hoành có hoành độ dương. Sao cho từ M kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu mà tập hợp các tiếp điểm tạo thành đường tròn có chu vi bằng $\frac{4\sqrt{5}\pi}{3}$.

A. $M(3;0;0)$ **B.** $M(4;0;0)$

C. $M(2;0;0)$ **D.** $M(5;0;0)$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-11;-7;-4)$ và mặt phẳng $(\alpha):6x+2y+3z-55=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α), điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho MA luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tại trung điểm K của đoạn MA và độ dài $MH=7\sqrt{3}$, biết mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ đi qua H. Tính $a+b+c$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=26$ và mặt phẳng $(Q):2x+2y-z+5=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng song song với mặt phẳng (Q)?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Tính $2a+b+c$.

A. $\frac{134}{25}$. **B.** $\frac{116}{25}$. **C.** $\frac{84}{25}$. **D.** $\frac{62}{25}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+6y+2z+6=0$ và mặt phẳng $(P): x-2y=0$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên nằm trên (P) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) qua M và vuông góc với nhau.

A. 22. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 25.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và hai điểm $A(5;2;1)$, $B(1;1;-2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;2)$ và $MN=2\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

A. $\sqrt{34}$ **B.** 5 **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 6

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$. Hai mặt phẳng (P), (Q) chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A,B. Gọi I tà tâm mặt cầu (S). Giá trị $\cos\widehat{AIB}$ bằng

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). Khi đó M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=4$. **C.** $T=5$. **D.** $T=2$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC. Giá trị M^2+m^2 bằng

A. 76. **B.** 78. **C.** 72. **D.** 74.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết phương trình của (α) có dạng $ax+by-z+c=0, (a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=81$. Gọi d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên và cách điểm $M(4;-1;-7)$ một khoảng lớn nhất. Gọi $E(m;n;p)$ là giao điểm của d với mặt phẳng $(P): 2x-y+z-17=0$. Biểu thức $T=m+n+p$ có giá trị bằng

A. $T=81$. **B.** $T=92$. **C.** $T=79$. **D.** $T=88$.

Câu 39: Cho hai đường thẳng $(d):\frac{x}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ và $(d'):\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d). Biết I nằm trên (d') và $a<2$. Tính

$T = a + b + c$

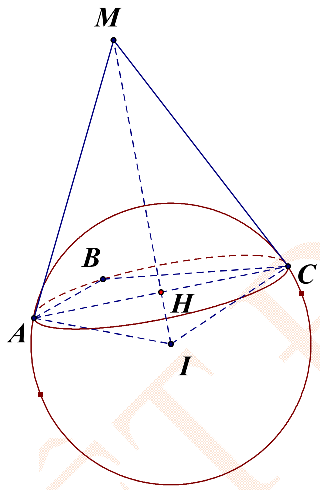
A. 8. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A,B,C là tiếp điểm) thỏa mãn góc $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Gọi $MA=MB=MC=m$.

Tam giác MAB đều $\Rightarrow AB=m$.

Tam giác MBC vuông cân tại $M\Rightarrow BC=m\sqrt{2}$.

Tam giác MAC cân tại M, $\widehat{CMA}=120°\Rightarrow AC=m\sqrt{3}$.

Ta có: $AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Vì $MA=MB=MC, IA=IB=IC$ nên M, H, I thẳng hàng.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác MAI vuông tại A, ta nhận được $MI=\frac{AI}{\sin 60°}=6$.

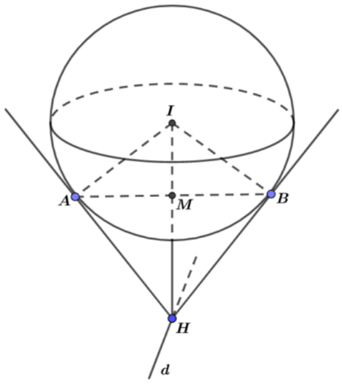
$M\in d\Rightarrow M(t-1;t-2;t+1)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(t-2;t-4;t+4)$.

$$IM^2=36\Rightarrow 3t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\Rightarrow M(-1;-2;1)\ (t/m)\\ t=\frac{4}{3}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{7}{3}\right)\ (l)\end{array}\right.\Rightarrow a+b+c=-2.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\ y=-4+3t\\ z=1-t\end{cases}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z=0$. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A,B. Gọi I tà tâm mặt cầu (S). Giá trị $\tan\widehat{AIB}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **C.** $-2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=-4+3t\\z=1-t\end{cases}$ có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-2;3;-1)$

Gọi H là hình chiếu của I lên d.

Vì $H\in d\Rightarrow H(-2t;-4+3t;1-t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(-2-2t;-3+3t;2-t)$.

Khi đó, $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow-2(-2-2t)+3(-3+3t)-(2-t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow H\left(-1;-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và

$IH=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là hình chiếu của A lên IH.

Xét tam giác AIH vuông tại A có: $IA^2=IM.IH\Rightarrow IM=\dfrac{IA^2}{IH}=\dfrac{R^2}{IH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AIM vuông tại M có $AM^2=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{R^2-IM^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}\Rightarrow AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

Tam giác AIB có $IA=IB=\sqrt{6}, AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

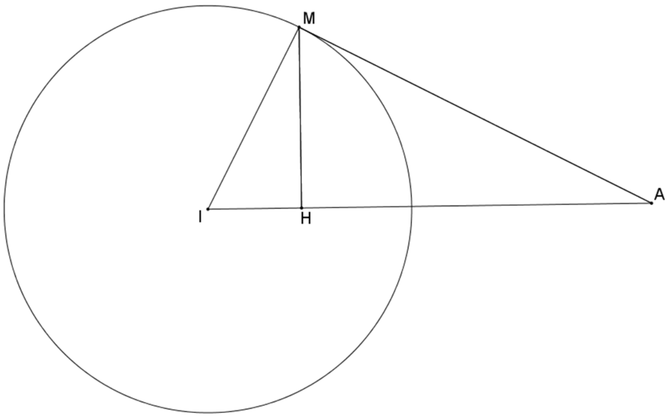
Áp dụng định lý côsin trong tam giác AIB ta có: $\cos\widehat{AIB}=\dfrac{IA^2+IB^2-AB^2}{2IA.IB}=-\dfrac{1}{9}$.

Vì $\cos\widehat{AIB}<0$, nên $\widehat{AIB}>90^0$ $\Rightarrow\tan\widehat{AIB}=-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\widehat{AIB}}-1}=-2\sqrt{2}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và điểm $A(2;3;3)$. Qua A kẻ các tiếp tuyến đến (S). Khi đó, tập hợp các tiếp điểm M là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\sqrt{69}}{46}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\frac{2\sqrt{69}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R=2$.

Do AM là tiếp tuyến của (S) tại M nên $IM\perp AM$. Kẻ $MH\perp IA$ tại H thì tiếp điểm M di chuyển trên đường tròn tâm H, bán kính HM.

Ta có: $IM=2; IA=\sqrt{(2-1)^2+(3+2)^2+(3-2)^2}=3\sqrt{3}$.

Xét tam giác IMA vuông tại M, đường cao MH:

$MA^2=IA^2-IM^2=(3\sqrt{3})^2-2^2=23$.

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MI^2}+\frac{1}{MA^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{23}=\frac{27}{92}\Rightarrow MH=\frac{2\sqrt{69}}{9}$$

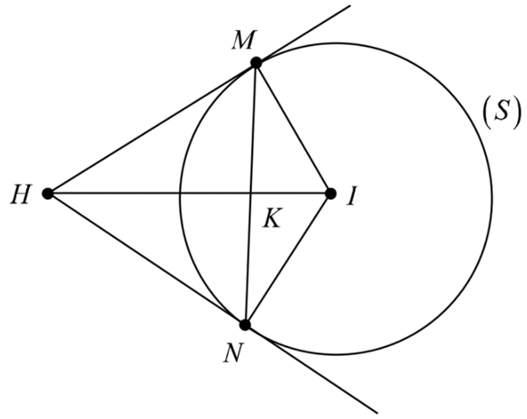
Vậy M thuộc đường tròn bán kính $\frac{2\sqrt{69}}{9}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho dường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng

A. 4. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(2;0;1)$ lên đường thẳng d, thì ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như sau:



Phương trình tham số đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=2+2t\end{cases}$; VTCP của d: $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;2)$.

Gọi $H(1+2t;-t;2+2t)$. Suy ra: $\overrightarrow{IH}=(2t-1;-t;2t+1)$.

Có $\overrightarrow{IH}\perp\overrightarrow{u_{(d)}}\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_{(d)}}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)-1(-t)+2(2t+1)=0\Rightarrow t=0\Rightarrow H(1;0;2)$.

Độ dài đoạn $IH=\sqrt{(2-1)^2+0^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$.

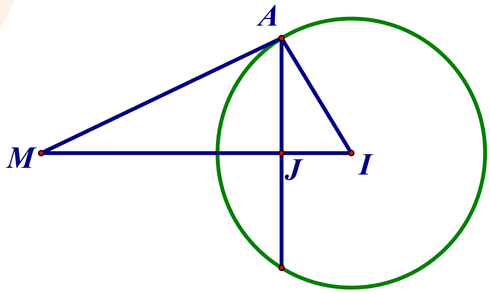
Áp dụng định lý Pythago suy ra: $HM=HN=\sqrt{IH^2-IM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=1$.

Suy ra: $MN=2MK=2.\dfrac{HM.IM}{IH}=2.\dfrac{1.1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$, biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới các mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Giá trị $T=2a+b+c$ bằng

A. $T=\dfrac{134}{25}$. **B.** $T=\dfrac{62}{25}$. **C.** $T=\dfrac{84}{25}$. **D.** $T=\dfrac{116}{25}$.

Lời giải



Ta có $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9\Rightarrow I(1;-1;2);\,R=3$.

$M(1;3;-1)\Rightarrow IM=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=5$.

Gọi A là một tiếp điểm nên $AM=\sqrt{MI^2-IA^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Mặt cầu tâm M bán kính $AM=4$ dạng $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$.

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16\\(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9\end{cases}\Rightarrow 4y-3z+1=0$.

Hay $A \in (P): 4y - 3z + 1 = 0$.

J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Đường thẳng IJ dạng $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

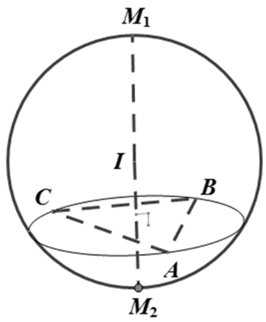
$J = IJ \cap (P) \Rightarrow J$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4y - 3x + 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{11}{25} \\ z = \dfrac{23}{25} \end{cases} \Rightarrow J\left(1; \dfrac{11}{25}; \dfrac{23}{25}\right)$.

Nên $T = 2a + b + c = \dfrac{84}{25}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 7.

Lời giải



Ta có $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1;-3;-4) \\ \overrightarrow{AC} = (1;-1;-4) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;-8;4)$.

Gọi $D(x;y;z) \in (S) \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ \overrightarrow{AD} = (x; y-1; z-1) \end{cases}$.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}|8x - 8y + 4z + 4| = \dfrac{2}{3}|2x - 2y + z + 1|$.

Ta có: $|2x - 2y + z + 1| = |2.(x-1) - 2.y + 1.(z+1) + 2|$

Ta có: $|2(x-1) - 2y + z + 1| \le \sqrt{(2^2 + 2^2 + 1^2)\left[(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2\right]} = 6$

$\Rightarrow -6 \le 2(x-1) - 2y + z + 1 \le 6 \Leftrightarrow -4 \le 2x - 2y + z + 1 \le 8$

$\Rightarrow |2x - 2y + z + 1| \le 8 \Rightarrow V_{ABCD} \le \dfrac{16}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $maxV_{ABCD} = \frac{16}{3}$ xảy ra khi và chỉ khi

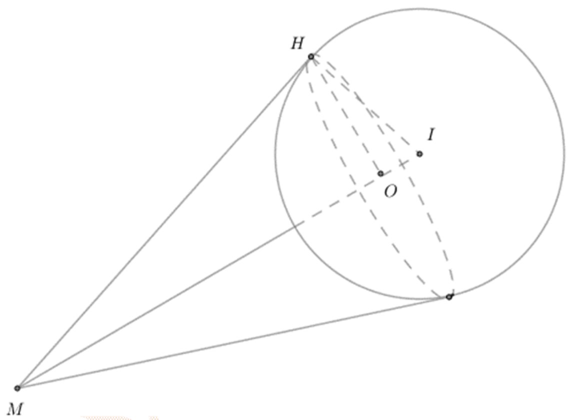
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1} > 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=25$ và một điểm $M(9;4;2)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính thể tích khối nón (N) có đỉnh là M và đáy là đường tròn (C) gần nhất với đáp án nào sau đây.

A. 107 . **B.** 39 . **C.** 113 . **D.** 337

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (8;4;-1)$ và $IM = 9$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ M đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{56}$.

Gọi O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM \perp HO$ và bán kính của (C) là $HO = r$.

Ta có $HI.HM = HO.IM \Rightarrow r = \frac{HI.HM}{IM} = \frac{5\sqrt{56}}{9}$.

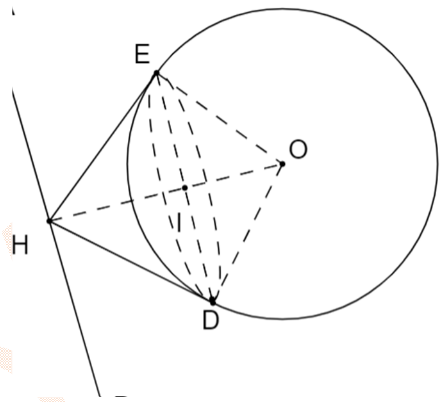
$MH^2 = MO.MI \Leftrightarrow MO = \frac{MH^2}{MI} = \frac{56}{9}$.

$V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi.OH^2.OM = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{56}}{9}\right)^2.\frac{56}{9} = 112,6$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ chứa d tiếp xúc mặt cầu (S) tại các tiếp điểm các tiếp điểm D, E. Khi đó độ dài đoạn thẳng DE bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



+ Mặt cầu (S) có tâm $O(1;-2;1)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d, khi đó $OH \perp d$. Gọi $H(5+2t;1-t;2+t)$

$\overrightarrow{OH}(4+2t;3-t;1+t)$; $\vec{u}_d=(2;-1;1)$

$\overrightarrow{OH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2(4+2t)-1(3-t)+(1+t)1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(3;2;1), OH=2\sqrt{5}$

+ Mặt khác $(\alpha),(\beta)$ tiếp xúc mặt cầu (S) tại các tiếp điểm các tiếp điểm D, E nên $\begin{cases} HE \perp OE \\ HD \perp OD \end{cases}$

Và $OH \perp DE$ cắt nhau tại I, nên $DE=2EI$

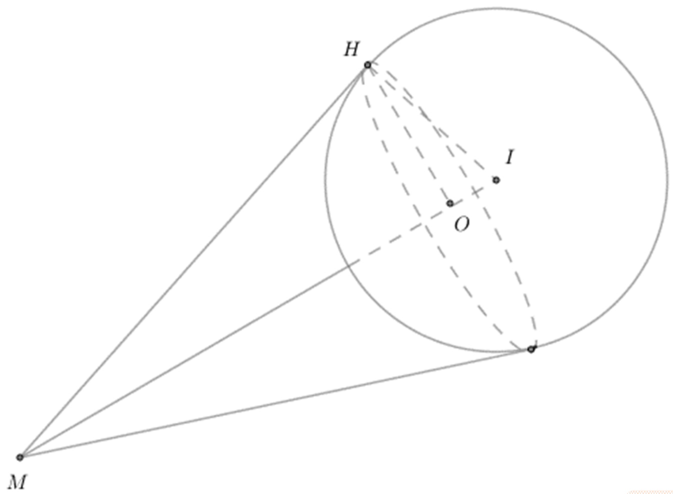
+ Xét tam giác vuông OHE ta có $HE=\sqrt{OH^2-R^2}=4$ và $EI=\frac{EH.R}{\sqrt{EH^2+R^2}}=\frac{2.4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Vậy $DE=2EI=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và một điểm $M(4;-2;4)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm nằm trong mặt phẳng (α). Hỏi mặt phẳng (α) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(3;0;4)$. **B.** $B(0;3;0)$. **C.** $C(0;0;4)$. **D.** $D(4;0;0)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(3;0;4)$ và $IM=5$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ M đến mặt cầu, khi đó $MH=\sqrt{IM^2-R^2}=4$

Gọi O là hình chiếu của H trên MI.

Ta có: $HI.HM=HO.IM \Rightarrow OH=\dfrac{HI.HM}{IM}=\dfrac{3.4}{5}=\dfrac{12}{5}$.

$$IO=\sqrt{IH^2-OH^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{OI}{MI}=\frac{9}{25}\Rightarrow OI=\frac{9}{25}MI\Rightarrow \overrightarrow{IO}=\frac{9}{25}\overrightarrow{IM}.$$

Giả sử $O(x;y;z)$, ta có:

$$(x-1;y+2;z)=\frac{9}{25}(3;0;4)\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{27}{25} \\ y+2=0 \\ z=\dfrac{36}{25}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{52}{25} \\ y=-2 \\ z=\dfrac{36}{25}\end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{52}{25};-2;\frac{36}{25}\right).$$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $O\left(\dfrac{52}{25};-2;\dfrac{36}{25}\right)$, có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(3;0;4)$ có phương trình: $3\left(x-\dfrac{52}{25}\right)+4\left(z-\dfrac{36}{25}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+4z-12=0$.

Thay toạ độ các điểm A,B,C,D vào phương trình mặt phẳng (α) ta thấy toạ độ điểm D thoả mãn. Chọn đáp án **D.**

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-8x-4y+2z+5=0$. Xét các mặt phẳng (α)

thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (α) đi qua. Tính giá trị biểu thức $S=a-2b+3c$.

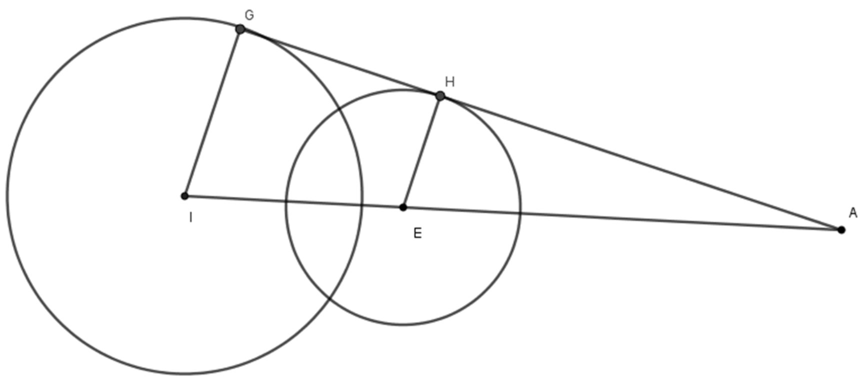
A. $\frac{3}{2}$. **B.** 9. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** -9.

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;-3)$ và bán kính $R_1=6$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $E(4;2;-1)$ và bán kính $R_2=4$.

Ta có $\overrightarrow{IE}=(2;1;2)\Rightarrow IE=3\Rightarrow R_1-R_2<IE<R_1+R_2$. Vậy (S_1), (S_2) là hai mặt cầu cắt nhau.



$\Rightarrow A$ là tâm tỉ cự của hai mặt cầu.

Ta có: $\frac{AI}{AE}=\frac{IG}{EH}=\frac{3}{2}\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}\Rightarrow \begin{cases}2-a=6-\frac{3}{2}a\\1-b=3-\frac{3}{2}b\\-3-c=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}c\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=8\\b=4\\c=3\end{cases}$.

Vậy: $S=a-2b+3c=9$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Điểm B thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác OAB cân tại B và có diện tích bằng 8. Phương trình mặt phẳng qua ba điểm O, A, B là

A. $z=0$ **B.** $z-y-z=0$. **C.** $x-y+2z=0$. **D.** $x-y+z=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Nhận thấy $A,O\in(S)$.

Tam giác OAB cân tại B nên B thuộc mặt phẳng trung trực của OA.

Mặt phẳng trung trực của OA đi qua $M(2;2;0)$ là trung điểm OA và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{OA}=(4;4;0)$ nên có phương trình: $4(x-2)+4(y-2)=0\Leftrightarrow x+y-4=0$ (P).

Điểm $B\in(P)\Rightarrow B(x;4-x;z)$.

$\overrightarrow{OA}=(4;4;0)$, $\overrightarrow{OB}=(x;4-x;z)$;

$\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(4z;-4z;16-8x)$.

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16z^2+16z^2+(16-8x)^2}=8\Leftrightarrow z^2+2(2-x)^2=8$ (1).

Mà $B\in(S)$ nên $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12\Leftrightarrow 2(x-2)^2+(z-2)^2=12$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $8-z^2=12-(z-2)^2\Leftrightarrow z=0$.

Thế vào (1) ta được: $2(2-x)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(0;4;0)\\B(4;0;0)\end{array}\right.$.

Với $B(0;4;0)$, $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;16)=16(0;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (OAB) là $z=0$.

Với $B(4;0;0)$, $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-16)=-16(0;0;1)$. Phương trình mphẳng (OAB) là $z=0$.

Tóm lại, phương trình mặt phẳng (OAB) là $z=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A. $6x+8y+11=0$. **B.** $3x+4y-2=0$. **C.** $3x+4y+2=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính $R=3$.

* Ta tính được $AI=5; AM=\sqrt{AI^2-R^2}=4$.

* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2;3;-1)$, bán kính $AM=4$ là

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16.$$

* M luôn thuộc mặt phẳng $(P)=(S)\cap(S')$ có phương trình: $3x+4y-2=0$.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12$ và điểm $A(4;4;0)$. Gọi $B(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác OAB cân tại B và diện tích tam giác OAB bằng $4\sqrt{3}$, (với O là gốc tọa độ). Khi đó $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của $AO\Rightarrow M(2;2;0)$ và $BM\perp AO$ (do ΔBOA cân tại B).

Ta có: $S_{\Delta OAB}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}BM.OA=4\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}BM.4\sqrt{2}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow BM=\sqrt{6}$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(2;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng $OA\Rightarrow B\in(\alpha)$ và $mp(\alpha)$ nhận $\overrightarrow{OA}=(4;4;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình $mp(\alpha)$ là: $4(x-2)+4(y-2)=0 \Leftrightarrow x+y-4=0$.

Gọi $B(a;b;c)$. Ta có:

$$\begin{cases} B\in(\alpha) \\ B\in(S) \\ BM=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-4=0 \\ (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12 \\ (a-2)^2+(b-2)^2+c^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b=0 \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ (2-b)^2+(b-2)^2+\dfrac{1}{4}=6 \end{cases}$$

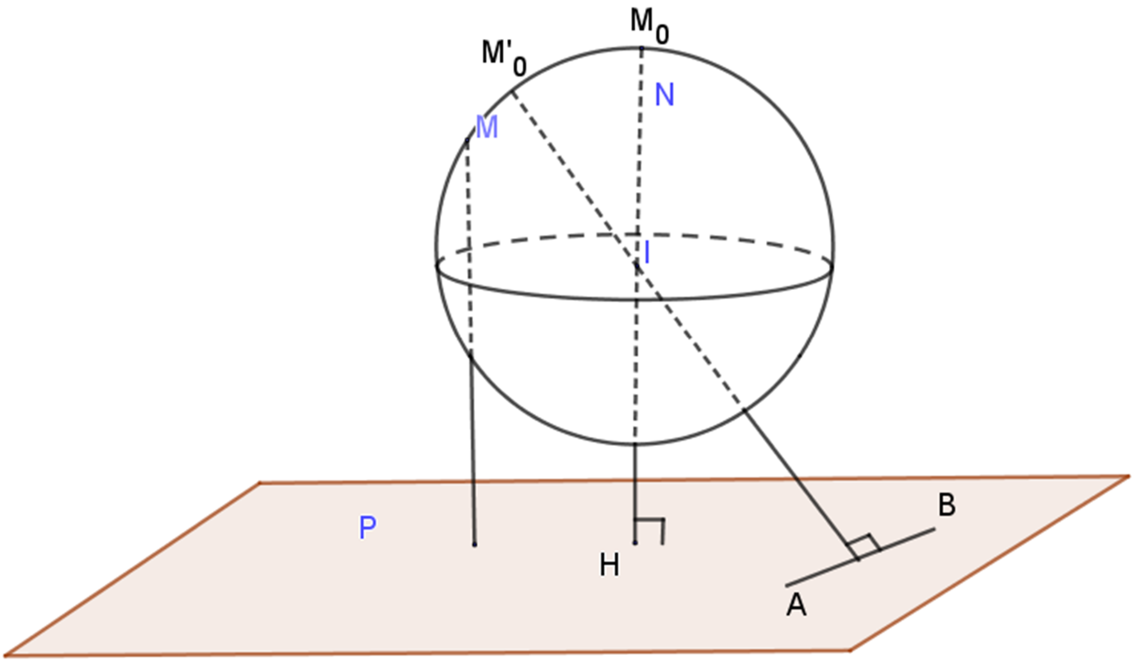
$$\begin{cases} a=4-b \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ (b-2)^2=\dfrac{23}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8-\sqrt{46}}{4} \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{8+\sqrt{46}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\dfrac{8+\sqrt{46}}{4} \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{8-\sqrt{46}}{4} \end{cases}.$$

Vậy $a+b+c=\dfrac{7}{2}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và hai điểm $A(5;-3;3)$, $B(-2;2;-2)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu (S). Gọi (P) là mặt phẳng qua hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ điểm M đến (P) là lớn nhất. Hỏi khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào?

A. $(0;0,5)$. **B.** $(0,5;0,8)$. **C.** $(0,7;1)$. **D.** $(0,9;1,2)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=4$.

$\overrightarrow{IA}=(4;-5;0)$, $\overrightarrow{AB}=(-7;5;-5)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa ba điểm I, A, B. Ta có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{AB}\right]=(25;20;-15)$.

Ta có $d(M,(P))\le d(M_0,(P))=M_0I+IH\le M_0'I+d(I,AB)$.

Suy ra (P) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc (Q). Ta có VTPT $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_Q}\right]=(25;-230;-265)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $5x-46y-53z+d=0$.

Mà $A(5;-3;3)\in(P)$ nên $d=-4$. Suy ra $(P):5x-46y-53z-4=0$.

$d(O,(P))=\dfrac{|-4|}{\sqrt{5^2+(-46)^2+(-53)^2}}\approx 0,057$. Vậy chọn câu **A.**

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm I, có điểm $C(3;-2;-1)$ và điểm $A'(-1;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu nội tiếp hình lập phương. Biết tiếp diện của (S) tại điểm M trên đoạn IC có phương trình $(P):ax+by+cz+6=0$. Tính tích abc.

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Gọi m là cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $A'C=4\sqrt{3}$ và $A'C$ là đường chéo của hình lập phương nên: $A'C=m\sqrt{3}\Leftrightarrow m=4$.

Suy ra mặt cầu (S) nội tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm $I(1;0;1)$ là trung điểm của cạnh $A'C$ và bán kính $R=\dfrac{m}{2}=2$.

Tiếp diện của (S) tại điểm M trên đoạn IC cho ta hai kết luận:

+ $\overrightarrow{A'C}=(4;-4;-4)$ là một VTPT của tiếp diện.

+ $\overrightarrow{IC}=\sqrt{3}\overrightarrow{IM}$ (vì $M\in IC$ mà $IC=2\sqrt{3}$, $IM=R=2$).

Ta có: $\overrightarrow{IC}=(2;-2;-2)$ và $\overrightarrow{IM}=(x_M-1;y_M;z_M-1)$ nên điểm $M\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Tiếp diện (P) cũng có một VTPT $\vec{n}=(1;-1;-1)$ nên $(P):x-y-z+d=0$.

Điểm M thuộc (P) nên $d=-2\sqrt{3}$. Suy ra $(P):x-y-z-2\sqrt{3}=0$ $\Leftrightarrow -\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}z+6=0$.

Vậy $a=-\sqrt{3}$; $b=\sqrt{3}$; $c=\sqrt{3}$ nên tích $abc=-3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **A.**

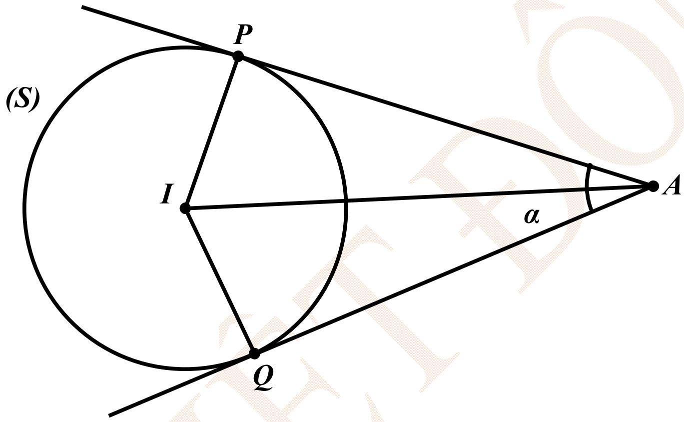
Câu 16: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+z^2=12$ và điểm $A(a;b;c)\in(Oxy)$, với a,b,c là những số nguyên. Qua A ta kẻ hai tiếp tuyến đến (S) tại những tiếp điểm M và N. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm A để $\widehat{MAN}=120°$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 16.

Lời giải

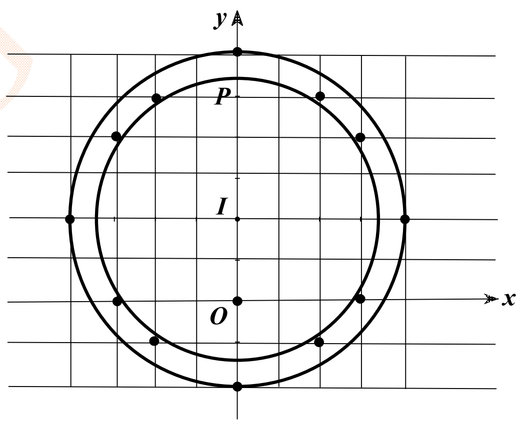
Mặt cầu (S) có tâm $I=(0;2;0)$ và có bán kính $R=2\sqrt{3}$. Tọa độ điểm A là: $A=(a,b;0)$.

Hai tia tiếp tuyến từ A đến (S) tạo với nhau góc lớn nhất khi mặt phẳng chứa hai tia này chứa tâm I của mặt cầu (S). Dễ thấy góc lớn nhất này là α và có: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{IA}$.



Ta luôn có $\widehat{MAN}=120°\le\alpha\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}\ge 60°$.

Suy ra: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{IA}\ge\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{IA}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow IA\le 4$.



Để tồn tại các tiếp tuyến kẻ từ A đến (S) thì điểm A phải không được nằm trong khối cầu và không được nằm trên mặt cầu, vì khi đó A trùng với M và N. Suy ra: $2\sqrt{3}=R<IA\le 4$.

Suy ra: $2\sqrt{3}=R<IA=\sqrt{a^2+(b-2)^2}\le 4\Leftrightarrow 12\le a^2+(b-2)^2\le 16$.

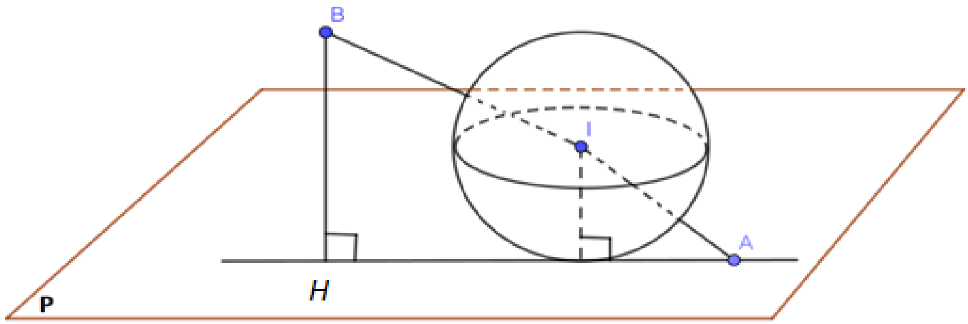
Để đếm toạ độ nguyên ta vẽ các đường tròn tâm $I=(0;2)$ và hai bán kính $2\sqrt{3}$; 4 như hình vẽ bên trên. Từ hình vẽ, ta suy ra có tất cả là: 12 điểm.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu *(S)* có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P), hãy tính tích $m.n$ biết m,n là các số nguyên.

A. $m.n=2$.   **B.** $m.n=-2$.   **C.** $m.n=4$.   **D.** $m.n=-4$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R=6\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{IA}=(-5;11;-5) \Rightarrow IA=\sqrt{171}>6\sqrt{2}$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu.

$\overrightarrow{IB}=(4;-4;16) \Rightarrow IB=12\sqrt{2}>6\sqrt{2}$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu.

A, I, B không thẳng hàng. Mặt phẳng (P) qua A và tiếp xúc với (S) nên khi (P) thay đổi thì tập hợp các đường thẳng qua A và tiếp điểm tạo thành hình nón

Gọi $(AB,(P))=\alpha \Rightarrow d(B,(P))=AB.\sin\alpha$ đạt giá trị lớn nhất khi A,B,I,H đồng phẳng $\Leftrightarrow (AIB)\perp(P)$.(H là hình chiếu của B lên (P))

Mặt phẳng (P) qua A và nhận $\vec{n}=(1;m;n)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình: $x+my+nz-8m-2n=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I,(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|5n-11m+5|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow (5n-11m+5)^2=72(1+m^2+n^2)$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-47n^2-110mn+50n-110m-47=0 \quad (1).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right]=(156;70;-24)$.

Gọi $\vec{n_1}$ là véc tơ pháp tuyến của mp (AIB), chọn $\vec{n_1}=(13;5;-2)$.

Do $(AIB)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 13+5m-2n=0 \quad (2)$.

Thế (2) vào (1) ta được phương trình:

$$2079m^2+8910m+6831=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{-6831}{2079}\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$$. Vậy $m=-1$.

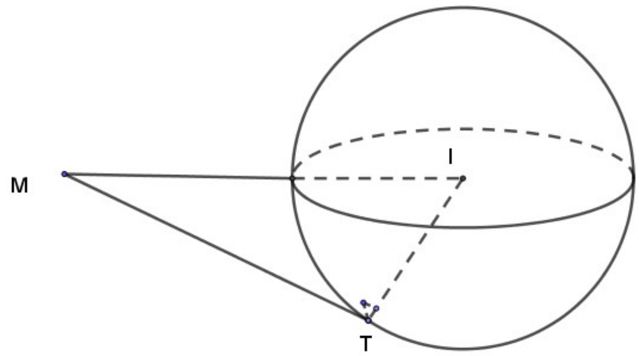
Thay $m=-1$ vào (2) suy ra $n=4$.

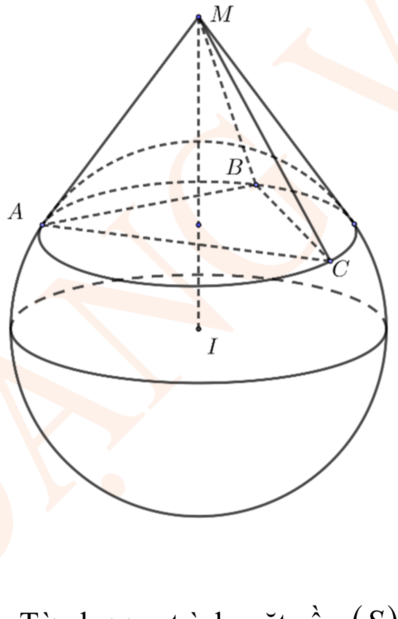
Vậy $m.n=-4$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=4$. Điểm M thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\\z=t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến là MA, MB, MC đến mặt cầu (S). Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng $(P): x+y+4z+3=0$. Tính thể tích khối nón có đỉnh M và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{18\pi\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** $\frac{2116\pi}{81\sqrt{27}}$.

Lời giải





Từ phương trình mặt cầu (S) suy ra tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi $M(1+t;\,3-2t;\,t)$ là điểm thuộc Δ.

Gọi $T(x;y;z)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến bất kỳ kẻ từ M đến mặt cầu (S).

Suy ra ta có: $(x-1)^2+y^2+z^2=4$. Hay: $x^2+y^2+z^2=3+2x$.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có:

$MT^2 + IT^2 = MI^2 \Leftrightarrow \left(x-(t+1)\right)^2 + \left(y-(3-2t)\right)^2 + (z-t)^2 + 4 = t^2 + (3-2t)^2 + t^2$

$\Leftrightarrow tx + (3-2t)y + tz - t - 4 = 0$ (1)

Do A, B, C cũng là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M nên tọa độ các điểm $A; B; C$ cũng thỏa mãn phương trình (1).

Hay phương trình mặt phẳng (ABC) là: $tx + (3-2t)y + tz - t - 4 = 0$.

Do $(ABC) \perp (P)$ nên $\vec{n}_{(ABC)}.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow t + 3 - 2t + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Suy ra $M(0;\, 5;\, -1)$ và phương trình mặt phẳng (ABC): $x - 5y + z + 3 = 0$.

Ta có: $d\left(M;(ABC)\right) = \dfrac{|-25-1+3|}{\sqrt{27}} = \dfrac{23}{\sqrt{27}}$.

$d\left(I;(ABC)\right) = \dfrac{|1+3|}{\sqrt{27}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó:

$r = \sqrt{R^2 - d^2\left(I;(ABC)\right)} = \sqrt{4 - \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{69}}{9}$.

Vậy thể tích khối nón cần tìm là:

$V = \dfrac{1}{3}.S_{đáy}.d\left(M;(ABC)\right) = \dfrac{1}{3}.\pi r^2.d\left(M;(ABC)\right) = \dfrac{1}{3}.\pi.\dfrac{276}{81}.\dfrac{23}{\sqrt{27}} = \dfrac{2116\pi}{81\sqrt{27}}$ (đvtt).

Câu 19: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{4}$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$ có tâm là I. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại hai tiếp điểm A, B. Tìm toạ độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích khối chóp $D.AIB$ bằng $\sqrt{42}$.

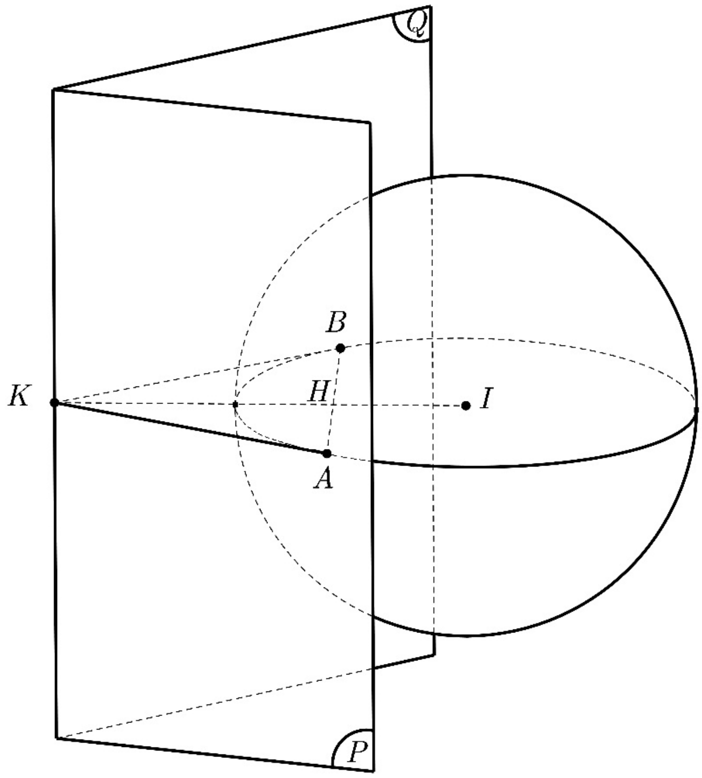
A. $D\left(11; \dfrac{9}{2}; 18\right)$ hoặc $D\left(-7; \dfrac{9}{2}; -18\right)$.

B. $D\left(11; -\dfrac{9}{2}; 18\right)$ hoặc $D\left(-7; \dfrac{9}{2}; -18\right)$.

C. $D\left(11; -\dfrac{9}{2}; 18\right)$ hoặc $D\left(-7; \dfrac{9}{2}; 18\right)$.

D. $D\left(11; -\dfrac{9}{2}; 18\right)$ hoặc $D\left(7; \dfrac{9}{2}; -18\right)$.

Lời giải



Đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ đi qua $M_0(2;0;0)$ và nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm VTCP.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$ có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có:

$$\begin{cases} IA\perp(P) \\ IB\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} IA\perp d \\ IB\perp d\end{cases}\Rightarrow(AIB)\perp d.$$

Gọi $K=d\cap(AIB)\Rightarrow IK\perp d$ hay K là hình chiếu của I lên d

$$\Rightarrow K(2;0;0)\Rightarrow KI=\sqrt{6}.$$

Xét tứ giác $KAIB$ có KI và AB cắt nhau tại trung điểm H của AB.

Ta có: $IH.IK=R^2\Leftrightarrow IH=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Suy ra $AH=\sqrt{R^2-HI^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Khi đó diện tích tam giác AIB là: $S_{\Delta AIB}=IH.AH=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lại có: $V_{D.AIB}=\dfrac{1}{3}DK.S_{\Delta AIB}=\sqrt{42}\Rightarrow DK=\dfrac{9\sqrt{21}}{2}$.

$D\in d\Rightarrow D(2+2t;-t;4t)\Rightarrow \overrightarrow{DK}=(-2t;t;-4t)\Rightarrow DK=\sqrt{21t^2}=\dfrac{9\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{9}{2}$.

Vậy $D\left(11;-\dfrac{9}{2};18\right)$ hoặc $D\left(-7;\dfrac{9}{2};-18\right)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;5), B(3;-4;6)$. Gọi (S) là mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+(z-8)^2=25$. Tập hợp các điểm M thuộc mặt cầu (S) và cách đều hai điểm A,B là đường tròn (C). Tính chu vi của đường tròn (C).

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\pi$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\pi$. **D.** $5\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Vì M cách đều hai điểm A,B nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của AB.

Mà M thuộc mặt cầu (S), do đó M thuộc đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Giả sử đường tròn đó có bán kính r.

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(2;-3;\dfrac{11}{2}\right)$.

(P) đi qua I và có VTPT là $\overrightarrow{AB}=(2;-2;1)$ nên có phương trình là $4x-4y+2z-31=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $K(0;0;8)$, bán kính $R=5$.

Khi đó $d(K,(P))=\dfrac{5}{2}\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(K,(P))}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow$ Chu vi của đường tròn (C) là $2\pi r=5\sqrt{3}\pi$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):-3x+2y+2z-1=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, vuông góc với mặt phẳng (α) và tiếp xúc mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z+18=0$; $2x+y+2z-19=0$. **B.** $2x-y-2z-10=0$; $2x+y+2z-19=0$.

C. $2x+y+2z-19=0$; $2x+2y+z-18=0$. **D.** $2x-y-2z+3=0$; $2x+2y+z+18=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)}=(-3;2;2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$.

Gọi véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (P): $a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0$.

Do $(P)\perp(\alpha)$ nên $\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow -3a+2b+2c=0\Leftrightarrow 3a=2(b+c)$.

Do mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S) nên $d\left(I,(P)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{|-3a-b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$

$\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(3a+b+c\right)^2, (*)$.

Thay $3a=2(b+c)$ vào $(*)$ ta được

$4(b+c)^2+9\left(b^2+c^2\right)=\left(2b+2c+b+c\right)^2$

$\Leftrightarrow 4(b+c)^2+9\left(b^2+c^2\right)=9(b+c)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2-5bc+2c^2=0$

$\Leftrightarrow (2b-c)(b-2c)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2b=c\\ b=2c\end{array}\right.$

Với $2b=c$: chọn $b=1\Rightarrow c=2,\ a=2\Rightarrow (P):2x+y+2z-19=0$.

Với $b=2c$: chọn $b=2\Rightarrow c=1,\ a=2\Rightarrow (P):2x+2y+z-18=0$.

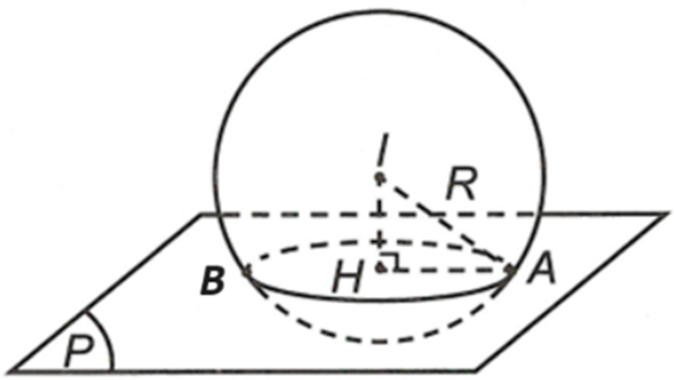
Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=45$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z+3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{2}=z-2$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), vuông góc với d và cắt (S) theo dây cung có độ dài lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $(-2;4;1)$. **B.** $(-1;3;7)$. **C.** $(0;2;5)$. **D.** $(1;-2;4)$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;6)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Khi đó $d(I,(P))=\dfrac{|2.1+2.(-4)-6+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3<R$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.



Gọi $\{A,B\}=\Delta\cap(S)$.

Ta có: $\frac{AB}{2}=\sqrt{R^2-d^2(I,\Delta)}$. Do đó dây cung AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow$ $d(I,\Delta)$ có độ dài nhỏ nhất hay đường thẳng Δ là đường thẳng chứa đường kính của đường tròn giao tuyến.

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ I đến mặt phẳng (P).

Đường thẳng IH đi qua $I(1;-4;6)$ và có VTCP $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_{(P)}=(2;2;-1)$ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-4+2t \\ z=6-t \end{cases}$.

$H\in IH\Rightarrow H(1+2t;-4+2t;6-t)$.

$H=IH\cap(P)\Rightarrow 2(1+2t)+2(-4+2t)-(6-t)+3=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;-2;5)$.

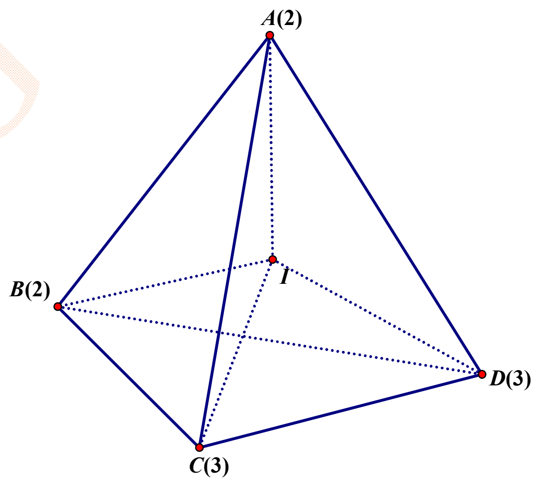
Lại có $\begin{cases} \Delta\perp d \\ \Delta\subset(P) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{u}_\Delta\perp\vec{u}_d \\ \vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_{(P)} \end{cases}$. Ta chọn VTCP $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(4;-5;-2)$.

Đường thẳng Δ đi qua $H(3;-2;5)$ và có VTCP $\vec{u}_\Delta=(4;-5;-2)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-5}{-2}.$$

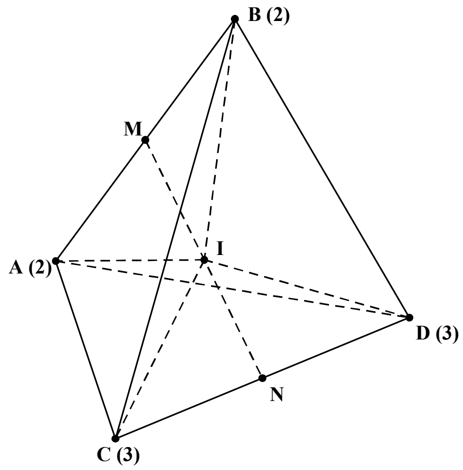
Vậy Δ đi qua điểm có tọa độ $(-1;3;7)$.

Câu 23: Trong không gian, cho bốn mặt cầu tâm A,B,C,D có bán kính lần lượt là $2;3;3;2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu tâm I tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng



A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải



Gọi A, B là tâm mặt cầu có bán kính bằng 2. C, D là tâm mặt cầu có bán kính bằng 3. Gọi I là tâm mặt cầu có bán kính x, tiếp xúc ngoài với bốn mặt cầu đó.

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2,\ IC = ID = x + 3$.

Gọi (P), (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD.

$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q)\ (1)$.

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD, với M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD, suy ra $MN = (P) \cap (Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$.

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$.

Tam giác AMN có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{AC^2 - CN^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = 2\sqrt{3}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{(x+3)^2 - 9} \\ v = \sqrt{(x+2)^2 - 4} \\ u \ge 0;\ v \ge 0 \end{cases}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 2\sqrt{3} \\ u^2 - v^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{3} \\ (u+v)(u-v) = 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{3} \\ u-v=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow u=\dfrac{6+x}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x}=\dfrac{6+x}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -6 \\ 12\left(x^2+6x\right)=\left(x+6\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ 12x=x+6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=\dfrac{6}{11} \end{array}\right. .$$

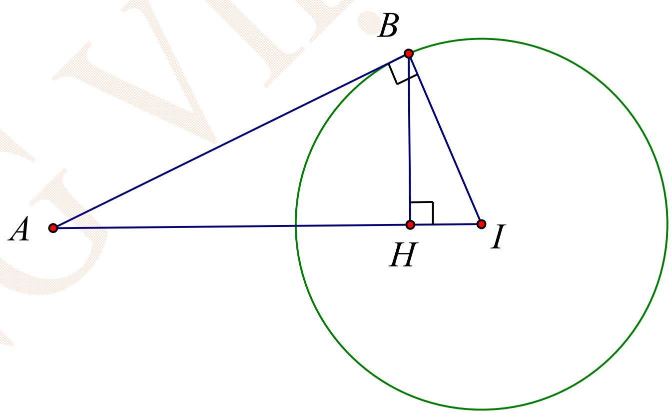
Do $x>0$ nên ta nhận nghiệm $x=\dfrac{6}{11}$.

Vậy mặt cầu tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng $\dfrac{6}{11}$.

Câu 24: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$ và điểm $A(5;1;-1)$. Biết các đường thẳng đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) đều nằm trên một một mặt nón đỉnh A. Khi đó thể tích khối nón đỉnh A và có đường tròn đáy được tạo ra bởi các tiếp điểm của đường thẳng qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $V=\dfrac{588}{125}\pi$ **B.** $V=\dfrac{58\sqrt{21}}{125}\pi$ **C.** $V=\dfrac{249\sqrt{21}}{125}\pi$ **D.** $V=\dfrac{50}{3}\pi$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=2$.

Có $\overrightarrow{IA}=(4;3;0)\Rightarrow IA=5$.

Gọi B là 1 tiếp điểm của đường thẳng qua A với mặt cầu, khi đó ΔIAB vuông tại B, $BI=R=2$, $AI=5$. Khi đó đường sinh của hình nón là $AB=\sqrt{IA^2-IB^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$.

Bán kính đường tròn đáy là đường cao BH của tam giác $ABI \Rightarrow r=HB=\dfrac{BA.BI}{\sqrt{BA^2+BI^2}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}$.

Khi đó chiều cao của hình nón là $AH = \sqrt{BA^2 - HB^2} = \sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2} = \frac{21}{5}$.

Vậy thể tích khối nón cần tìm là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2.\frac{21}{5} = \frac{588}{125}\pi$.

Câu 25: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$. Tìm điểm M thuộc trục hoành có hoành độ dương. Sao cho từ M kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu mà tập hợp các tiếp điểm tạo thành đường tròn có chu vi bằng $\frac{4\sqrt{5}\pi}{3}$.

A. $M(3;0;0)$ **B.** $M(4;0;0)$
C. $M(2;0;0)$ **D.** $M(5;0;0)$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Giả sử điểm $M(a;0;0)$ thuộc trục hoành với $a>0$ và A là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến mặt cầu.

Gọi H là tâm đường tròn tạo bởi các tiếp điểm $\Rightarrow r = AH = \frac{\frac{4\sqrt{5}\pi}{3}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$..

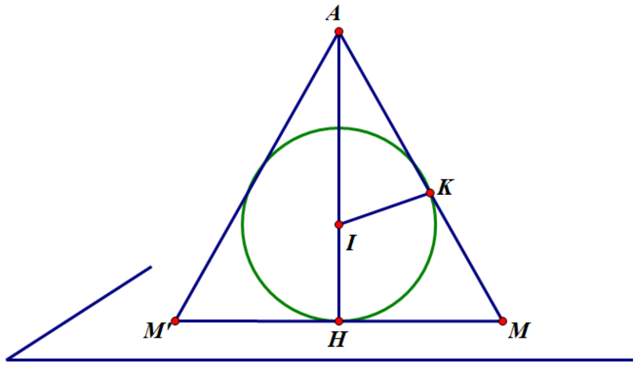
Tam giác MAI vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow MA = 2 \Rightarrow IM = \sqrt{R^2+MA^2} = 3$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+4+1} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \end{array}\right.$ do $a>0$ suy ra $a=3$ $\Rightarrow$ $M(3;0;0)$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-11;-7;-4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 6x+2y+3z-55=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α), điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho MA luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tại trung điểm K của đoạn MA và độ dài $MH = 7\sqrt{3}$, biết mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ đi qua H. Tính $a+b+c$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải



Ta có đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (α) có phương trình là:

$$\begin{cases} x=-11+6t \\ y=-7+2t \\ z=-4+3t \end{cases},\forall t\in\mathbb{R}.$$

Khi đó $H=d\cap(\alpha)\Rightarrow H(7;-1;5)$, $AH=d\left(A,(\alpha)\right)=21$.

Xét tam giác ΔAHM vuông tại H ta có: $AM=\sqrt{AH^2+HM^2}=\sqrt{21^2+\left(7\sqrt{3}\right)^2}=14\sqrt{3}$.

Vì $M\in(\alpha)$ và $MH=7\sqrt{3}$ nên tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm H có đường kính bằng $14\sqrt{3}$. Vậy ta có mặt cầu (S) nội tiếp hình nón khi quay tam giác AHM quanh trục AH. Khi đó tâm I trùng với trọng tâm $\Delta AMM'$.

Vậy ta có $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{IH}\Leftrightarrow\begin{cases} -3a+21=18 \\ -3b-3=6 \\ -3c+15=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}.$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ suy ra $a+b+c=1+(-3)+2=0$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=26$ và mặt phẳng $(Q):2x+2y-z+5=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng song song với mặt phẳng (Q)?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-3),R=\sqrt{26}$.

Ta có: $M\in Ox\Rightarrow M(a;0;0)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S).

Khi đó (P) đi qua $M(a;0;0)$, song song với mặt phẳng (Q), phương trình mặt phẳng (P) là:

$2(x-a)+2y-z=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-2a=0$

Ta có: M là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra

$IM > R \Leftrightarrow (a-2)^2 + 1 + 9 > 26 \Leftrightarrow (a-2)^2 > 16$ (1)

$d(I,(P)) < R \Leftrightarrow \dfrac{|4-2+3-2a|}{3} < \sqrt{26} \Leftrightarrow |5-2a| < 3\sqrt{26}$ (2)

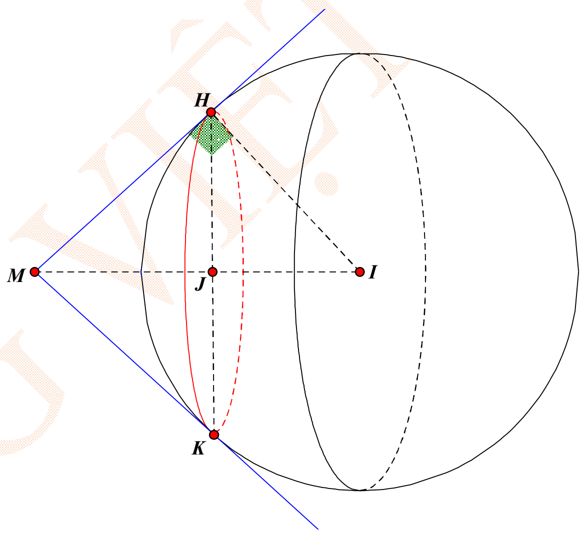
Từ (1) và (2), suy ra: $\begin{cases}(a-2)^2 > 16 \\ |5-2a| < 3\sqrt{26}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a > 6 \\ a < -2\end{array}\right. \\ -5 \le a \le 10\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 \le a \le -3 \\ 7 \le a \le 10\end{array}\right.$ (do $a \in \mathbb{Z}$)

Vậy có 7 điểm M thoả mãn.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Tính $2a+b+c$.

A. $\dfrac{134}{25}$. **B.** $\dfrac{116}{25}$. **C.** $\dfrac{84}{25}$. **D.** $\dfrac{62}{25}$.

Lời giải



Ta có: $(S):\begin{cases}I(1;-1;2) \\ R=3\end{cases}$. Khi đó $IM = 5 > R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên $MI:\begin{cases}x=1 \\ y=-1+4t \\ z=2-3t\end{cases} (t \in \mathbb{R})$ nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét tam giác MHI vuông tại H có:

$MI = 5; IH = 3 \Rightarrow MH = \sqrt{MI^2 - HI^2} = 4$.

$\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HJ = \dfrac{12}{5}$.

$MJ.MI = MH^2 \Rightarrow MJ = \frac{16}{5}$.

Mặt khác, $\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ = \sqrt{(-4+4t)^2 + (3-3t)^2} = \frac{16}{5}$.

$\Leftrightarrow (-4+4t)^2 + (3-3t)^2 = \frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 16 - 32t + 16t^2 + 9 - 18t + 9t^2 = \frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 25t^2 - 50t + \frac{369}{25} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{9}{25} \\ t = \frac{41}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right) \\ J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right) \end{array}\right.$.

+) Với $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{9}{5} < IM$ (nhận).

+) Với $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{\sqrt{1097}}{5} > IM$ (loại).

Vậy $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ nên: $2a + b + c = \frac{84}{25}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y + 2z + 6 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y = 0$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên nằm trên (P) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) qua M và vuông góc với nhau.

A. 22. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 25.

Lời giải

Tâm và bán kính của mặt cầu (S) lần lượt là $I(4;-3;-1)$, $R = \sqrt{20}$

Gọi $M(2a;a;b) \in (P)$

$IM = \sqrt{(2a-4)^2 + (a+3)^2 + (b+1)^2}$

Để tồn tại các tiếp tuyến của (S) qua M thì $IM \geq R$.

Khi $IM > R$ thì tập hợp các tiếp tuyến của (S) qua M là một mặt nón tròn xoay đỉnh M ngoại tiếp (S), mỗi đường sinh là một tiếp tuyến. Để tồn tại cặp đường sin vuông góc với ngay thì góc ở đỉnh của mặt nón phải lớn hơn hoặc bằng 90° suy ra $IM \leq R\sqrt{2}$.

Theo yêu cầu bài ra ta có

$R \le IM \le R\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{20} \le IM \le \sqrt{40} \Leftrightarrow 20 \le (2a-4)^2 + (a+3)^2 + (b+1)^2 \le 40$

$\Leftrightarrow 0 \le 5(a-1)^2 + (b+1)^2 \le 20$

Vì M có tọa độ nguyên nên ta có bảng giá trị sau

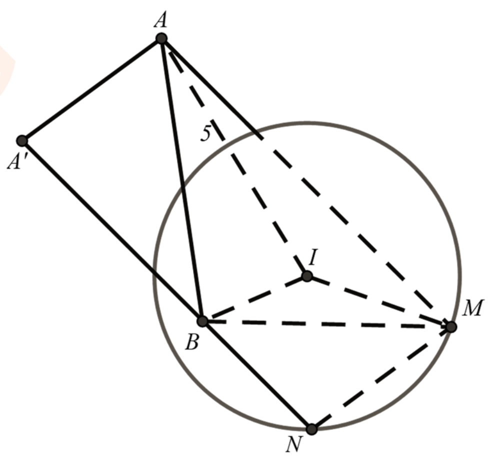
$(a-1)^2$	$(b+1)^2$	Số điểm M
0	0	1
	1	2
	4	2
	9	2
	16	2
1	0	2
	1	4
	4	4
	9	4
4	0	2

Vậy số điểm M là 25 điêm.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và hai điểm $A(5;2;1)$, $B(1;1;-2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;2)$ và $MN=2\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

A. $\sqrt{34}$ **B.** 5 **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 6

Lời giải



Tâm $I(2;1;-2)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;1;3) \Rightarrow IA=\sqrt{19}$

nên điểm $A(5;2;1)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1;1;-2)$ nằm trong mặt cầu (S).

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;2)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;k;2k), k>0$ do $MN=2\sqrt{5}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;2;4)$.

Gọi $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A'=(5;4;5)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$

Ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

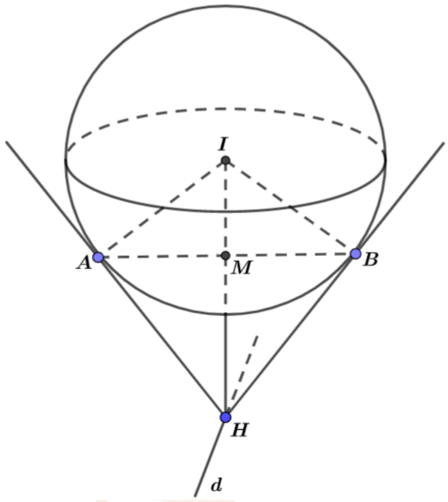
suy ra $A'B=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$.

Vậy $|AM-BN|_{\min}=A'B=\sqrt{34}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A,B. Gọi I tà tâm mặt cầu (S). Giá trị $\cos\widehat{AIB}$ bằng

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-1-3t\\z=t\end{cases}$, $\overrightarrow{u_d}=(2;-3;1)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên d.

Vì $H\in d\Rightarrow H(-2+2t;-1-3t;t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(-4+2t;-3t;t+1)$.

Khi đó, $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(-4+2t)-3(-3t)+(t+1)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow H\left(-1;-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $IH=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là hình chiếu của A lên IH.

Xét tam giác AIH vuông tại A có: $IA^2=IM.IH\Rightarrow IM=\frac{IA^2}{IH}=\frac{R^2}{IH}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AIM vuông tại M có $AM^2=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{R^2-IM^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}\Rightarrow AB=\frac{2\sqrt{30}}{3}$.

Tam giác AIB có $IA = IB = \sqrt{6}, AB = \dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác AIB ta có: $\cos\widehat{AIB} = \dfrac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2IA.IB} = -\dfrac{1}{9}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 1+9t \\ z = 3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2-5t \\ y = 1+3t \\ z = 3 \end{cases}$. **<u>C.</u>** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1+3t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp IE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5(1;-1;0)$.

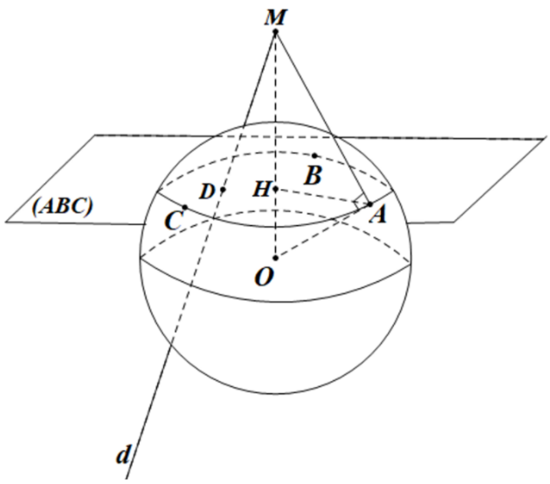
Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 30. **<u>B.</u>** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

<u>Chọn B</u>



Ta có: $M\left(x_0;y_0;z_0\right)\in d:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t\\ z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow(ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}=\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có phương trình dạng: $x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow\Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Với H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+HM=OM)$, ta có:

$$d\left(O;(ABC)\right)=OH=\frac{\left|-x_0-y_0-2z_0\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{\left|x_0+y_0+z_0+z_0\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{\left|z_0+4\right|}{OM}\Rightarrow OH.OM=\left|z_0+4\right|.$$

$\Rightarrow\left|z_0+4\right|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\dfrac{\left|z_0+4\right|}{OM}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d\left(M;(ABC)\right)=\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH+HM=OM$

* Với $z_0=-13\Rightarrow M(6;11;-13)\Rightarrow$ loại do: $OM=\sqrt{326};OH=\dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

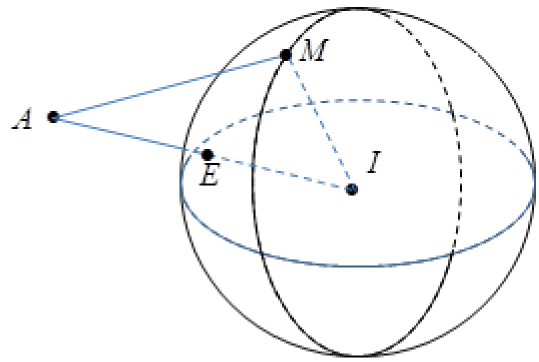
$(ABC):6x+11y-13z+9=0\Rightarrow MH=d\left(M;(ABC)\right)=\dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

$\Rightarrow OH+HM\neq OM$ (loại)

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). Khi đó M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $\widehat{AMI}=90^\circ$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu $\left(S_1\right)$ tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1=IE=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu (S_1): $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$.

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6),B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=4$. **C.** $T=5$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases}A\in(P)\\ B\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+6c-2=0\\ b-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-2c\\ b=2\end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{25-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\frac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$

Xét $f(c)=\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}\Rightarrow f'(c)=\frac{-48c^2-144c+192}{\left(5c^2-8c+8\right)^2\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$; $f'(c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\ c=-4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

c	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	$1/\sqrt{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$1/\sqrt{5}$

Vậy $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1\Rightarrow a=0,b=2\Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC. Giá trị M^2+m^2 bằng

A. 76. **B.** 78. **C.** 72. **D.** 74.

Lời giải

Ta có $AB:\begin{cases}x=3-2t\\ y=5-t\\ z=-2+2t\end{cases}$. Gọi $M(3-2t;5-t;-2+2t)$ là giao điểm của AB và mặt phẳng (P).

$M\in(P)$ nên $2(3-2t)+(5-t)-2(-2+2t)+9=0\Leftrightarrow t=\dfrac{8}{3}\Rightarrow M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)\Rightarrow OM=\sqrt{22}$.

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{-16}{3};\dfrac{-8}{3};\dfrac{16}{3}\right)\\ \overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{-2}{3};\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AM=8\\ BM=2\end{cases}\Rightarrow MC^2=MA.MB=16\Leftrightarrow MC=4$ do MC là tiếp tuyến của mặt cầu (S).

Khi đó tập hợp điểm C là đường tròn giao tuyến (C) nằm trên (P) có tâm là $M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ và bán kính là 4.

Gọi C' và C'' lần lượt là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho OC' và OC'' lần lượt là giả trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC, khi đó C', M và C'' theo thứ tự thẳng hàng.

Do đó $M^2+m^2=OC'^2+OC''^2=2OM^2+\dfrac{C'C''^2}{2}=2.\sqrt{22}^2+\dfrac{8^2}{2}=76$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4),B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết phương trình của (α) có dạng $ax+by-z+c=0,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Điểm $A(0;0;-4)\in(\alpha)\Rightarrow 4+c=0\Rightarrow c=-4$.

Điểm $B(2;0;0)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+c=0\Rightarrow a=-\dfrac{c}{2}=2$.

Mặt phẳng (α) có dạng $2x+by-z-4=0$.

Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) và r là bán kính của đường tròn (C).

Khi đó khối nón có đỉnh I và đáy là đường tròn (C) có thể tích là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 d=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-d^2\right)d=\frac{1}{3}\pi\left(27-d^2\right)d$$

Đặt $f(d)=\left(27-d^2\right)d=-d^3+27d,\left(0<d<3\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $f'(d)=-3d^2+27$ và $f'(d)=0\Leftrightarrow -3d^2+27=0\Leftrightarrow d=3$ (vì $0<d<3\sqrt{3}$).

Bảng biến thiên:

d	0		3		$3\sqrt{3}$
$f'(d)$		$+$	0	$-$	
$f(d)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(d)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d=3$ hay thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất khi $d=3\Leftrightarrow d^2=9$.

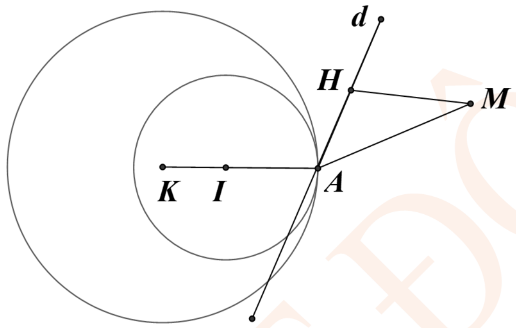
Mà $d=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{|-5-2b|}{\sqrt{5+b^2}}$ nên $\dfrac{(-5-2b)^2}{5+b^2}=9\Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0\Leftrightarrow b=2$.

Vậy $a-b+c=-4$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=81$. Gọi d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên và cách điểm $M(4;-1;-7)$ một khoảng lớn nhất. Gọi $E(m;n;p)$ là giao điểm của d với mặt phẳng $(P):2x-y+z-17=0$. Biểu thức $T=m+n+p$ có giá trị bằng

A. $T=81$. **B.** $T=92$. **C.** $T=79$. **D.** $T=88$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và có bán kính $R=6$.

Mặt cầu (S') có tâm $K(-1;1;1)$ và có bán kính $R'=9$.

Lại có $\overrightarrow{KI}=(2;-1;2)\Rightarrow KI=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3\Rightarrow KI=R'-R$ suy ra hai mặt cầu tiếp xúc trong tại điểm $A(a;b;c)$, mà $KA=R'=9=3KI\Rightarrow\overrightarrow{KA}=3\overrightarrow{KI}\Rightarrow\begin{cases}a+1=6\\b-1=-3\\c-1=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-2\\c=7\end{cases}$.

Do đó $A(5;-2;7)$. Vì d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên nên d đi qua A và vuông góc với KI. Kẻ $MH\perp d\Rightarrow MH\le MA$, nên MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng A.

Khi đó d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với KI và AM suy ra d có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AM}\right]$. Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1;1;-14)\Rightarrow\vec{u}=(12;26;1)$.

Nên phương trình tham số của d là $\begin{cases}x=5+12t\\y=-2+26t\\z=7+t\end{cases}$.

Vì $E=d\cap(P)$ suy ra $E(5+12t;-2+26t;7+t)$.

Vì $E\in(P)$ suy ra $2(5+12t)-(-2+26t)+(7+t)-17=0\Leftrightarrow t=2$ suy ra $E(29;50;9)$.

Mà $E(m;n;p)$ suy ra $\begin{cases}m=29\\n=50\\p=9\end{cases}$. Vậy $T=88$.

Câu 39: Cho hai đường thẳng $(d):\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và $(d'):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d). Biết I nằm trên (d') và $a<2$. Tính $T=a+b+c$

A. 8. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $M(0;2;3) \in d$, $I = (1+t;t;1+t) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t-2;t-2;t-1) \Rightarrow AI = \sqrt{3t^2 - 10t + 9}$.

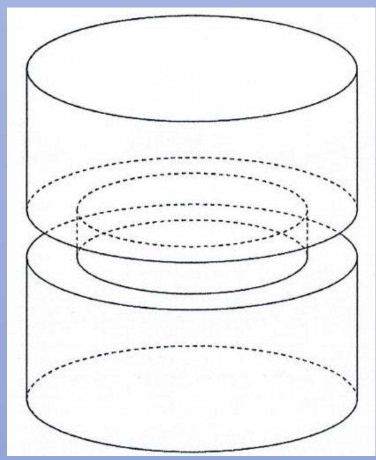
$\overrightarrow{MI} = (t+1;t-2;t-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MI}, \vec{u}\right] = (0;3t-9;-3t+9) \Rightarrow d(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = |t-3|$.

Mặt khác mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d) nên $AI = d(I,d)$

$\sqrt{3t^2 - 10t + 9} = |t-3| \Leftrightarrow 2t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2(loai) \end{array}\right.$

Khi đó: $a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow T = 2$

Câu 45: **(Đề TK BGD 2024)** Để chế tạo một chi tiết máy, từ một khối thép hình trụ có bán kính 10 cm và chiều cao 30 cm, người ta khoét bỏ một rãnh xung quanh rộng 1 cm và sâu 1 cm (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích của chi tiết máy đó, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.



A. $9110,619\text{ cm}^3$. **B.** $9170,309\text{ cm}^3$. **C.** $9365,088\text{ cm}^3$. **D.** $8997,521\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của cái rãnh bỏ bị khoét bỏ đi là: $\pi.10^2.1-\pi.9^2.1=19\pi\text{ cm}^3$.

Thể tích của chi tiết máy đó là: $\pi.10^2.30-19\pi=2981\pi\approx 9365,088\text{ cm}^3$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 45

Câu 1: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=3, BC=5$. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được tạo thành khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB là

A. $S_{xq}=10\pi$. **B.** $S_{xq}=20\pi$. **C.** $S_{xq}=15\pi$.. **D.** $S_{xq}=12\pi$..

Câu 2: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=3$, góc $\widehat{ABC}=60°$. Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay được tạo thành khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB là

A. $S_{tp}=18\sqrt{3}+27$ **B.** $S_{tp}=\left(18\sqrt{3}+27\right)\pi$

C. $S_{tp}=2\left(18\sqrt{3}+27\right)\pi$. **D.** $S_{tp}=2\left(18\sqrt{3}+27\right)$.

Câu 3: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $BC=2a$. Tính thể tích khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB.

A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 4: Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $\widehat{ACB}=30^o$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 5: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB, CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết $AB = 2a, CD = 6a, AD = 3a$, tính diện tích toàn phần của hình tròn xoay tạo thành khi cho hình thang $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN.

A. $22\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $24\pi a^2$. **D.** $36\pi a^2$.

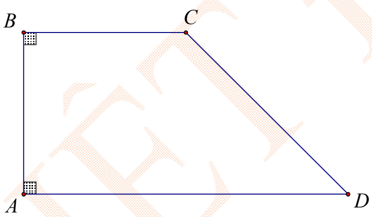
Câu 6: Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D. Biết $AB = 2\text{cm}, CD = 5\text{cm}, AD = 4\text{cm}$, tính diện tích xung quay của hình tròn xoay tạo thành khi cho hình thang $ABCD$ quay quanh đường thẳng AD.

A. $45\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $50\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $36\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°, AD > BC$, $AB = BC = a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục AB.

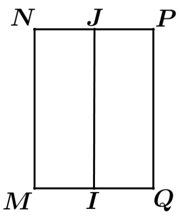
A. $\dfrac{\sqrt{3}.\pi a^3}{9}$ **B.** $\dfrac{10\pi a^3}{9}$ **C.** $\dfrac{10+3\sqrt{3}}{9}.\pi a^3$ **D.** $\sqrt{3}\pi a^3$

Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.



A. $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ **C.** $\dfrac{7\pi a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{7\pi a^3}{12}$

Câu 9: Cho hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN = 8$ và chu vi của hình chữ nhật $MNPQ$ bằng 24 . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MQ và NP. Quay hình chữ nhật xung quanh cạnh IJ ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.



A. $S_{tp} = 48\pi$. **B.** $S_{tp} = 40\pi$. **C.** $S_{tp} = 32\pi$. **D.** $S_{tp} = 96\pi$.

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 50\sqrt{5}\ cm$ và $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Quay hình chữ nhật xung quanh cạnh BC ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $10000\pi\ cm^2$. **B.** $2500\pi\ cm^2$. **C.** $5000\pi\ cm^2$. **D.** $10000\ cm^2$.

Câu 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BDC} = 30°$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục AD bằng

A. $3\pi a^3$. **B.** $2\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $9\pi a^3$.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 3AB$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB ta được khối trụ (T_1) có thể tích V_1; quay hình chữ nhật đó quanh cạnh BC ta được khối trụ (T_2) có thể tích V_2. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 13: Quay một hình vuông cạnh $7\,\text{cm}$ quanh một cạnh của nó ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ thu được là

A. $343\pi\, cm^2$. **B.** $49\pi\, cm^2$. **C.** $98\pi\, cm^2$. **D.** $196\pi\, cm^2$.

Câu 14: Quay một hình vuông cạnh $10\,\text{cm}$ quanh đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối của nó ta được một hình trụ. Diện tích xung quanh của hình trụ thu được là

A. $100\pi\, cm^2$. **B.** $200\pi\, cm^2$. **C.** $250\pi\, cm^2$. **D.** $500\pi\, cm^2$.

Câu 15: Trong không gian, cho hình vuông $ABCD$ có chu vi là $4a$. Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục OO' ta được một hình trụ tròn xoay. Tính thể tích V của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = \frac{\pi a^3}{12}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3}{4}$.

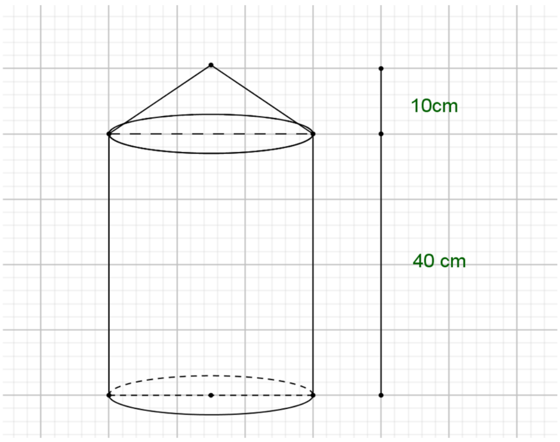
Câu 16: Trong không gian, khi quay một hình vuông xung quanh cạnh của nó thì được một hình trụ có diện tích xung quanh bằng diện tích của hình tròn có đường kính là $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

A. $V = \frac{a^3}{12}$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = \frac{\pi a^3}{24}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3}{8}$.

Câu 17: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính bằng a. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O). Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60^0, tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

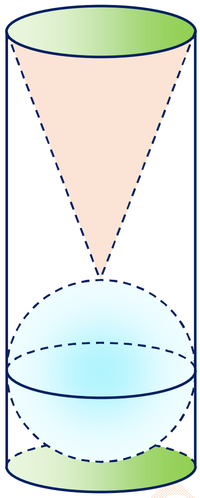
A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 18: Một cái cột có hình dạng như hình bên (gồm 1 khối nón và một khối trụ ghép lại). Chiều cao đo được ghi trên hình, chu vi đáy là $20\,\text{cm}$. Thể tích của cột bằng



A. $\frac{52000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{5000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{5000}{\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{13000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 19: Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy, một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta thả từ từ vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu.



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 20: Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{8a}{3}$.

Câu 21: Một khối trụ được đặt trong nó một khối cầu sao cho khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối trụ đồng thời khối cầu đó tiếp xúc với hai đáy của khối trụ. Gọi thể tích của khối cầu và khối trụ trên thứ tự là V, V'. Tính tỷ số $\frac{V}{V'}$?

A. $\frac{V}{V'}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{V}{V'}=\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{V}{V'}=\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{V}{V'}=\frac{2}{3}$.

Câu 22: Một khối cầu được đặt trong nó một khối trụ sao cho khối cầu đi qua tất cả các hai đường tròn đáy của khối trụ. Gọi diện tích của khối cầu và diện tích xung quanh của hình trụ trên thứ tự là S, S'; thể tích của khối cầu và khối trụ trên thứ tự là V, V'. Biết tỷ số $\frac{S}{S'}=2$ Tính $\frac{V}{V'}$?

A. $\frac{V}{V'}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{V}{V'}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{V}{V'}=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{V}{V'}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

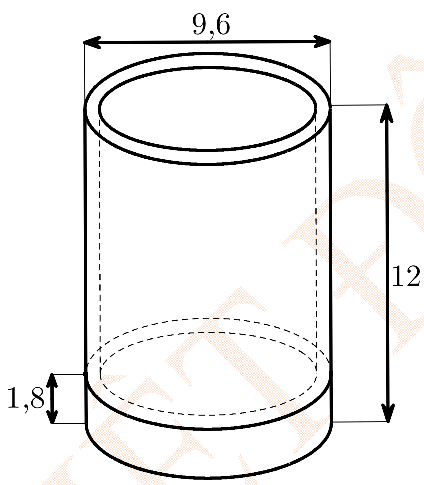
Câu 23: Cho hai mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng (P), (Q) để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h=R$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Câu 24: Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$.. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng $9,6\,\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\,\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\,\text{cm}$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm)?

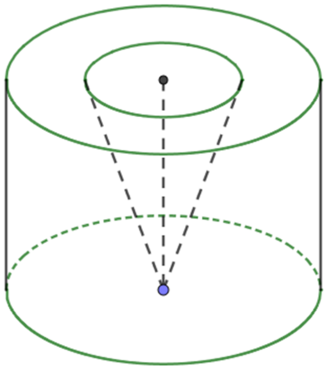


A. $64,39\text{ cm}^3$. **B.** $202,27\text{ cm}^3$. **C.** $212,31\text{ cm}^3$. **D.** $666,97\text{ cm}^3$.

Câu 26: Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó bằng

A. 108π. **B.** 504π. **C.** 6480π. **D.** 502π.

Câu 27: Một khối đồ chơi bằng gỗ được tạo ra từ một khối gỗ hình trụ có chiều cao bằng 20 cm và được khoét phần giữa là một khối nón có bán kính đáy bằng một nửa bán kính đáy trụ, đỉnh nón trùng với tâm đáy còn lại của khối trụ. Tính thể tích của khối đồ chơi biết khối nón khoét đi có diện tích xung quanh bằng $16\pi\sqrt{26}\text{ cm}^2$

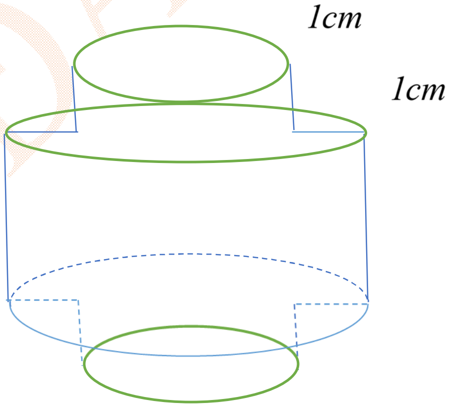


A. $\dfrac{3520\pi}{3}\ \text{cm}^3$. **B.** $960\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{920\pi}{3}\ \text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{2560\pi}{9}\ \text{cm}^3$.

Câu 28: Một bình hoa hình trụ có ba chân như hình vẽ, có chiều cao $36\ \text{cm}$, độ dày của thành bình hoa là $2\ \text{cm}$, độ dài thân bình hoa bằng 3,5 độ dài chân bình hoa. Tính thể tích của khối bình hoa (gồm phần thân bình và chân bình) biết ba chân của bình hoa là ba khối trụ giống nhau, mỗi khối trụ có đường kính $3\ \text{cm}$ và diện tích xung quanh của phần thân bình hoa bằng $448\pi\ \text{cm}^2$ (các rãnh ở bề mặt xem như không đáng kể)

A. $784\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $838\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $802\pi\ \text{cm}^3$. **D.** $1846\pi\ \text{cm}^3$.

Câu 29: Để chế tạo một chi tiết máy, từ một khối thép hình trụ có đường kính $10cm$ và chiều cao $30cm$, người ta tiện bỏ xung quanh hai đầu rộng $1cm$ và sâu $1cm$ (tham khảo hình vẽ). Tinh thể tích của chi tiết máy đó, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm?



A. $2326,47\left(cm^3\right)$ **B.** $2236,74\left(cm^3\right)$ **C.** $2623,47\left(cm^3\right)$ **D.** $2326,74\left(cm^3\right)$

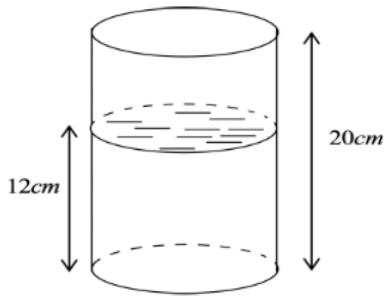
Câu 30: Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó (làm tròn đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $0,57\left(m^3\right)$. **B.** $0,14\left(m^3\right)$. **C.** $1,57\left(m^3\right)$. **D.** $0,25\left(m^3\right)$.

Câu 31: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

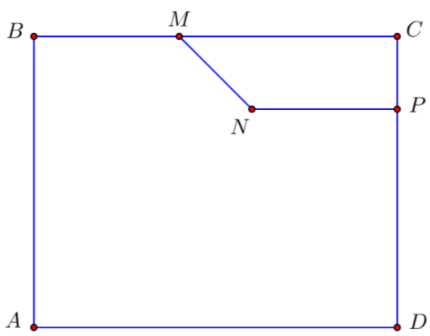
A. $1,8m.$. **B.** $1,4m.$. **C.** $2,2m.$. **D.** $1,6m.$

Câu 32: Một cốc hình trụ có bán kính đáy bằng $3\,\text{cm}$, chiều cao $20\,\text{cm}$, trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12\,\text{cm}$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6\,\text{cm}$. Con quạ thông minh đã mổ những viên sỏi hình cầu có bán kính $0,8\,\text{cm}$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Hỏi để uống được nước, con quạ cần thả ít nhất bao nhiêu viên sỏi?



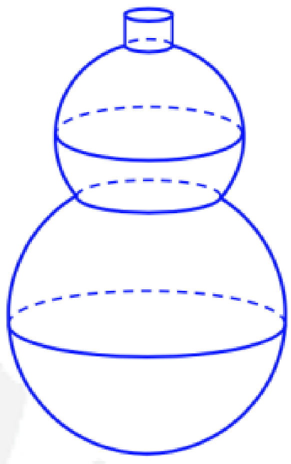
A. 26. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Câu 33: Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 4cm,\ AD = 5cm$. Cắt hình chữ nhật đã cho theo đường gấp khúc MNP như hình vẽ bên với $BM = 2cm,\ NP = 2cm,\ PD = 3cm$ và giữ lại hình phẳng lớn (H). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục AB.



A. $V = 75\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 94\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $V = \dfrac{94\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = \dfrac{244\pi}{3}\text{cm}^3$.

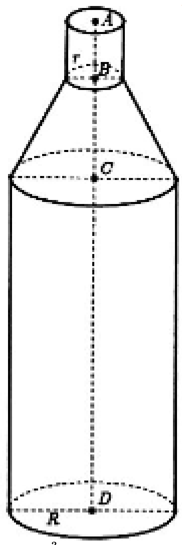
Câu 34: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13cm$ và $r = \sqrt{41}\,cm$ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ sau.



Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r' = 5cm$ và nút uống rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}cm$, chiều cao bằng $4cm$. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (Kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

A. $9,5$. **B.** $10,2$. **C.** $8,2$. **D.** $11,4$.

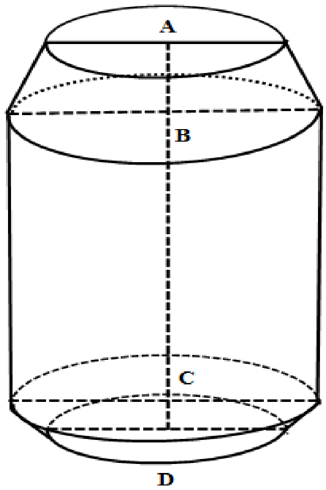
Câu 35: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết bán kính đáy chai $R = 5cm$, bán kính cổ chai $r = 2cm$, $AB = 3cm$, $BC = 6cm$ và $CD = 16cm$. Tính thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó.

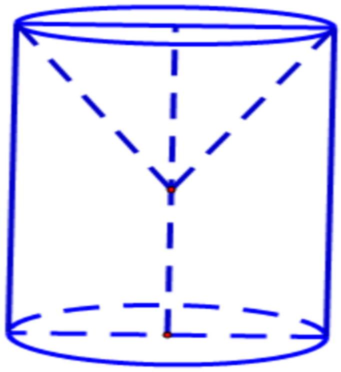
A. $V = 495\pi\, cm^3$. **B.** $V = 490\pi\, cm^3$. **C.** $V = 462\pi\, cm^3$. **D.** $V = 412\pi\, cm^3$.

Câu 36: Tính thể tích V của một lon nước ngọt có hình dạng là một vật thể tròn xoay như hình vẽ bên. Biết bán kính nắp và đáy lon bằng nhau và bằng $2,5\ cm$; bán kính thân chai bằng $3\ cm$ và $AB = 1,5\ cm, BC = 8\ cm, CD = 0,5\ cm,$ (giả thiết độ dày vỏ lon không đáng kể).



A. $V=\dfrac{379\pi}{4}\ \left(cm^3\right)$.   **B.** $V=\dfrac{523\pi}{6}\ \left(cm^3\right)$.
C. $V=\ 95\pi\left(cm^3\right)$.   **D.** $V=\ 79\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 37: Để chế tạo dụng cụ như hình, từ một khối thép hình trụ có bán kính 10 cm và chiều cao 20 cm người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm (tham khảo hình vẽ sau). Tính thể tích của dụng cụ đó, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.



A. $6235,988\text{ cm}^3$.   **B.** $5235,988\text{ cm}^3$.
C. $5325,988\text{ cm}^3$.   **D.** $4235,988\text{ cm}^3$.

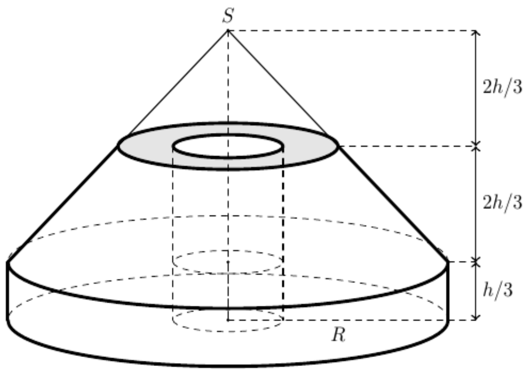
Câu 38: Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao là $h=1,8\,\text{m}$ gồm

+ Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R=1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$;

+ Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

+ Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*

Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân nghìn)* bằng

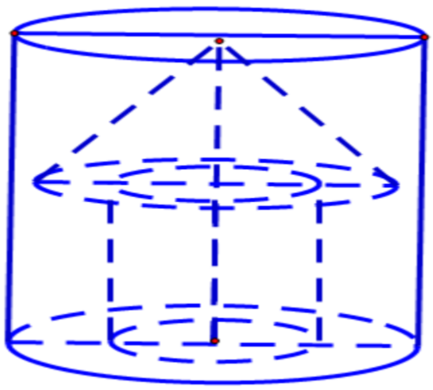


A. $3,881\text{m}^3$ **B.** $2,731\text{m}^3$ **C.** $3,203\text{m}^3$ **D.** $3,731\text{m}^3$

Câu 39: Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có chiều cao 200 mm và bán kính đáy 3 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Tính thể tích của phần thân bút chì làm bằng gỗ (với $\pi = 3,14$)

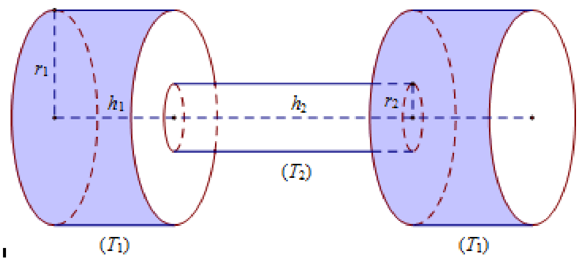
A. $502\ \text{m}^3$. **B.** $5,024.10^{-6}\ \text{m}^3$.
C. $5,024\ \text{m}^3$. **D.** $6,024.10^{-6}\ \text{m}^3$.

Câu 40: Để chế tạo một khuôn như hình từ một khối thép hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy 20 cm, người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 15 cm và chiều cao 10 cm và một hình trụ có chiều cao bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm. Tính thể tích của dụng cụ đó, với $\pi = 3,14$.



A. $8988\ \text{cm}^3$. **B.** $19625\ \text{cm}^3$.
C. $588\ \text{cm}^3$. **D.** $9625\ \text{cm}^3$.

Câu 41: Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D=7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Câu 42: Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Câu 43: Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao $18\,\text{cm}$ và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính $1\,\text{cm}$. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}\text{cm}$, giá thành 540 đồng$/\text{cm}^3$. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng$/\text{cm}^3$. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm $15,58\%$ giá thành sản phẩm.

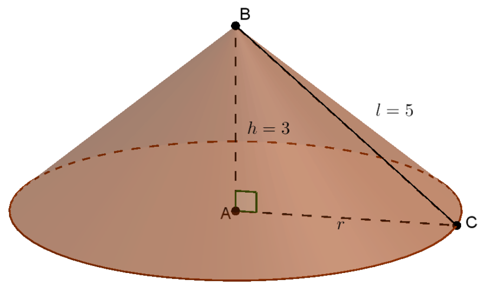
A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=3, BC=5$. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được tạo thành khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB là

A. $S_{xq}=10\pi$. **B.** $S_{xq}=20\pi$. **C.** $S_{xq}=15\pi$.. **D.** $S_{xq}=12\pi$..

Lời giải



Ta có: $r=\sqrt{l^2-h^2}=4$.

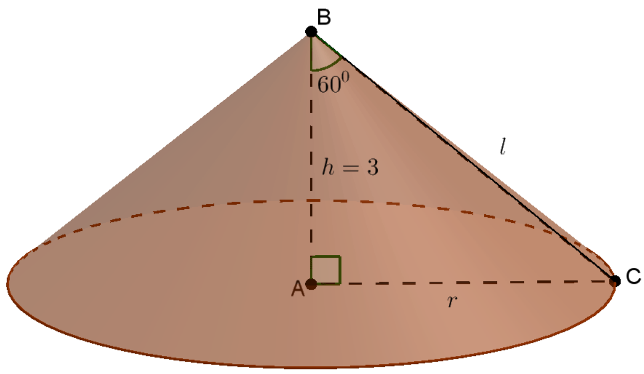
Khi đó: $S_{xq}=\pi rl=\pi.4.5=20\pi$.

Câu 2: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=3$, góc $\widehat{ABC}=60°$. Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay được tạo thành khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AB là

A. $S_{tp}=18\sqrt{3}+27$ **B.** $S_{tp}=\left(18\sqrt{3}+27\right)\pi$

C. $S_{tp}=2\left(18\sqrt{3}+27\right)\pi$. **D.** $S_{tp}=2\left(18\sqrt{3}+27\right)$.

Lời giải



Ta có:

$r=h.\tan 60°=3\sqrt{3}$.

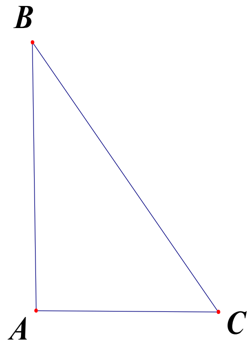
$l=\sqrt{r^2+h^2}=6$.

Khi đó: $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\pi.3\sqrt{3}.6+27\pi=\left(18\sqrt{3}+27\right)\pi$.

Câu 3: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $BC=2a$. Tính thể tích khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB.

A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Lời giải



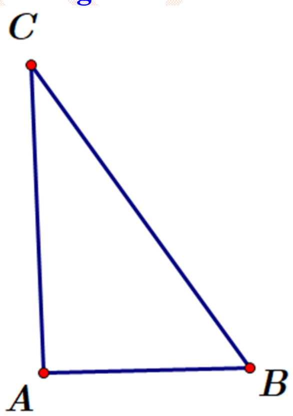
Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $r=AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.
Chiều cao $h=AB=a$

Thể tích khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2.a=\pi a^3$.

Câu 4: Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $\widehat{ACB}=30^o$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

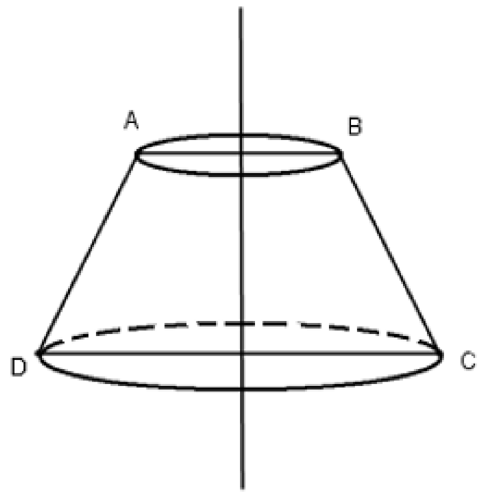


Ta có $AC=AB.\cot 30^o=a\sqrt{3}$. Vậy thể tích khối nón là : $V=\dfrac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB, CD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết $AB=2a, CD=6a, AD=3a$, tính diện tích toàn phần của hình tròn xoay tạo thành khi cho hình thang $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN.

A. $22\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $24\pi a^2$. **D.** $36\pi a^2$.

Lời giải



Hình tròn xoay được tạo thành là hình nón cụt có: $R = 3a,\ r = a,\ l = 3a$

Diện tích xung quanh của hình nón cụt được tạo thành: $S_{xq} = \pi rl + \pi Rl = 12\pi a^2$.

CÔNG THỨC TRÊN NÊN CHỨNG MINH LẠI

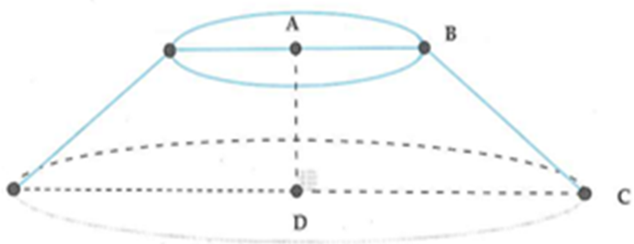
Diện tích đáy của hình nón cụt: $S_d = \pi r^2 + \pi R^2 = 10\pi a^2$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 22\pi a^2$.

Câu 6: Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D. Biết $AB = 2\text{cm}, CD = 5\text{cm}, AD = 4\text{cm}$, tính diện tích xung quay của hình tròn xoay tạo thành khi cho hình thang $ABCD$ quay quanh đường thẳng AD.

A. $45\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $50\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $36\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải



Hình tròn xoay được tạo thành là hình nón cụt có: $R = 5,\ r = 2,\ l = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = 5$

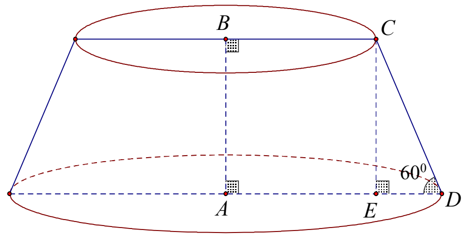
Diện tích xung quanh của hình nón cụt được tạo thành: $S_{xq} = \pi rl + \pi Rl = 35\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90°, AD > BC$, $AB = BC = a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục AB.

A. $\dfrac{\sqrt{3}.\pi a^3}{9}$ **B.** $\dfrac{10\pi a^3}{9}$ **C.** $\dfrac{10+3\sqrt{3}}{9}.\pi a^3$ **D.** $\sqrt{3}\pi a^3$

Lời giải

Chọn C



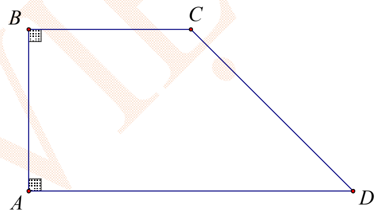
Kẻ $CE \perp AD \Rightarrow ED = \dfrac{CE}{\tan 60°} = \dfrac{AB}{\tan 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $AD = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{3}$.

Thể tích hình nón cụt tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục AB là:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.AB\left(BC^2 + AD^2 + BC.AD\right) = \frac{1}{3}.\pi.a.\left[a^2 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2.a^2 + a.\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{3}\right] = \frac{10+3\sqrt{3}}{9}.\pi a^3$$

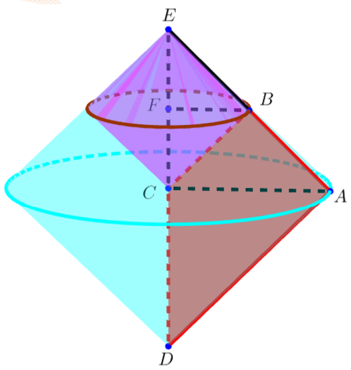
Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.

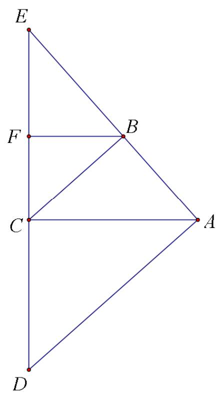


A. $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ **C.** $\dfrac{7\pi a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{7\pi a^3}{12}$

Lời giải

Chọn A





Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

Ta có: ΔABC vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{BCA} = 45° \Rightarrow \widehat{ECB} = 45° \Rightarrow \Delta EBC$ vuông cân tại B.

Khi đó $\Delta BCF = \Delta BEF$ nên tam giác ΔBCF và ΔBEF quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

Tương tự: $\Delta\, ADC = \Delta\, AEC\left(cgv - gnk\right)$ nên tam giác $\Delta\, ADC$ và $\Delta\, AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

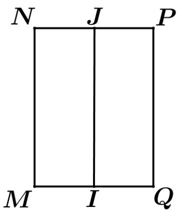
Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

$$2V - 2V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi\left(CD.AC^2 - CF.BF^2\right)$$

$$CD = AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = a\sqrt{2};\ CF = FB = BC.\cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

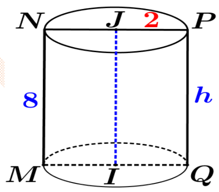
Khi đó $2V - 2V_1 = \frac{2}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\,\pi a^3}{6}$.

Câu 9: Cho hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN = 8$ và chu vi của hình chữ nhật $MNPQ$ bằng 24. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MQ và NP. Quay hình chữ nhật xung quanh cạnh IJ ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.



A. $S_{tp} = 48\pi$.   **B.** $S_{tp} = 40\pi$.   **C.** $S_{tp} = 32\pi$.   **D.** $S_{tp} = 96\pi$.

Lời giải



Do chu vi của hình chữ nhật $MNPQ$ bằng 24, ta được:

$$2\left(MN + NP\right) = 24 \Leftrightarrow 2\left(8 + NP\right) = 24 \Leftrightarrow NP = 4$$

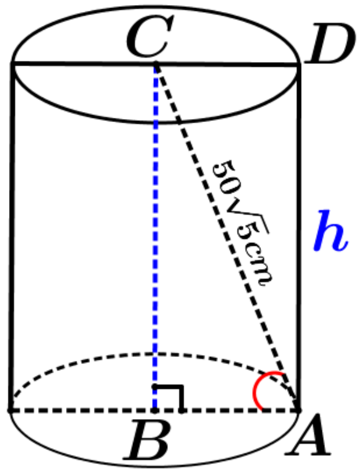
Ta có: $h = l = MN = 8;\ r = \frac{NP}{2} = 2$.

Nên $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi\left(rl + r^2\right) = 2\pi\left(2.8 + 2^2\right) = 40\pi$.

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 50\sqrt{5}\ cm$ và $\sin\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Quay hình chữ nhật xung quanh cạnh BC ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $10000\pi\ cm^2$.   **B.** $2500\pi\ cm^2$.   **C.** $5000\pi\ cm^2$.   **D.** $10000\ cm^2$.

Lời giải



Xét tam giác vuông ABC vuông tại B, ta được:

$\sin\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot AC = 50\,cm$.

Áp dụng định lý Pythago cho tam giác vuông ABC vuông tại B, ta được:

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 100\,cm$.

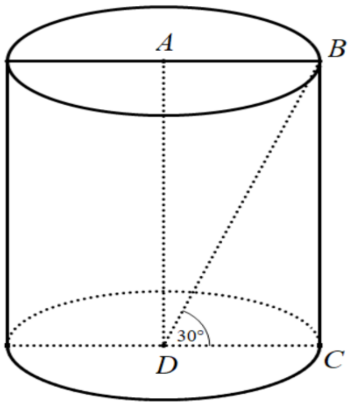
Ta có: $h = l = BC = 50\,cm; r = AB = 100\,cm$.

Nên $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 100 \cdot 50 = 10000\pi\ cm^2$.

Câu 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BDC} = 30°$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục AD bằng

A. $3\pi a^3$.		**B.** $2\sqrt{3}\pi a^3$.		**C.** πa^3.		**D.** $9\pi a^3$.

Lời giải



Khi quay hình chữ nhật này xung quanh cạnh AD ta được hình trụ như hình vẽ trên.

Ta có $R = AB = a\sqrt{3}$; $h = AD = AB.\tan 30° = a$.

Thể tích khối trụ là $V = h.\pi R^2 = a.\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi a^3$.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 3AB$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB ta được khối trụ (T_1) có thể tích V_1; quay hình chữ nhật đó quanh cạnh BC ta được khối trụ (T_2) có thể tích V_2. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Khối trụ (T_1) có chiều cao $h_1 = AB$, bán kính đường tròn đáy $R_1 = BC = 3AB$.

Do đó $V_1 = \pi.R_1^2.h_1 = \pi(3AB)^2.AB = 9\pi AB^3$.

Khối trụ (T_2) có chiều cao $h_2 = BC = 3AB$, bán kính đường tròn đáy $R_2 = AB$.

Do đó $V_2 = \pi.R_2^2.h_2 = \pi AB^2.3AB = 3\pi AB^3$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\pi AB^3}{3\pi AB^3} = 3$.

Câu 13: Quay một hình vuông cạnh $7\,\text{cm}$ quanh một cạnh của nó ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ thu được là

A. $343\pi\ cm^2$. **B.** $49\pi\ cm^2$. **C.** $98\pi\ cm^2$. **D.** $196\pi\ cm^2$.

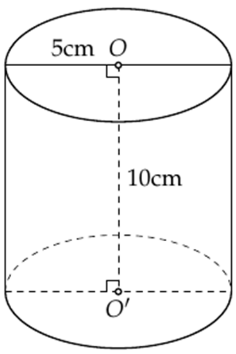
Lời giải

Hình trụ có bán kính $r = 7\,\text{cm}$, và chiều cao $h = 7\,\text{cm}$.
Vậy $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi\cdot 7^2 + 2\pi\cdot 7^2 = 196\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 14: Quay một hình vuông cạnh $10\,\text{cm}$ quanh đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối của nó ta được một hình trụ. Diện tích xung quanh của hình trụ thu được là

A. $100\pi\ cm^2$. **B.** $200\pi\ cm^2$. **C.** $250\pi\ cm^2$. **D.** $500\pi\ cm^2$.

Lời giải

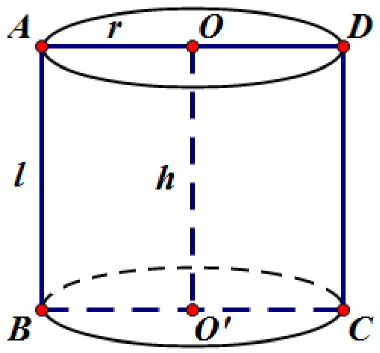


Do hình trụ có chiều cao bằng $h = 10$ nên đường sinh $l = 10$.
Hình trụ có bán kính $r = 5\,\text{cm}$ và đường sinh $l = 10\,\text{cm}$.
Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi\cdot 5\cdot 10 = 100\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 15: Trong không gian, cho hình vuông $ABCD$ có chu vi là $4a$. Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục OO' ta được một hình trụ tròn xoay. Tính thể tích V của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

A. $V=\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $V=\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải



Do hình vuông $ABCD$ có chu vi là $4a$ nên hình vuông đó có cạnh a.

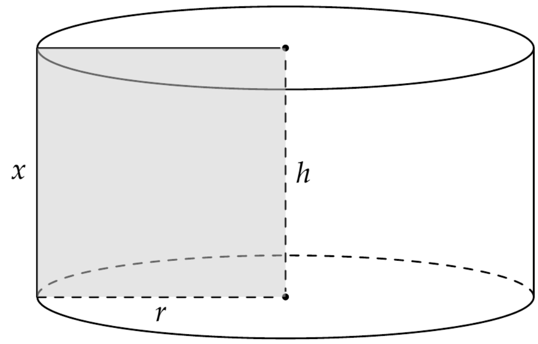
Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy $r=\dfrac{a}{2}$ và đường sinh $l=a$. Do đó, chiều cao $h=a$.

Vậy $V=\pi r^2h=\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot a=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Câu 16: Trong không gian, khi quay một hình vuông xung quanh cạnh của nó thì được một hình trụ có diện tích xung quanh bằng diện tích của hình tròn có đường kính là $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

A. $V=\dfrac{a^3}{12}$. **B.** $V=\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{24}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{8}$.

Lời giải



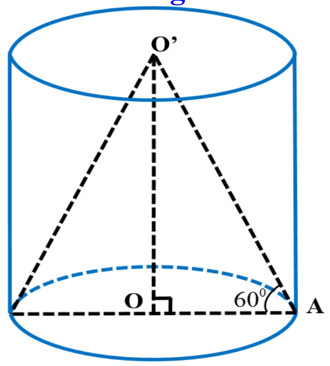
Gọi x là cạnh của hình vuông đã cho. Khi đó hình trụ tròn xoay có bán kính đáy $r=x$ và chiều cao $h=x$. Do đó, diện tích xung quanh của hình trụ là $S=2\pi rh=2\pi x^2$.

Từ giả thiết, ta có $2\pi x^2=\pi\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, hay $x=\dfrac{a}{2}$. Vậy $V=\pi r^2h=\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{\pi a^3}{8}$.

Câu 17: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính bằng a. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O). Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60^0, tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



Gọi A là điểm thuộc đường tròn (O).

Góc giữa $O'A$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{O'AO}$. Theo giả thiết ta có $\widehat{O'AO} = 60°$.

Xét tam giác $O'OA$ vuông tại O, ta có:

$\tan\widehat{O'AO} = \dfrac{O'O}{OA} \Rightarrow O'O = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

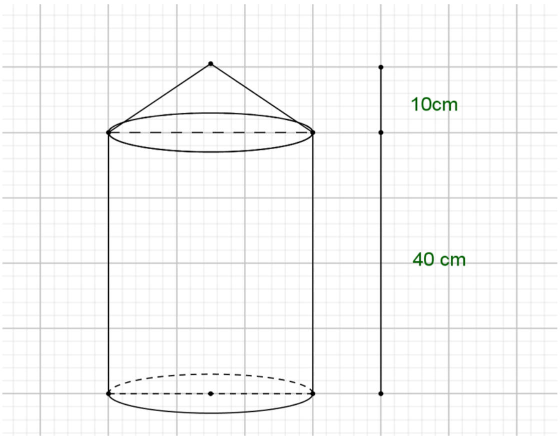
+ $\cos\widehat{O'AO} = \dfrac{OA}{O'A} \Rightarrow O'A = \dfrac{a}{\cos 60°} = 2a$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq(T)} = 2\pi.OA.O'O = 2\pi.a.a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq(N)} = \pi.OA.O'A = \pi.a.2a = 2\pi a^2$

$\Rightarrow \dfrac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{2\pi a^2} = \sqrt{3}$.

Câu 18: Một cái cột có hình dạng như hình bên (gồm 1 khối nón và một khối trụ ghép lại). Chiều cao đo được ghi trên hình, chu vi đáy là $20\,\text{cm}$. Thể tích của cột bằng



A. $\frac{52000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{5000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{5000}{\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{13000}{3\pi}\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

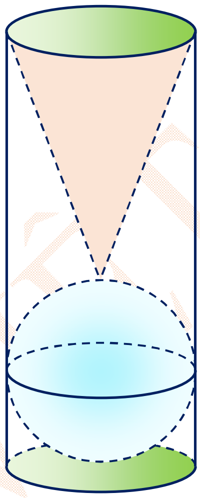
Gọi V_1 là thể tích khối trụ, V_2 là thể tích khối nón, Gọi V là thể tích cái cột.

Chiều cao và bán kính khối trụ lần lượt là $h_1 = 40cm, r_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}cm$.

Chiều cao và bán kính khối nón lần lượt là $h_2 = 10cm, r_2 = r_1 = \frac{10}{\pi}cm$.

Theo bài ra $V = V_1 + V_2 = \pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2\left(3h_1 + h_2\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2\left(3.40+10\right) = \frac{13000}{3\pi}\left(cm^3\right)$.

Câu 19: Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy, một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta thả từ từ vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu.



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Gọi bán kính đường tròn đáy của hình trụ là R.

Theo giả thiết và hình vẽ thì:

- Hình trụ có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $6R$.
- Mặt cầu có bán kính là R.
- Hình nón có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $4R$.

Thể tích lượng nước ban đầu V bằng thể tích khối trụ nên $V = \pi R^2.6R = 6\pi R^3$.

Thể tích lượng nước tràn ra V_1 bằng tổng thể tích khối nón và khối cầu nên

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2.4R + \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

Thể tích lượng nước còn lại trong cốc là $V_2 = V - V_1 = 6\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{3} = \frac{10\pi R^3}{3}$.

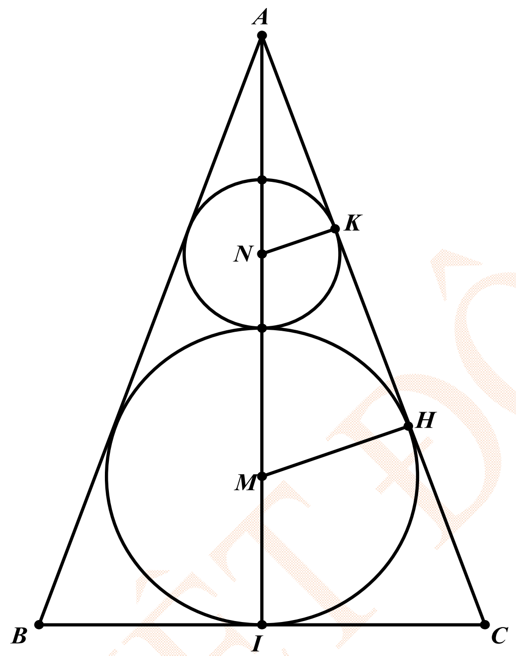
Do đó tỉ số thể tích của lượng nước còn lại và lượng nước ban đầu là:

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{10\pi R^3}{3}}{6\pi R^3} = \frac{5}{9}.$$

Câu 20: Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{8a}{3}$.

Lời giải



Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác ABC với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón có tâm đáy là I.

Gọi M và N lần lượt là tâm của hai khối cầu có bán kính $2a$ và a. H và K lần lượt là điểm tiếp xúc của AC với hai đường tròn tâm M và N.

Ta có: NK là đường trung bình trong tam giác AMH suy ra N là trung điểm của AM.

$AM = 2MN = 2.3a = 6a \Rightarrow AI = 8a$.

Ta lại có hai tam giác vuông AIC và AHM đồng dạng

suy ra $\frac{IC}{HM} = \frac{AI}{AH} \Leftrightarrow IC = \frac{8a.2a}{\sqrt{36a^2 - 4a^2}} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy bán kính hình nón là $R = 2a\sqrt{2}$.

Câu 21: Một khối trụ được đặt trong nó một khối cầu sao cho khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối trụ đồng thời khối cầu đó tiếp xúc với hai đáy của khối trụ. Gọi thể tích của khối cầu và khối trụ trên thứ tự là V, V'. Tính tỷ số $\frac{V}{V'}$?

A. $\frac{V}{V'} = \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{V}{V'} = \frac{3}{8}$. **C.** $\frac{V}{V'} = \frac{8}{3}$. **D.** $\frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Gọi R là bán kính của khối cầu.

$\Rightarrow R$ cũng là bán kính đáy của khối trụ, $2R$ là độ dài đường sinh của khối trụ

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3, V' = 2\pi R^3$

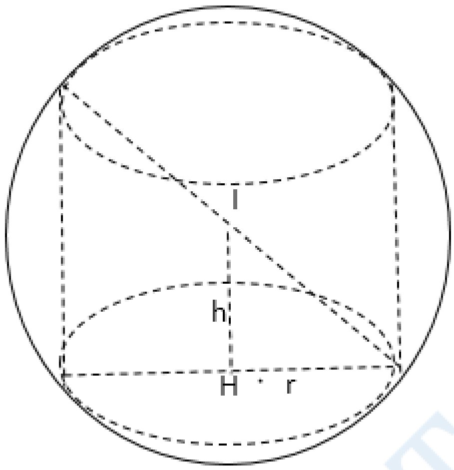
$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

Chọn đáp án **D**.

Câu 22: Một khối cầu được đặt trong nó một khối trụ sao cho khối cầu đi qua tất cả các hai đường tròn đáy của khối trụ. Gọi diện tích của khối cầu và diện tích xung quanh của hình trụ trên thứ tự là S, S'; thể tích của khối cầu và khối trụ trên thứ tự là V, V'. Biết tỷ số $\frac{S}{S'} = 2$ Tính $\frac{V}{V'}$?

A. $\frac{V}{V'} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{V}{V'} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{V}{V'} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{V}{V'} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi R là bán kính của khối cầu, r bán kính đáy của khối trụ và h là nửa chiều cao của khối trụ.

$\Rightarrow R = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow$diện tích của khối cầu $S = 4\pi\left(r^2 + h^2\right)$ và diện tích xung quanh của hình trụ là $S' = 4\pi rh$

Có $\frac{S}{S'} = 2 \Rightarrow \frac{4\pi\left(r^2 + h^2\right)}{4\pi rh} = 2 \Leftrightarrow r = h$

$\Rightarrow R = \sqrt{2}r$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}r\right)^3}{2\pi r^3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Chọn đáp án **B**.

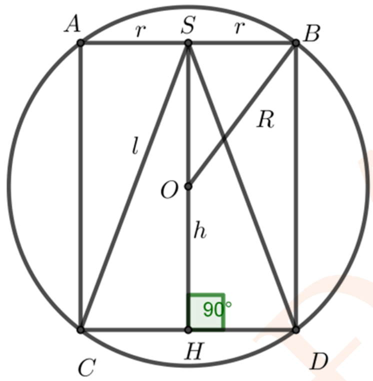
Câu 23: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h = R$. **B.** $h = R\sqrt{2}$. **C.** $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cắt khối cầu tâm O, bán kính R bằng mặt phẳng (α) đi qua tâm O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ ta được hình như hình vẽ bên dưới.



Trong đó, $AB = (\alpha) \cap (P)$, $CD = (\alpha) \cap (Q)$ với $AB = CD$, $h = SH = AC = BD$, $R = OB$.

Đường sinh $l = SC = SD$.

Bán kính của mỗi hình tròn giao tuyến là $r = \dfrac{AB}{2}$.

Ta có: $l^2 = SC^2 = AC^2 + AS^2 = h^2 + r^2$ và $r^2 = SB^2 = OB^2 - SO^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

Suy ra $h^2 = l^2 - r^2 = 4R^2 - 4r^2 \Leftrightarrow l^2 + 3r^2 = 4R^2$.

Mà diện tích xung quanh của khối nón được xét là: $S_{xq} = \pi r l$.

Ta có S_{xq} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ rl đạt giá trị lớn nhất.

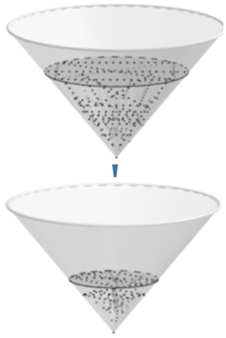
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $r\sqrt{3}$ và l ta có

$$rl = \frac{1}{2\sqrt{3}}.2.\left(r\sqrt{3}\right)l \le \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3r^2 + l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.4R^2 = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}.$$

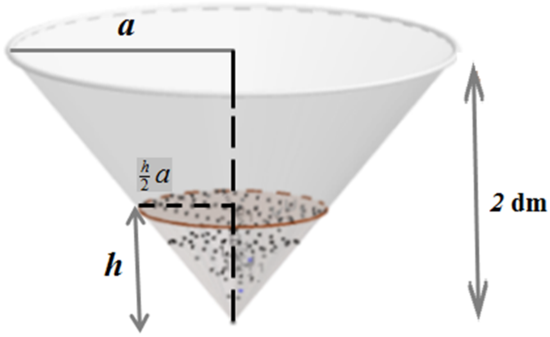
rl lớn nhất là $\dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $3r^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$.. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.



Lời giải



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

h, V_3 lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

R, r lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\frac{R}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2 = \frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$.

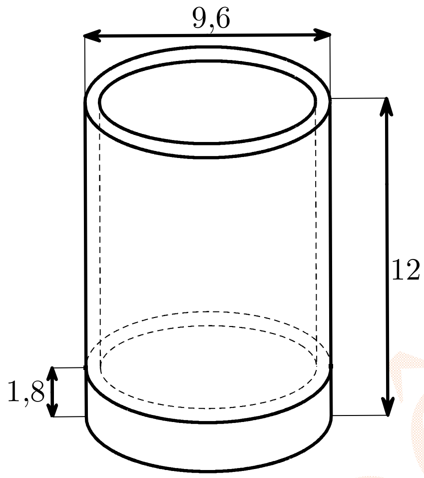
Mặt khác: $\frac{r}{a} = \frac{h}{2} \Rightarrow r = \frac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3 = \frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2 = \frac{\pi a^2 h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1 = \frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

Lại có: $V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow \frac{\pi a^2 h^3}{12} = \frac{1}{3}.2.\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{12} \Leftrightarrow 1 + h^3 = 8 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

Câu 25: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng $9,6\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\text{cm}$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm)?



A. $64,39\text{ cm}^3$. **B.** $202,27\text{ cm}^3$. **C.** $212,31\text{ cm}^3$. **D.** $666,97\text{ cm}^3$.

Lời giải

Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích của chiếc cốc thuỷ tinh và thể tích của khối lượng chất lỏng mà cốc có thể đựng.

Ta có: $V_1 = 12.\pi.4,8^2 = \frac{6912}{25}\pi\left(\text{cm}^3\right)$

$V_2 = (12-1,8).\pi.\left(\frac{9,6-2.0,24}{2}\right)^2 \approx 666,32\left(\text{cm}^3\right)$

Vậy khối lượng thuỷ tinh cần sử dụng là: $\frac{6912}{25}\pi - 666,32 \approx 202,27\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 26: Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó bằng

A. 108π. **B.** 504π. **C.** 6480π. **D.** 502π.

Lời giải

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ ở mỗi đầu.

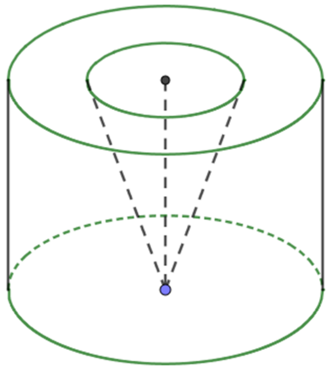
$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30-2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Câu 27: Một khối đồ chơi bằng gỗ được tạo ra từ một khối gỗ hình trụ có chiều cao bằng 20 cm và được khoét phần giữa là một khối nón có bán kính đáy bằng một nửa bán kính đáy trụ, đỉnh nón trùng với tâm đáy còn lại của khối trụ. Tính thể tích của khối đồ chơi biết khối nón khoét đi có diện tích xung quanh bằng $16\pi\sqrt{26}\text{ cm}^2$



A. $\frac{3520\pi}{3}\text{ cm}^3$. **B.** $960\pi\text{ cm}^3$. **C.** $\frac{920\pi}{3}\text{ cm}^3$. **D.** $\frac{2560\pi}{9}\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi r,h lần lượt là bán kính khối trụ và chiều cao khối trụ.

Khi đó bán kính đáy và chiều cao khối nón là $\frac{r}{2}$ và $h=20$ cm.

Gọi l là đường sinh khối nón $\Rightarrow l=\sqrt{20^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}$.

Diện tích xung quanh khối nón là: $\pi.\frac{r}{2}\sqrt{400+\left(\frac{r}{2}\right)^2}$

Diện tích xung quanh khối nón bằng $16\pi\sqrt{26}\text{ cm}^2$ nên ta có:

$$\pi.\frac{r}{2}\sqrt{400+\left(\frac{r}{2}\right)^2}=16\pi\sqrt{26}\Leftrightarrow\left(\frac{r}{2}\right)^4+400\left(\frac{r}{2}\right)^2-6656=0\Rightarrow\left(\frac{r}{2}\right)^2=16\Leftrightarrow\frac{r}{2}=4\Leftrightarrow r=8.$$

Thể tích khối đồ chơi là: $V_{tru}-V_{non}=\pi 8^2.20-\frac{1}{3}\pi 4^2.20=\frac{3520}{3}\pi\text{ cm}^3$.

Câu 28: Một bình hoa hình trụ có ba chân như hình vẽ, có chiều cao 36 cm, độ dày của thành bình hoa là 2 cm, độ dài thân bình hoa bằng $3{,}5$ độ dài chân bình hoa. Tính thể tích của khối bình hoa (gồm phần thân bình và chân bình) biết ba chân của bình hoa là ba khối trụ giống nhau, mỗi khối trụ có đường kính 3 cm và diện tích xung quanh của phần thân bình hoa bằng $448\pi\text{ cm}^2$ (các rãnh ở bề mặt xem như không đáng kể)

A. $784\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $838\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $802\pi\ \text{cm}^3$. **D.** $1846\pi\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $h_1; h_2$ lần lượt độ dài chân bình và độ dài thân bình.

Ta có: $\begin{cases} h_1 + h_2 = 36 \\ h_2 = 3,5h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 8 \\ h_2 = 28 \end{cases}$.

Gọi r là bán kính trụ (phần thân bình hoa).

Diện tích xung quanh phần thân bình hoa là $448\pi\ \text{cm}^2$ nên ta có

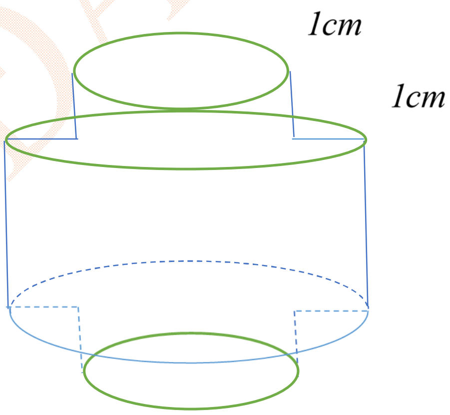
$2\pi r h_2 = 448\pi \Rightarrow r = \dfrac{448\pi}{2\pi h_2} = 8\ \text{cm}.$.

Thể tích phần thân bình là: $\pi r^2 h_2 - \pi(r-2)^2 h_2 = \pi 28\left(8^2 - 6^2\right) = 784\pi\ \text{cm}^3$.

Thể tích phần chân bình hoa là: $3\pi(1,5)^2.8 = 54\pi\ \text{cm}^3$.

Vậy thể khối bình hoa trên là $784\pi\ \text{cm}^3 + 54\pi\ \text{cm}^3 = 838\pi\ \text{cm}^3$..

Câu 29: Để chế tạo một chi tiết máy, từ một khối thép hình trụ có đường kính *10cm* và chiều cao *30cm,* người ta tiện bỏ xung quanh hai đầu rộng *1cm* và sâu *1cm* (tham khảo hình vẽ). Tinh thể tích của chi tiết máy đó, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm?



A. $2326,47\left(cm^3\right)$ **B.** $2236,74\left(cm^3\right)$ **C.** $2623,47\left(cm^3\right)$ **D.** $2326,74\left(cm^3\right)$

Lời giải

Giả thiết cho bán kính khối thép $r = 5cm$ và chiều cao $h = 30cm$

Thể tích khối thép là $V_1 = \pi.r^2.h = \pi(5)^2.30$.

Sau khi tiện thì phần thép hai đầu có bán kính là $r' = 4cm$ và chiều cao phần tiện là $h' = 1cm$

Thể tích khối thép ở hai đầu bị tiện bỏ là

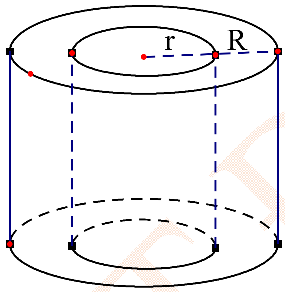
$V_2 = \pi.r^2.h' - \pi.r'^2.h' = \pi.h'\left(r^2 - r'^2\right) = \pi.1\left(5^2 - 4^2\right) = 9\pi$.

Thể tích chi tiết máy là: $V = V_1 - V_2 = 750\pi - 9\pi = 741\pi \approx 2326,74\ (cm^3)$

Câu 30: Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó (làm tròn đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $0,57\left(m^3\right)$. **B.** $0,14\left(m^3\right)$. **C.** $1,57\left(m^3\right)$. **D.** $0,25\left(m^3\right)$.

Lời giải



Gọi R, r lần lượt là bán kính đáy của hình trụ lớn và hình trụ nhỏ

$\Rightarrow R = 0,25m$ và $r = 0,15m$.

Thể tích hình trụ lớn là $V_1 = \pi.R^2.h = \pi(0,25)^2.2$.

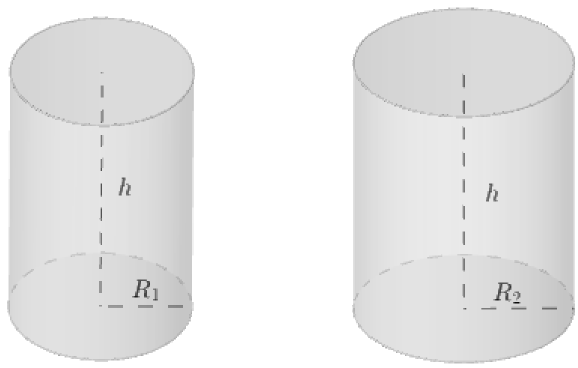
Thể tích hình trụ nhỏ là $V_2 = \pi.r^2.h = \pi.(0,15)^2.2$

Lượng bê tông cần dùng là $V = V_1 - V_2 = 2\pi(0,25)^2 - 2\pi(0,15)^2 \approx 0,25\left(m^3\right)$.

Câu 31: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,8m$.. **B.** $1,4m$.. **C.** $2,2m$.. **D.** $1,6m$.

Lời giải



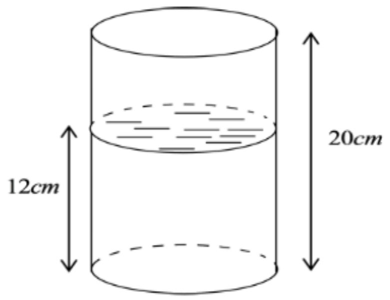
$V_1 = \pi R_1^2 h = \pi h$ và $V_2 = \pi R_2^2 h = \dfrac{36\pi}{25}h.$

Theo đề bài:

$V = V_1 + V_2 = V_1 = \pi h + \dfrac{36\pi}{25}h = \dfrac{61\pi}{25}h = \pi R^2 h.$

$\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{61}{25} \Leftrightarrow R = 1,56\left(m\right)$ (V, R lần lượt là thể tích và bán kính của bể nước cần tính)

Câu 32: Một cốc hình trụ có bán kính đáy bằng $3\,\text{cm}$, chiều cao $20\,\text{cm}$, trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12\,\text{cm}$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6\,\text{cm}$. Con quạ thông minh đã mổ những viên sỏi hình cầu có bán kính $0,8\,\text{cm}$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Hỏi để uống được nước, con quạ cần thả ít nhất bao nhiêu viên sỏi?



A. 26. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Lời giải

Con quạ uống được nước đựng trong cốc khi mặt nước cách miệng cốc không quá $6\,cm$ nên mực nước dâng lên tối thiểu là $20 - 12 - 6 = 2\,\text{cm}$.

Thể tích nước tối thiểu cần tăng thêm là $V = \pi R^2 h = \pi.3^2.2 = 18\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

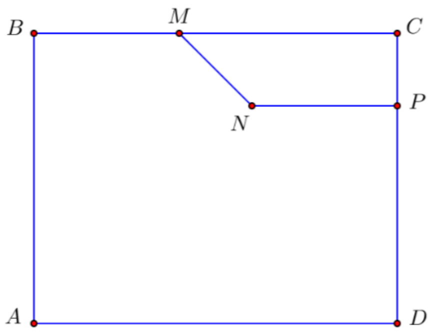
Thể tích nước tăng lên khi con quạ thả x viên sỏi là:

$V_1 = x.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = x.\dfrac{4}{3}.\pi.0,8^3 = \dfrac{256}{375}\pi x\left(\text{cm}^3\right)$.

Để con quạ uống được nước ta có điều kiện $V_1 \geq V \Leftrightarrow \dfrac{256}{375}\pi x \geq 18\pi \Leftrightarrow x \geq 26,37$.

Vậy con quạ cần thả ít nhất 27 viên sỏi để uống được nước trong cốc.

Câu 33: Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 4cm$, $AD = 5cm$. Cắt hình chữ nhật đã cho theo đường gấp khúc MNP như hình vẽ bên với $BM = 2cm$, $NP = 2cm$, $PD = 3cm$ và giữ lại hình phẳng lớn $\left(H\right)$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay $\left(H\right)$ quanh trục AB.



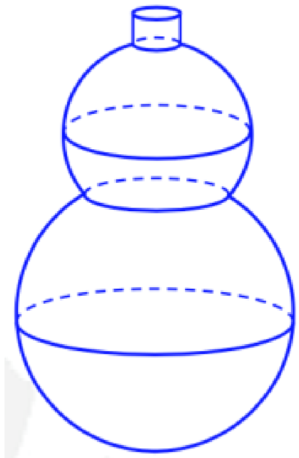
A. $V = 75\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 94\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $V = \dfrac{94\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = \dfrac{244\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành bằng tổng thể tích của khối trụ có $r=5$ cm, $h=3$ cm và thể tích của khối nón cụt có $r_1=2$ cm, $r_2=3$ cm, $h=1$ cm.

Vậy $V=\pi 5^2.3+\frac{\pi.1}{3}\left(2^2+3^2+2.3\right)=75\pi+\frac{19\pi}{3}=\frac{244\pi}{3}$ cm^3.

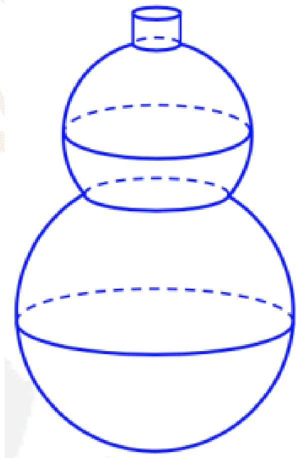
Câu 34: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R=13cm$ và $r=\sqrt{41}\,cm$ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ sau.



Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r'=5cm$ và nút uống rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}cm$, chiều cao bằng $4cm$. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (Kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

A. $9,5$. **B.** $10,2$. **C.** $8,2$. **D.** $11,4$.

Lời giải



Thể tích khối trụ trên cùng là $V_3=\pi\left(\sqrt{5}\right)^2.4=20\pi\left(cm^3\right)$.

Phần dưới cùng là một chỏm cầu.

Khoảng cách từ tâm của cầu lớn đến đường tròn giao của hai cầu là

$\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\left(cm\right)$

Do đó khối chỏm cầu lớn có chiều cao $h=R+12=13+12=25\left(cm\right)$ và có thể tích

$V_1=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi.25^2\left(13-\frac{25}{3}\right)=\frac{8750\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

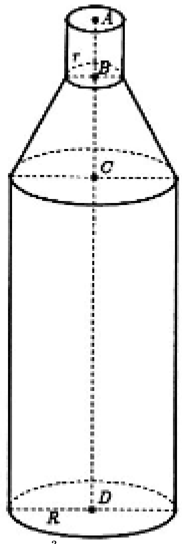
Phần ở giữa có thể tích bằng thể tích khối cầu nhỏ trừ đi thể tích hai khối chỏm cầu có chiều cao lần lượt là $h_1=r-\sqrt{r^2-r'^2}=\sqrt{41}-\sqrt{41-25}=\sqrt{41}-4$;

$h_2=r-\sqrt{r^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{41}-\sqrt{41-5}=\sqrt{41}-6$.

Do đó $V_2=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{41}\right)^3-\pi\left(\sqrt{41}-4\right)^2\left(\sqrt{41}-\frac{\sqrt{41}-4}{3}\right)-\pi\left(\sqrt{41}-6\right)^2\left(\sqrt{41}-\frac{\sqrt{41}-6}{3}\right)$

Suy ra $V=V_1+V_2+V_3\approx 10220,648cm^3\approx 10,2\left(l\right)$.

Câu 35: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết bán kính đáy chai $R=5cm$, bán kính cổ chai $r=2cm$, $AB=3cm$, $BC=6cm$ và $CD=16cm$. Tính thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó.

A. $V=495\pi\,cm^3$. **B.** $V=490\pi\,cm^3$. **C.** $V=462\pi\,cm^3$. **D.** $V=412\pi\,cm^3$.

Lời giải

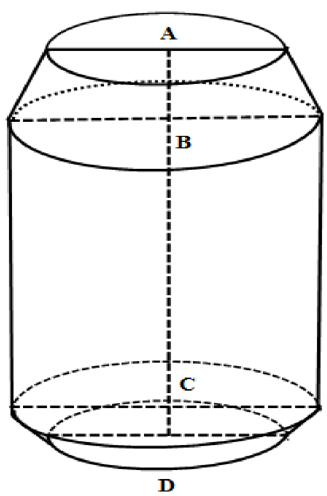
+ Khối trụ có bán kính đáy $r=2cm$ và chiều cao $AB=3cm$ nên có thể tích là $V_1=\pi.2^2.3=12\pi\,cm^3$.

+ Khối nón cụt có bán kính đáy lần lượt là $R=5cm$, $r=2cm$ và chiều cao $h=BC=6cm$ nên có thể tích là $V_2=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)=78\pi\,cm^3$.

+ Khối trụ có bán kính đáy $R=5cm$ và chiều cao $DC=16cm$ nên có thể tích là $V_3=\pi.5^2.16=400\pi\,cm^3$.

Vậy thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó là $V=V_1+V_2+V_3=490\pi\,cm^3$.

Câu 36: Tính thể tích V của một lon nước ngọt có hình dạng là một vật thể tròn xoay như hình vẽ bên. Biết bán kính nắp và đáy lon bằng nhau và bằng $2,5\ cm$; bán kính thân chai bằng $3\ cm$ và $AB=1,5\ cm, BC=8\ cm, CD=0,5\ cm,$ (giả thiết độ dày vỏ lon không đáng kể).



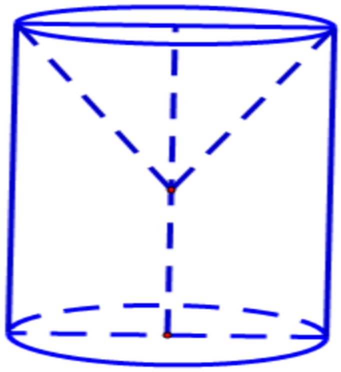
A. $V=\dfrac{379\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **B.** $V=\dfrac{523\pi}{6}\left(cm^3\right)$.
C. $V=95\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $V=79\pi\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Thể tích lon nước bằng tổng thể tích của khối nón cụt có $r_1=2,5cm, r_2=3cm, h=1,5cm$; thể tích khối trụ có $r=3cm, h=8cm$; thể tích của khối nón cụt có $r_1=2,5cm, r_2=3cm, h=0,5cm$.

Thể tích lon nước là $V=\pi 3^2.8+\dfrac{\pi(1,5+0,5)}{3}\left(2,5^2+3^2+2,5.3\right)=\dfrac{523\pi}{6}\left(cm^3\right)$.

Câu 37: Để chế tạo dụng cụ như hình, từ một khối thép hình trụ có bán kính 10 cm và chiều cao 20 cm người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm (tham khảo hình vẽ sau). Tính thể tích của dụng cụ đó, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.



A. $6235,988\text{ cm}^3$. **B.** $5235,988\text{ cm}^3$.
C. $5325,988\text{ cm}^3$. **D.** $4235,988\text{ cm}^3$.

Lời giải

Thể tích của khối trụ là: $V_1=\pi.10^2.20=2000\pi$.

Thể tích của khối nón bị khoét là: $V_2=\dfrac{1}{3}\pi.10^2.10=\dfrac{1000\pi}{3}$.

Vậy thể tích của dụng cụ là: $V=V_1-V_2=2000\pi-\dfrac{1000\pi}{3}=\dfrac{5000\pi}{3}=5235,988\ \left(\text{cm}^3\right)$.

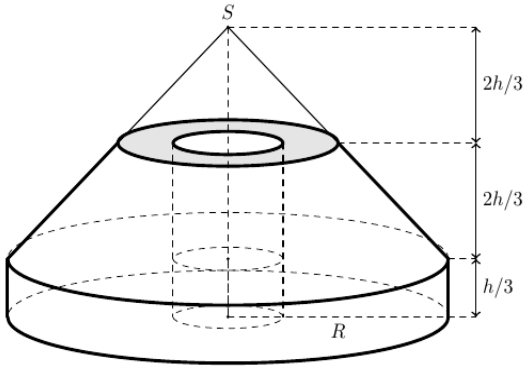
Câu 38: Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao là $h=1,8\text{m}$ gồm

+ Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R=1\text{m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$;

+ Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

+ Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*

Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân nghìn)* bằng



A. $3,881\,\text{m}^3$ **B.** $2,731\,\text{m}^3$ **C.** $3,203\,\text{m}^3$ **D.** $3,731\,\text{m}^3$

Lời giải

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$: $V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

Thể tích của khối bê tông bằng:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3,731\,\text{m}^3.$$

Câu 39: Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có chiều cao 200 mm và bán kính đáy 3 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Tính thể tích của phần thân bút chì làm bằng gỗ (với $\pi = 3,14$)

A. 502 m^3. **B.** $5,024.10^{-6}\text{ m}^3$.
C. $5,024\text{ m}^3$. **D.** $6,024.10^{-6}\text{ m}^3$.

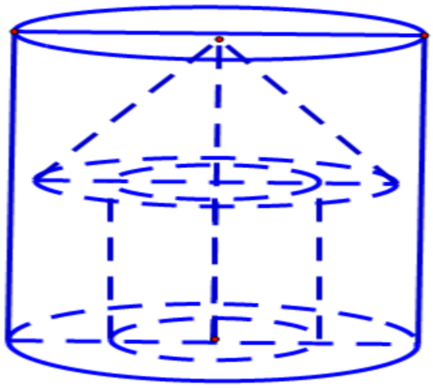
Lời giải

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi.10^{-6}.0,2 = 0,2.10^{-6}\pi\ \left(m^3\right)$.

Thể tích chiếc bút chì: $V = \pi R^2 h = \pi.9.10^{-6}.0,2 = 1,8.10^{-6}\pi\ \left(m^3\right)$.

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ:
$V_t = V - V_r = 1,8.10^{-6}\pi - 0,2.10^{-6}\pi = 5,024.10^{-6}\left(m^3\right)$.

Câu 40: Để chế tạo một khuôn như hình từ một khối thép hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy 20 cm, người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 15 cm và chiều cao 10 cm và một hình trụ có chiều cao bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm. Tính thể tích của dụng cụ đó, với $\pi = 3,14$.



A. 8988 cm^3. **B.** 19625 cm^3.
C. 588 cm^3. **D.** 9625 cm^3.

Lời giải

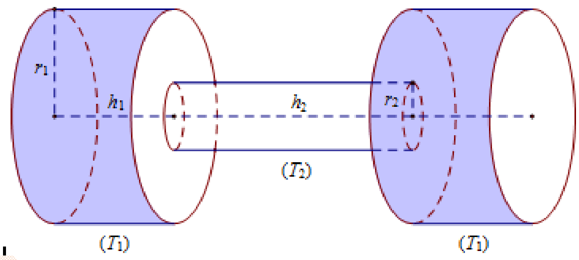
Thể tích của khối trụ thép là: $V_1 = \pi.20^2.20 = 8000\pi$.

Thể tích của khối nón bị khoét là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi.15^2.10 = \frac{2250\pi}{3}$.

Thể tích của khối trụ bị khoét là: $V_3 = \pi.10^2.10 = 1000\pi$.

Vậy thể tích của dụng cụ là: $V = V_1 - V_2 - V_3 = 8000\pi - \frac{2250\pi}{3} - 1000\pi = 6250\pi = 19625\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 41: Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 $\left(cm^3\right)$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Lời giải

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2\frac{1}{2}h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480\left(cm^3\right)$.

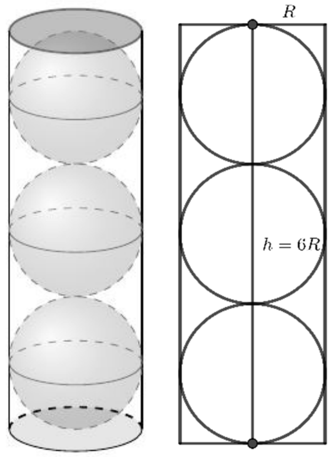
Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510\left(cm^3\right)$.

Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927(g) = 3,927(kg)$.

Câu 42: Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

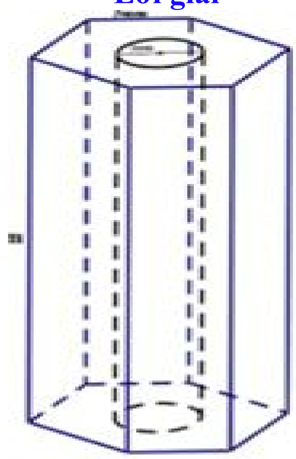


Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.
Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h=6R$.
Do đó ta có:
Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1=3.\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3$;
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0=\pi R^2h=6\pi R^3$;
Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2=V_0-V_1=2\pi R^3$.
Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0}=\frac{1}{3}\approx 0,33$.
Suy ra $a\approx 33$.

Câu 43: Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao $18\,\text{cm}$ và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính $1\,\text{cm}$. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}\text{cm}$, giá thành 540 đồng$/\text{cm}^3$. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng$/\text{cm}^3$. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm $15,58\%$ giá thành sản phẩm.

A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Lời giải



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R=\frac{1}{2}\text{cm}$ và $r=\frac{1}{8}\text{cm}$.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S=6.R^2\frac{\sqrt{3}}{4}=6.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V=S.h=\frac{3\sqrt{3}}{8}.18=\frac{27\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^3\right)$; $V_1=\pi r^2h=\pi.\frac{1}{8^2}.18=\frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

$\Rightarrow V_2=V-V_1=\frac{27\sqrt{3}}{4}-\frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1+100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$\left(540V_1+100V_2\right).\frac{100}{15,58}=\left[540.\frac{9\pi}{32}+100\left(\frac{27\sqrt{3}}{4}-\frac{9\pi}{32}\right)\right].\frac{100}{15,58}\approx 10000$ (đồng).

Câu 46: **(Đề TK BGD 2024)** Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $y\log_3(3x+y+9)=(x^2+3x+y)\log_3(x+3)$. Khi biểu thức $y-5x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x-2y$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** -7. **D.** -31.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y\log_3(3x+y+9)=(x^2+3x+y)\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow y\log_3(3x+y+9)-y\log_3(x+3)=(x^2+3x)\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow y\left[\log_3(3x+y+9)-\log_3(x+3)\right]=(x^2+3x)\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow y\left[\log_3\left(\frac{3x+y+9}{x+3}\right)\right]=(x^2+3x)\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow y\left[\log_3\left(3+\frac{y}{x+3}\right)\right]=x(x+3)\log_3(x+3)\Leftrightarrow\frac{y}{(x+3)}\left[\log_3\left(3+\frac{y}{x+3}\right)\right]=x\log_3(x+3)$ (1)

Xét hàm số $g(t)=t\log_3(3+t),\forall t\ge 0$. Ta có: $g'(t)=\log_3(3+t)+t.\frac{1}{(3+t)\ln 3}>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $g(t)=t\log_3(3+t),\forall t\ge 0$ luôn đồng biến. Do đó, từ (1) suy ra:

$x=\frac{y}{x+3}\Leftrightarrow y=x(x+3)$.

Biểu thức: $y-5x=x(x+3)-5x=x^2-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=1$, suy ra $y=4$.

Vậy $x-2y=1-2.4=-7$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 46

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $2\le x\le 2024$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$

A. 9 **B.** 10 **C.** 2023 **D.** 2024

Câu 2. Biết x, y là các số thực thoả mãn $10^{2x-y^2+3}\ge a^{2x-\log a}$ với mọi số thực $a>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3x+4y-3$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 25.

Câu 3. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_2(x+2y)+x^2-2y^2+xy-x+y=0$ và $x>y$. Khi biểu thức $xy+2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $2x+4y$ bằng

A. 2 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 5

Câu 4. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$.Khi biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $S = x - 2y$ bằng

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 2 **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 0

Câu 5. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn: $\log_3\left[\left(x^2+6x+3\right)(y+2)\right]^{(y+2)} = 27-(x^2+6x)(y+2)$.

Khi biểu thức $P=(x^2+10x+3)y-4xy+16x$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $x+10y$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 6. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $\log_2 \frac{4(x+y)}{x^2+y^2+1} = (x-1)^2 + (y-1)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+1}$.

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 7. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3\log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

A. $P_{\min} = 18$. **B.** $P_{\min} = 10$. **C.** $P_{\min} = 20$. **D.** $P_{\min} = 12$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $y\log_2(8x+2y+32)-4x = x^2 + \left(x^2+4x+y\right)\log_2(x+4)$ Khi biểu thức $y-2x^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $x-2y^3$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -249. **D.** 249.

Câu 9. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+3)y\right]^y = 125 - xy$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x-y$ bằng

A. 115. **B.** 110. **C.** 105. **D.** 120.

Câu 10. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_3\left[(x+5)y\right]^y = 243 - xy$. Khi biểu thức $x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $2x+y$ bằng

A. 50 **B.** 55 **C.** 59 **D.** 53

Câu 11. Cho x, y nguyên và $0 \le x \le 2024$ thỏa mãn $\log_2\left(\frac{2x+6}{x-1}\right) + \frac{8}{x-1} = y - 2 + 2^y$. Khi đó $x+2y$ bằng:

A. 2024. **B.** 2. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 12. Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125 - (x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-5;5)$ để bất phương trình sau

$\log_3 \dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-2m} < -2\left(x^2-x+m\right)$ có nghiệm?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 14. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$ sao cho biểu thức $P = \dfrac{4x+5y-3}{x+2y+1}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $2023x+2024y$ bằng

A. 6070. **B.** 4047. **C.** 6071. **D.** 8085.

Câu 15. Cho hai số dương x, y thoả mãn $\log_2\left(4x+y+2xy+2\right)^{y+2} = 8-(2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x+y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b}+c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a>2$. Tính $S = a+b+c$

A. $S=17$. **B.** $S=7$. **C.** $S=19$. **D.** $S=3$.

Câu 16. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $3+\ln\dfrac{x+y+1}{3xy} = 9xy-3x-3y$. Khi biểu thức $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị biểu thức $T = 2024x-2023y$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2023$. **D.** $T=-2023$.

Câu 17. Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Câu 18. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 19. Xét các số thực dương x, y thỏa $2024^{2\left(x^2-y+2\right)} - \dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2} \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y-2x.$

A. 2024. **B.** 2025. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y+\ln x).e^{y+\ln x} \leq \left(x^3+x\right)e^y$?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2026

Câu 21. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 25-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+3y$ là

A. $P_{\min} = 10\sqrt{3}-4$. **B.** $P_{\min} = 9\sqrt{3}+4$. **C.** $P_{\min} = -\sqrt{3}-4$. **D.** $P_{\min} = 10\sqrt{3}$

Câu 22. Cho các số thực x,y thoả mãn $\log\sqrt{x^2+2024y^2+2024}=\dfrac{x^4}{4048\left(y^2+1\right)}\log\left(x^2+1\right)+\log x$. Khi biểu thức $x^4+2024y$ đạt giá tri nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x-3y$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(30;32)$. **B.** $(34;36)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(36;38)$.

Câu 23. Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ trong đó $x,\ y$ không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Khi biểu thức $P=2x+y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x-4y$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 24. Gọi x,y là các số lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1+\log_{10y}x=\log_y x$ và $A=\dfrac{x}{y^{11}}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x.y=10^k$. Khi đó k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(10;20)$. **B.** $(20;25)$. **C.** $(25;35)$. **D.** $(30;40)$.

Câu 25. Cho hai số thực x,y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Khi biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $2y-x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 26. Xét các số thực x, y thỏa mãn $3^{x^2+y^2+1}\le\left(2x^2+2y^2-4x+3\right).9^x$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1}$ bằng $a\sqrt{113}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó $3a-b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 27. Cho x và y là các số thực không âm thỏa mãn $384.\,128^{x^2-2x}-6.8^y+6=3y-7x^2+14x$. Khi biểu thức $-3y+4x^2-2x+8$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $P=3x-2y$ bằng

A. 10. **B.** -22. **C.** 14. **D.** 2

Câu 28. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $3^{x^4+1}=2(3y-x)+3.3^{81y^4}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để biểu thức $P=x^2+3\left(m^2-2025\right)y+2023$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 45. **B.** 0. **C.** 1035. **D.** 990.

Câu 29. Cho x và y là các số thực không âm thỏa mãn $\log_2\left(y+\sqrt{y+2^x}\right)=2x$. Khi biểu thức $y-2^{x+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $y+2^x$ bằng?

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{25}{4}$. **C.** $\dfrac{25}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{25}$.

Câu 30. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\log\dfrac{x+1}{3y+1} \geq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2xy^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 31. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + xy - 4 = \log_2\dfrac{x+4}{y+1}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2024;2024]$ để bất phương trình $4x + (5-m)y - 12 - 4m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi số thực dương x và y. Số phần tử của tập S là

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2026. **D.** 1013.

Câu 32. Cho các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\dfrac{21}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Câu 33. Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(9x+18) + x - 2y = 9^y$.Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 34. Cho phương trình $2^{(x+2)(2x+1)}.\ln\left[2(x+2)x+3\right] = 2^{y+x^2+x+1}.\ln\sqrt{x^2+y+1}$ (1) với $y \geq 0$. Khi $2x^2 - y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $S = y - x$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 35. Cho hai số thực dương $x;y$ thỏa mãn $3xy + 4x + \log_3(xy+2x)^x = 27$. Khi $P = \dfrac{2}{9}y + x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $x + y^2$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** $\dfrac{23}{9}$. **C.** 50. **D.** $\dfrac{433}{9}$.

Câu 36. Cho các số thực $x \neq 0, y > 0$ thỏa mãn $\log_2\dfrac{y}{2x^2} + y^2 = x^4 - 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để với mỗi m có đúng 3 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\dfrac{m}{2}\left(2^{y-2x} + 2^{-y+4x}\right) = \dfrac{m^2}{4} + 2^{2x}$. Tổng các phần tử trong S bằng

A. 49. **B.** 50. **C.** 51. **D.** 48.

Câu 1: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2024a)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\dfrac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 3: Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$$

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=10$. **C.** $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\min}=12$.

Câu 4: Gọi x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1+\log_{2y} x=\log_y x$ và $A=\frac{x}{y^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y=x^3-4x^2+x-1$ **B.** $y=x^2-4x+1$. **C.** $y=\frac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=x^4-18x^2+12$.

Câu 5: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\ge\log_2\left(x^2+2y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+2y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}+3$ **B.** $2+3\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{3}$ **D.** 9

Câu 6: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln(x-y)+\frac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x+y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 16

Câu 7: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y để tồn tại số thực $x\in\left(\frac{1}{3};9\right)$ thỏa mãn đẳng thức $y+x^2.9^y+\log_3 x=x\left(3^{x+y}+1\right)$. Tổng các phần tử của S là

A. 36. **B.** 35. **C.** 28. **D.** 21.

Câu 8: Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $\log_2\sqrt{x^2+1}=2^{4y-1}-2x^2+2y-3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^4-4^{2y+2}$ bằng

A. $(0;+\infty)$. **B.** -9760. **C.** -1088. **D.** 2530.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên $y\le 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2}+(y+\ln x).e^{y+\ln x}\le\left(x^3+x\right)e^y$?

A. 2023 **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2026

Câu 10: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2020^{2019\left(x^2-y+4\right)}=\frac{4x+y}{(x+2)^2}$. Khi biểu thức $y-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x-2y$ bằng

A. -6. **B.** -7. **C.** -8. **D.** -9.

Câu 11: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_2(4y+4)-x=1+2^x-y$. Khi biểu thức $y+2^x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x+2^y$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Câu 13: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \le x, y \le 1$ và $\log_3 \dfrac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 14: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 15: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$ **B.** $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$

C. $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$ **D.** $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2 \le x \le 2024$ và $2^y - \log_2\left(x + 2^{y-1}\right) = 2x - y$

A. 9 **B.** 10 **C.** 2023 **D.** 2024

Lời giải

Ta có $2^y - \log_2\left(x+2^{y-1}\right) = 2x - y \Leftrightarrow 2^{y+1} - \log_2\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right) = 2x + 2^y - y$

$\Leftrightarrow 2^{y+1} + (y+1) = \log_2\left(2x+2^y\right) + 2x + 2^y$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$, ta có $f'(u) = 2^u \ln 2 + 1 > 0, \forall u \Rightarrow f(u)$ đồng biến

Suy ra $2^{y+1} + (y+1) = \log_2\left(2x+2^y\right) + 2x + 2^y \Leftrightarrow 2^{y+1} = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2^y = 2x$

Mà ta có $2 \le x \le 2024 \Leftrightarrow 4 \le 2x \le 4048 \Leftrightarrow 4 \le 2^y \le 4048 \Leftrightarrow \log_2 4 \le y \le \log_2 4048$

Do y là số nguyên nên $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$

Suy ra có 10 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện

Câu 2. Biết x, y là các số thực thoả mãn $10^{2x-y^2+3} \ge a^{2x-\log a}$ với mọi số thực $a > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3x + 4y - 3$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 25.

Lời giải

Ta có:

$10^{2x-y^2+3} \ge a^{2x-\log a} \Leftrightarrow 2x-y^2+3 \ge (2x-\log a)\log a \Leftrightarrow \log^2 a - 2x\log a + 2x + 3 - y^2 \ge 0$.

Đặt $t=\log a$ ta được bất phương trình $t^2-2xt+2x+3-y^2 \ge 0$

Để bất phương trình đúng với mọi số thực $a>0$ thì điều kiện là $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3+y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 4$.

Khi đó $P=3x+4y-3=3(x-1)+4y \Rightarrow P^2 \le \left[3^2+4^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right] \le 25.4 \Rightarrow P \le 10$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{11}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases}$.

Câu 3. Xét các số thực dương x,y thoả mãn $\log_2(x+2y)+x^2-2y^2+xy-x+y=0$ và $x>y$. Khi biểu thức $xy+2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $2x+4y$ bằng

A. 2 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2(x+2y)+x^2-2y^2+xy-x+y=0$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{(x+2y)(x-y)}{(x-y)}+x^2-2y^2+xy-(x-y)=0$ mà $(x-y>0)$

$\log_2(x^2-2y^2+xy)+x^2-2y^2+xy=\log_2(x-y)+(x-y)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t \ (t>0)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=x-y \Leftrightarrow (x-y)(x+2y-1)=0$ mà $x>y \Leftrightarrow x-y>0$

$x+2y=1 \Leftrightarrow x=1-2y$

Nên $P=(1-2y)y+2=-2y^2+y+2$.

$MaxP=\dfrac{17}{8}$ khi $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Vậy $2x+4y=2.\dfrac{1}{2}+4.\dfrac{1}{4}=2$.

Câu 4. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$.Khi biểu thức $T=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $S=x-2y$ bằng

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 2 **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 0

Lời giải

Ta có: $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=3(x+y)-(2x+y+1)+1$

$\Leftrightarrow\log_3(2x+y+1)+2x+y+1=\log_3(3(x+y))+3(x+y)(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $(*)\Leftrightarrow f(2x+y+1)=f(3x+3y)\Leftrightarrow 2x+y+1=3x+3y\Leftrightarrow x+2y=1$

Đặt $a=\sqrt{y}>0\Leftrightarrow y=a^2\Leftrightarrow x=1-2y=1-2a^2>0\Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $T=g(a)=\frac{1}{1-2a^2}+\frac{2}{a}$

Xét hàm số $g(a)=\frac{1}{1-2a^2}+\frac{2}{a}$ trên khoảng $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ có $g'(a)=-\frac{2(2a-1)(2a^3-2a-1)}{a^2(2a^2-1)^2}$

Xét $h(a)=2a^3-2a-1$ trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ có

$h'(a)=6a^2-2=2(3a^2-1)=0\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow h'(a)<0\forall a\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\supset\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Do đó $h(a)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow h(a)<h(0)=-1<0\forall a\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nên phương trình $h(a)=0$ vô nghiệm trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Phương trình $g'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$. Tính các giá trị $g\left(\frac{1}{2}\right)=6;\lim\limits_{a\to0}g(a)=+\infty;\ \lim\limits_{a\to\frac{1}{\sqrt{2}}}g(a)=+\infty$

$\Rightarrow\min\limits_{\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}g(a)=g\left(\frac{1}{2}\right)=6$

Giá trị nhỏ nhất cần tìm $T_{\min}=6$ nên $a=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{4};x=\frac{1}{2}$.

Vậy $S=x-2y=\frac{1}{2}-2.\frac{1}{4}=0$.

Câu 5. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn: $\log_3\left[(x^2+6x+3)(y+2)\right]^{(y+2)}=27-(x^2+6x)(y+2)$.

Khi biểu thức $P=(x^2+10x+3)y-4xy+16x$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $x+10y$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $\log_3\left[\left(x^2+6x+3\right).(y+2)\right]^{(y+2)}=27-(x^2+6x)(y+2)$

$\Leftrightarrow (y+2)\log_3\left[\left(x^2+6x+3\right).(y+2)\right]=27-(x^2+6x)(y+2)$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\left(x^2+6x+3\right).(y+2)\right]=\dfrac{27}{y+2}-(x^2+6x)$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\left(x^2+6x+3\right).(y+2)\right]=\dfrac{27}{y+2}-(x^2+6x+3)+3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+6x+3\right)+(x^2+6x+3)=\dfrac{27}{y+2}-\log_3\left(y+2\right)+3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+6x+3\right)+(x^2+6x+3)=\dfrac{27}{y+2}+\log_3\left(\dfrac{27}{y+2}\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_3 t+t$, với $\forall t\in\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t\in\left(0;+\infty\right)$

Suy ra $f\left(t\right)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $\left(1\right)$ $\Leftrightarrow x^2+6x+3=\dfrac{27}{y+2}$ $\Leftrightarrow y+2=\dfrac{27}{x^2+6x+3}\Leftrightarrow y=\dfrac{21-2x^2-12x}{x^2+6x+3}$

Nên $P=(x^2+10x+3)y-4xy+16x=(x^2+6x+3)y+16x$.

$=21-2x^2+4x=23-2\left(x-1\right)^2\le 23$.

$\text{Max}P=23$ khi $x=1\Rightarrow y=\dfrac{7}{10}$

Vậy: $x+10y=8$.

Câu 6. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn: $\log_2\dfrac{4(x+y)}{x^2+y^2+1}=\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 1+\log_2\dfrac{2x+2y}{x^2+y^2+1}=x^2+y^2+2-2x-2y$

$\Leftrightarrow 2x+2y+\log_2(2x+2y)=\log_2(x^2+y^2+1)+x^2+y^2+1\ \ (*)$

Xét $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$. Dễ thấy $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(*)\Leftrightarrow x^2+y^2+1=2x+2y\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Gọi $M(x;y)\Rightarrow M\in(C)$: tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$.

Mặt khác $P=\dfrac{x}{y+1}\Rightarrow M\in\Delta: x-Py-P=0$.

Để tồn tại điểm chung giữa Δ và (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow \dfrac{|1-2P|}{\sqrt{1+P^2}}\le 1$

$\Leftrightarrow 3P^2-4P\le 0\Leftrightarrow 0\le P\le\dfrac{4}{3}$.

$P=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\3x-4y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}$. Vậy P lớn nhất là $\dfrac{4}{3}$.

Câu 7. Cho a,b,c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\dfrac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\dfrac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$

A. $P_{\min}=18$. **B.** $P_{\min}=10$. **C.** $P_{\min}=20$. **D.** $P_{\min}=12$.

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{4}{2\log_{bc}a}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_{ac}b}+\dfrac{8}{\log_{ab}c}=2\log_a bc+2\log_b ac+8\log_c ab$

$=2\log_a b+2\log_a c+2\log_b a+2\log_b c+8\log_c a+8\log_c b$

$=(2\log_a b+2\log_b a)+(2\log_a c+8\log_c a)+(2\log_b c+8\log_c b)$.

Vì a,b,c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b,\ \log_b a,\ \log_a c,\ \log_c a,\ \log_b c,\ \log_c b>0$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$P\ge 2\sqrt{2\log_a b.2\log_b a}+2\sqrt{2\log_a c.8\log_c a}+2\sqrt{2\log_b c.8\log_c b}=4+8+8=20$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\log_a b=\log_b a\\\log_a c=4\log_c a\\\log_b c=4\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\c=a^2\\c=b^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{c}>1$.

Vậy $P_{\min}=20$.

Câu 8. Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $y\log_2(8x+2y+32)-4x=x^2+(x^2+4x+y)\log_2(x+4)$ Khi biểu thức $y-2x^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $x-2y^3$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -249. **D.** 249.

Lời giải

Ta có: $y\log_2(8x+2y+32)-4x=x^2+\left(x^2+4x+y\right)\log_2(x+4)$

$\Leftrightarrow y\left[1+\log_2(4x+y+16)\right]=y\log_2(x+4)+x(x+4)\left[1+\log_2(x+4)\right]$

$\Leftrightarrow y\left[1+\log_2(4x+y+16)-\log_2(x+4)\right]=x(x+4)\left[1+\log_2(x+4)\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{x+4}\left(1+\log_2\dfrac{4x+y+16}{x+4}\right)=x\left[1+\log_2(x+4)\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{x+4}\left[1+\log_2\left(\dfrac{y}{x+4}+4\right)\right]=x\left[1+\log_2(x+4)\right]$ (1)

Xét hàm số $f(x)=x\left[1+\log_2(x+4)\right]$ xác định trên $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=1+\log_2(x+4)+\dfrac{x}{(x+4)\ln 2}>0, \forall x>0$

Suy ra $f(x)=x\left[1+\log_2(x+4)\right]$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{y}{x+4}=x \Leftrightarrow y=x^2+4x$

Nên $y-2x^3=-2x^3+x^2+4x$.

Xét hàm số $g(x)=-2x^3+x^2+4x$ trên $(0;+\infty)$:

Ta có $g'(x)=-6x^2+2x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)=-2x^3+x^2+4x$, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} g(x)=g(1)=3$ (đạt được khi và chỉ khi $x=1$).

Với $x=1$ thì $y=5$ và $x-2y^3=-249$.

Câu 9. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+3)y\right]^y=125-xy$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x-y$ bằng

A. 115. **B.** 110. **C.** 105. **D.** 120.

Lời giải

Ta có: $\log_5\left[(x+3).y\right]^y=125-xy$

$\Leftrightarrow y.\log_5\left[(x+3).y\right]=125-\left[(x+3)-3\right].y$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+3).y\right]=\dfrac{125}{y}-(x+3)+3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+3)+\log_5 y=\dfrac{125}{y}-(x+3)+3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+3)+(x+3)=\dfrac{125}{y}-\log_5 y+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+3)+(x+3)=\log_5\left(\frac{125}{y}\right)+\frac{125}{y}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 5}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x+3=\frac{125}{y} \Leftrightarrow x=\frac{125}{y}-3$

Nên $P=x+5y=\frac{125}{y}-3+5y=\frac{125}{y}+5y-3\geq 2\sqrt{\frac{125}{y}\cdot 5y}-3=47, \forall y>0$.

$\min P=47$ khi $\frac{125}{y}=5y \Leftrightarrow y=5 \Rightarrow x=22$

Vậy $5x-y=5.22-5=105$.

Câu 10. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_3\left[(x+5)y\right]^y=243-xy$. Khi biểu thức $x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $2x+y$ bằng

A. 50 **B.** 55 **C.** 59 **D.** 53

Lời giải

Ta có: $\log_3\left[(x+5)y\right]^y=243-xy$

$\Leftrightarrow y.\log_3\left[(x+5)y\right]=243-\left[(x+5)-5\right].y$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x+5)y\right]=\frac{243}{y}-(x+5)+5$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5)+\log_3 y=\frac{243}{y}-(x+5)+5$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5)+(x+5)=\frac{243}{y}-\log_3 y+\log_3 243$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5)+(x+5)=\log_3\left(\frac{243}{y}\right)+\frac{243}{y}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t \ (t>0)$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow x+5=\frac{243}{y} \Leftrightarrow x=\frac{243}{y}-5$

Nên $P=x+3y=\dfrac{243}{y}-5+3y=\dfrac{243}{y}+3y-5\geq 2\sqrt{\dfrac{243}{y}\cdot 3y}-5=49,\forall y>0$.

$\min P=49$ khi $\dfrac{243}{y}=3y\Leftrightarrow y=9\Rightarrow x=22$

Vậy $2x+y=2.22+9=53$.

Câu 11. Cho x,y nguyên và $0\leq x\leq 2024$ thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)+\dfrac{8}{x-1}=y-2+2^y$. Khi đó $x+2y$ bằng:

A. 2024. **B.** 2. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của x: $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. Nên ta chỉ kiểm tra $2\leq x\leq 2024$

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)+\dfrac{8}{x-1}=y-2+2^y\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)+2+\dfrac{8}{x-1}=y+2^y$

$\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)+\dfrac{2x+6}{x-1}=y+2^y\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)+2^{\log_2\left(\frac{2x+6}{x-1}\right)}=y+2^y$ (1)

Đặt $f(t)=2^t+t$.

Ta có: $f'(t)=1+2^t.\ln 2>0\ \forall t\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến.

Do đó: $(1)\Rightarrow f(y)=f\left(\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)\right)\Rightarrow y=\log_2\left(\dfrac{2x+6}{x-1}\right)\Leftrightarrow\dfrac{2x+6}{x-1}=2^y$

Đặt $u=\dfrac{2x+6}{x-1}\Rightarrow u'=\dfrac{-8}{(x-1)^2}<0\quad\forall x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$

Do $2\leq x\leq 2020$ và $u=\dfrac{2x+6}{x-1}$ luôn nghịch biến trên $[2;2024]$ nên $u\in\left[\dfrac{4054}{2023};10\right]$

Mà: $u=2^y$ và $y\in\mathbb{Z}$ nên $u\in\{4;8\}$

*Với $u=4\Rightarrow\begin{cases}4=2^y\Leftrightarrow y=2\\ \dfrac{2x+6}{x-1}=4\Leftrightarrow 2x+6=4x-4\Leftrightarrow x=5\end{cases}$

*Với $u=8\Rightarrow\begin{cases}8=2^y\Leftrightarrow y=3\\ \dfrac{2x+6}{x-1}=8\Leftrightarrow 2x+6=8x-8\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}\end{cases}$ (loại)

Vậy, phương trình có một cặp nghiệm thỏa bài toán: $(5;2)$. Khi đó $x+2y=9$

Câu 12. Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=125-\left[(x+2)-3\right](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=\dfrac{125}{y+1}-\left[(x+2)-3\right]$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+\log_5(y+1)=\dfrac{125}{y+1}-(x+2)+3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\dfrac{125}{y+1}+\log_5(y+1)^{-1}+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\dfrac{125}{y+1}+\log_5\left(\dfrac{1}{y+1}\right)+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\log_5\left(\dfrac{125}{y+1}\right)+\dfrac{125}{y+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 5}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+2=\dfrac{125}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{125}{y+1}-2$

Nên $P=x+5y=\dfrac{125}{y+1}-2+5y=\dfrac{125}{y+1}+5(y+1)-7\ge 2\sqrt{\dfrac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)}-7=43,\forall y\ge 0$.

$\min P=43$ khi $\dfrac{125}{y+1}=5(y+1)\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=23$

Vậy $5x+y=5.23+4=119$.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-5;5)$ để bất phương trình sau $\log_3\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-x+4-2m}<-2\left(x^2-x+m\right)$ có nghiệm?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Với điều kiện $4x^2-x+4-2m>0$ (Do $2x^2-x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$), ta có

$\log_3 \dfrac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - x + 4 - 2m} < -2x^2 + 2x - 2m \quad (*)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2 - x + 1\right) - \log_3\left(4x^2 - x + 4 - 2m\right) < -2x^2 + 2x - 2m$

$\Leftrightarrow \log_3\left(6x^2 - 3x + 3\right) + 6x^2 - 3x + 3 < \log_3\left(4x^2 - x + 4 - 2m\right) + 4x^2 - x + 4 - 2m \qquad (1)$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0,\ \forall t > 0$.

Suy ra hàm $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 3 < 4x^2 - x + 4 - 2m \Leftrightarrow 2m < -2x^2 + 2x + 1$.

Xét hàm $g(x) = -2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow g'(x) = -4x + 2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để bất phương trình (*) có nghiệm thì $2m < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{4}$.

Vì $m \in (-5;5)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Thử lại với điều kiện $4x^2 - x + 4 - m > 0$ ta thấy $m = \{-4;-3;-2;-1;0\}$ đều thỏa mãn.

Vậy có 5 số nguyên $m \in (-5;5)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$ sao cho biểu thức $P = \dfrac{4x + 5y - 3}{x + 2y + 1}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $2023x + 2024y$ bằng

A. 6070. **B.** 4047. **C.** 6071. **D.** 8085.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) = x^2 + y^2 + xy - 3(x+y)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+2=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+(x^2+y^2+xy+2)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}3(x+y)+3(x+y)=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+(x^2+y^2+xy+2)$,

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_{\sqrt{3}}t+t$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(3(x+y))=f\left(x^2+y^2+xy+2\right)\Leftrightarrow 3(x+y)=x^2+y^2+xy+2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-12x-12y=0\Leftrightarrow(2x+y)^2-6(2x+y)+3(y-1)^2+5=0$

Vì $3(y-1)^2\geq 0\Rightarrow(2x+y)^2-6(2x+y)+5\leq 0\Leftrightarrow 1\leq 2x+y\leq 5$

Ta có: $P=\dfrac{4x+5y-3}{x+2y+1}=2+\dfrac{2x+y-5}{x+2y+1}\leq 2$ (do $2x+y-5\leq 0$).

Suy ra : $P_{\max}=2$, xảy ra khi $\begin{cases}y-1=0\\2x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Vậy: $2023x+2024y=6070$.

Câu 15. Cho hai số dương x,y thoả mãn $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2}=8-(2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$ là số có dạng $M=a\sqrt{b}+c$ với $a,b\in\mathbb{N},a>2$. Tính $S=a+b+c$

A. $S=17$. **B.** $S=7$. **C.** $S=19$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2}=8-(2x-2)(y+2)\Leftrightarrow(y+2)\left[\log_2(y+2)(2x+1)+2x-2\right]=8$

$\Leftrightarrow\log_2(y+2)+\log_2(2x+1)+(2x+1)-3=\dfrac{8}{y+2}\Leftrightarrow\log_2(2x+1)+(2x+1)=\log_2\left(\dfrac{8}{y+2}\right)+\dfrac{8}{y+2}$

$\Leftrightarrow f(2x+1)=f\left(\dfrac{8}{y+2}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t,\forall t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó (*) $\Leftrightarrow 2x+1=\dfrac{8}{y+2}\Rightarrow 2x=\dfrac{8}{y+2}-1$.

Khi đó $P=2x+y=\dfrac{8}{y+2}+y-1=\dfrac{8}{y+2}+y+2-3\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{8}-3=4\sqrt{2}-3$.

$\Rightarrow a=4,\ b=2,\ c=-3$. Vậy $S=a+b+c=3$.

Câu 16. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn: $3+\ln\dfrac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$. Khi biểu thức $P=xy$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị biểu thức $T=2024x-2023y$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2023$. **D.** $T=-2023$.

Lời giải

Ta có:

$3+\ln\dfrac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{x+y+1}{3xy}+3(x+y+1)=9xy$

$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)-\ln(3xy)+3(x+y+1)=9xy$

$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3.3xy \quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+3t,\ \forall t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+3>3,\ \forall t>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó, từ (1) suy ra $f(x+y+1)=f(3xy)\Leftrightarrow x+y+1=3xy$

$\Leftrightarrow x(1-3y)+y+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{3y-1}\quad (2)$

Khi đó:

$P=xy=\dfrac{y+1}{3y-1}.y=\dfrac{y^2+y}{3y-1}=\dfrac{y^2-2y+1+3y-1}{3y-1}=\dfrac{y^2-2y+1}{3y-1}+\dfrac{3y-1}{3y-1}=\dfrac{(y-1)^2}{3y-1}+1\ge 1,\ \forall y>0.$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt được khi $y=1$. Thay vào (2), suy ra $x=1$.

Vậy $T=2024x-2023y=2024-2023=1$.

Chọn đáp án#A.

Câu 17. Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=125-\left[(x+2)-3\right](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=\dfrac{125}{y+1}-\left[(x+2)-3\right]$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+\log_5(y+1)=\dfrac{125}{y+1}-(x+2)+3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\dfrac{125}{y+1}+\log_5(y+1)^{-1}+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\dfrac{125}{y+1}+\log_5\left(\dfrac{1}{y+1}\right)+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\log_5\left(\frac{125}{y+1}\right)+\frac{125}{y+1}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 5}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+2=\frac{125}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\frac{125}{y+1}-2$

Nên $P=x+5y=\frac{125}{y+1}-2+5y=\frac{125}{y+1}+5(y+1)-7\geq 2\sqrt{\frac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)}-7=43, \forall y\geq 0$.

$\min P=43$ khi $\frac{125}{y+1}=5(y+1)\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=23$

Vậy $5x+y=5.23+4=119$.

Câu 18. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow \left(\log_{\sqrt{3}}(x+y)\right)+3(x+y)+2=\left(\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow \left(\log_{\sqrt{3}}(x+y)\right)+3(x+y)+\log_{\sqrt{3}}3=\left(\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow \left(\log_{\sqrt{3}}[3(x+y)]\right)+3(x+y)=\left(\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{3}}t+t$, với $t>0$.

có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln\sqrt{3}}+1>0$, $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(3(x+y))=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow 3(x+y)=x^2+y^2+xy+2\ (1)$.

Từ (1) $\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-3(x+y)+2$.

Ta có $x = x + xy - xy = x\left(y+1\right) - xy \le \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \le \dfrac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

Suy ra: $P = \dfrac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \le \dfrac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \dfrac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-3t^2 - 36t + 135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận).

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 19. Xét các số thực dương x, y thỏa $2024^{2(x^2-y+2)} - \dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2} \ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y - 2x$.

A. 2024. **B.** 2025. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Từ giả thiết, ta suy ra $2024^{2(x^2-y+2)} \ge \dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2\left(x^2 - y + 2\right) \ge \log_{2024} \dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}$ (1).

Đặt $a = 4x + y + 2$ và $b = (x+2)^2$ thì (1) trở thành

$2(b-a) \ge \log_{2024} a - \log_{2024} b \Leftrightarrow \log_{2024} a + 2a \ge \log_{2024} b + 2b$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \log_{2024} t + 2t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2024} + 2 > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow f(a) \ge f(b) \Leftrightarrow a \ge b \Leftrightarrow 4x + y + 2 \ge (x+2)^2 \Leftrightarrow y \ge x^2 + 2$.

Thay vào P, ta được $P \ge x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \ge 1$.

Vậy $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 3$..

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \le 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + \ln x).e^{y+\ln x} \le (x^3 + x)e^y$?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2026

Lời giải

Chọn B

□ Xét hàm số $g(t) = e^t - t \Rightarrow g'(t) = e^t - 1$.

Ta có $g'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow e^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \ge 1, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^t - t \ge 1, \forall t \in \mathbb{R}$ (1)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 0$.

□ Xét bất phương trình $e^{x^2} + (y + \ln x).e^{y+\ln x} \le (x^3 + x)e^y$ Điều kiện $x > 0$.

Chia 2 vế cho $e^y.x$ ta được

$$\frac{e^{x^2-y}}{x} + y + \ln x \le x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \le 1.$$

Mà từ (1) ta có $e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \ge 1$.

Từ đó suy ra $x^2 - y - \ln x = 0 \Rightarrow y = x^2 - \ln x = f(x)$.

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vì $x > 0$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y \ge \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,85$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của y thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Câu 21. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 25-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+3y$ là

A. $P_{\min} = 10\sqrt{3}-4$. **B.** $P_{\min} = 9\sqrt{3}+4$. **C.** $P_{\min} = -\sqrt{3}-4$. **D.** $P_{\min} = 10\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: $\log_5\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 25-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5[(x+1)(y+1)]+(x-1)(y+1) = 25$

$\Leftrightarrow (y+1)[\log_5(x+1)(y-1)+x-1] = 25$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)(y-1)+x-1 = \dfrac{25}{y+1}$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)+\log_5(y-1)+x-1 = \dfrac{25}{y+1}$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)+x-1 = \dfrac{25}{y+1}-\log_5(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)+x+1-2 = \dfrac{25}{y+1}+2-\log_5(y+1)-2$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)+(x+1)-2 = \dfrac{25}{y+1}+\log_5\dfrac{25}{y+1}-2$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 5}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra: $x+1 = \dfrac{25}{y+1} \Rightarrow x = \dfrac{24-y}{y+1}$. Do $x>0$ nên $y \in (0;24)$.

Vậy $P = x+3y = \dfrac{24-y}{y+1}+3y = \dfrac{25}{y+1}+3y-1 = \dfrac{25}{y+1}+3(y+1)-4 \ge 10\sqrt{3}-4$.

Câu 22. Cho các số thực x,y thoả mãn $\log\sqrt{x^2+2024y^2+2024}=\dfrac{x^4}{4048\left(y^2+1\right)}\log\left(x^2+1\right)+\log x$. Khi biểu thức $x^4+2024y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x-3y$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(30;32)$. **B.** $(34;36)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(36;38)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>0$

$$\log\sqrt{x^2+2024y^2+2024}=\frac{x^4}{4048\left(y^2+1\right)}\log\left(x^2+1\right)+\log x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log\left(x^2+2024y^2+2024\right)=\frac{x^4}{4048\left(y^2+1\right)}\log\left(x^2+1\right)+\log x$$

$$\Leftrightarrow 2024\left(y^2+1\right)\log\left(x^2+2024y^2+2024\right)=x^4\log\left(x^2+1\right)+4048\log x$$

$$\Leftrightarrow 2024\left[\log\left(x^2+2024\left(y^2+1\right)\right)-\log x^2\right]=\frac{x^4}{y^2+1}\log\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2024\left(y^2+1\right)}{x^2}\log\left(1+\frac{2024\left(y^2+1\right)}{x^2}\right)=x^2\log\left(x^2+1\right)\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t.\log(t+1)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(t+1)\ln 10}>0,\forall t\in(0;+\infty)$.

Từ $(1)\Rightarrow\dfrac{2024\left(y^2+1\right)}{x^2}=x^2\Leftrightarrow x^4=2024\left(y^2+1\right)$.

Khi đó: $x^4+2024y=2024\left(y^2+1\right)+2024y=2024\left(y^2+y+1\right)\ge 1518$.

Dấu “=” xảy ra khi $y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt[4]{2530}$.

Khi đó: $5x-3y\approx 36,95$.

Câu 23. Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ trong đó $x,\ y$ không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Khi biểu thức $P=2x+y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x-4y$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Từ điều kiện để bài và $\dfrac{x+y}{1-xy}>0;\ 1-xy\ne 0\ \Rightarrow x+y>0;\ 1-xy>0$.

Khi đó $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)$ (1).

Xét hàm số $g(t)=\log_3 t+t,\ (t>0)$ có $g'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t>0$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f(x)=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$ với $x\in[0;1]$.

Ta có $f'(x)=2+\dfrac{-2}{(x+1)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

$f(0)=1;\ f(1)=2\ \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x)=2\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0$.

Khi đó: $3x-4y=3.1+4.0=3$..

Câu 24. Gọi x,y là các số lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1+\log_{10y}x=\log_y x$ và $A=\dfrac{x}{y^{11}}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x.y=10^k$. Khi đó k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(10;20)$. **B.** $(20;25)$. **C.** $(25;35)$. **D.** $(30;40)$.

Lời giải

Ta có $1+\log_{10y}x=\log_y x\Leftrightarrow 1+\dfrac{\lg x}{\lg 10y}=\dfrac{\lg x}{\lg y}\Leftrightarrow 1+\dfrac{\lg x}{1+\lg y}=\dfrac{\lg x}{\lg y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\lg x+\lg y}{1+\lg y}=\dfrac{\lg x}{\lg y}\Leftrightarrow(1+\lg x+\lg y).\lg y=(1+\lg y).\lg x$

$\Leftrightarrow \lg y+(\lg y)^2=\lg x$

Mặt khác: $A=\dfrac{x}{y^{11}}$ suy ra: $\lg A=\lg x-\lg y^{11}\Leftrightarrow \lg A=\lg x-11\lg y$

$\lg A=\lg x-11\lg y=\left[\lg y+(\lg y)^2\right]-11\lg y=(\lg y)^2-10\lg y\ =(\lg y-5)^2-25\geq -25;$

Suy ra $A\geq 10^{-25}$; $\min A=10^{-25}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\lg y=5\\ \lg y+(\lg y)^2=\lg x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10^5\\ \lg x=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10^5\\ x=10^{30}\end{cases}$

$\Rightarrow x.y=10^{35}\Rightarrow k=35$

Vậy $k\in(30;40)$.

Câu 25. Cho hai số thực x, y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Khi biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $2y-x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

$x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log_2\left(2(x+1)^2\right)=\log_2(2y+1)+(2y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t\ ,(t>0)$; $f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0,\forall t>0$

Suy ra $2(x+1)^2=2y+1 \Rightarrow 2y=2(x+1)^2-1$.

$P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1=e^{2x-1}+4x^2-2(x+1)^2+1+1=e^{2x-1}+2x^2-4x=g(x)$.

$g'(x)=2e^{2x-1}+4x-4$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên $g'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm, nhẩm được nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ nên nghiệm đó là duy nhất.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P=-\dfrac{1}{2}$ tại $x=\dfrac{1}{2}; y=\dfrac{7}{4}$. Do đó giá trị của $2y-x=3$.

Câu 26. Xét các số thực x, y thỏa mãn $3^{x^2+y^2+1}\le\left(2x^2+2y^2-4x+3\right).9^x$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1}$ bằng $a\sqrt{113}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó $3a-b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $3^{x^2+y^2+1}\le\left(2x^2+2y^2-4x+3\right).9^x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^{x^2+y^2+1}}{9^x}\le 2x^2+2y^2-4x+3$

$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2x+1}\le 2x^2+2y^2-4x+3 \Leftrightarrow 3^{(x-1)^2+y^2}\le 2\left[(x-1)^2+y^2\right]+1 \quad (1)$

Đặt $u=(x-1)^2+y^2, u\ge 0$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 3^u\le 2u+1 \Leftrightarrow 3^u-2u-1\le 0\ \ (2)$.

Xét $f(u)=3^u-2u-1$ có $f'(u)=3^u.\ln 3-2 \Rightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\log_3\dfrac{2}{\ln 3}$.

Bảng biến thiên

u	0		$\log_3\left(\frac{2}{\ln 3}\right)$		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	0	$\searrow$	$-0,27$	$\nearrow$	$+\infty$

Mà $f(0)=f(1)=0 \Rightarrow f(u)\le 0 \Leftrightarrow 0\le u\le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

◉Khi đó tập hợp điểm $M(x;y)$ là hình tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow (2x+y+1)P=3x-4y \Leftrightarrow (2P-3)x+(P+4)y+P=0$.

◉Khi đó tập hợp điểm $M(x;y)$ là đường thẳng $(d):(2P-3)x+(P+4)y+P=0$.

Do vậy (d) và (C) có điểm chung khi và chỉ khi

$$d(I;(d))\le 1 \Leftrightarrow \frac{|2P-3+P|}{\sqrt{(2P-3)^2+(P+4)^2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 3|P-1|\le\sqrt{5P^2-4P+25}$$

$$\Leftrightarrow 9(P-1)^2\le 5P^2-4P+25$$

$$\Leftrightarrow 4P^2-14P-16\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{113}}{4}\le P\le\frac{7+\sqrt{113}}{4}.$$

Do đó $\max P=\dfrac{7+\sqrt{113}}{4}=\dfrac{1}{4}\sqrt{113}+\dfrac{7}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow 3a-b=-1$.

Câu 27. Cho x và y là các số thực không âm thỏa mãn $384.\,128^{x^2-2x}-6.8^y+6=3y-7x^2+14x$. Khi biểu thức $-3y+4x^2-2x+8$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $P=3x-2y$ bằng

A. 10. **B.** -22. **C.** 14. **D.** 2

Lời giải

Ta có :

$$384.\,128^{x^2-2x}-6.8^y+6=3y-7x^2+14x \Leftrightarrow 384.\,2^{7x^2-14x}+7x^2-14x=6.2^{3y}+3y-6$$

$$\Leftrightarrow 384.\,2^{7x^2-14x}+7x^2-14x=384.2^{3y-6}+3y-6$$

Xét hàm số $f(t)=384.2^t+t$ trên $\mathbb{R}$

Có $f'(t)=384.2^t.\ln 2+1>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)=384.2^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó

$$384.\,2^{7x^2-14x}+7x^2-14x=384.2^{3y-6}+3y-6\Leftrightarrow 7x^2-14x=3y-6\Leftrightarrow y=\frac{7x(x-2)}{3}+2$$

Ta có: $-3y+4x^2-2x+8=-7x^2+14x-6+4x^2-2x+8=-3x^2+12x+2$.

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+12x+2,\forall x>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đạt GTLN bằng 14 tại $x=2$

Khi đó: Tại $x=2$ thì $y=\dfrac{7x(x-2)}{3}+2=2$. Vậy $P=3x-2y=3.2-2.2=2$.

Câu 28. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $3^{x^4+1}=2(3y-x)+3.3^{81y^4}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để biểu thức $P=x^2+3(m^2-2025)y+2023$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 45. **B.** 0. **C.** 1035. **D.** 990.

Lời giải

Ta có: $3^{x^4+1}=2(3y-x)+3.3^{81y^4}\Leftrightarrow 3.3^{x^4}+2x=3.3^{81y^4}+2.3y\Leftrightarrow 3.3^{x^4}+2x=3.3^{(3y)^4}+2.(3y)$.

Xét hàm số $f(t)=3.3^{t^4}+2t\ (t>0)\Rightarrow f'(t)=12\ln 3.t^3.3^{t^4}+2>0\ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy: $3.3^{x^4}+2x=3.3^{(3y)^4}+2.(3y)\Leftrightarrow f(x)=f(3y)\Leftrightarrow x=3y$.

Khi đó: $P=x^2+3(m^2-2025)y+2023=x^2+(m^2-2025)x+2023=g(x)$.

Ta xét hàm số bậc hai $g(x)=x^2+(m^2-2025)x+2023$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó: $g'(x)=2x+m^2-2025=0\Leftrightarrow 2x+m^2-2025=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-m^2+2025}{2}$.

Để hàm $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $0<\dfrac{-m^2+2025}{2}\Leftrightarrow m^2<2025\Leftrightarrow -45<m<45$.

Khi đó: $S=\{1;2;3;4;.........;43;44\}$.

Tổng các phần tử của S bằng $1+2+3+4+......+44=\dfrac{(1+44).44}{2}=990$.

Câu 29. Cho x và y là các số thực không âm thỏa mãn $\log_2\left(y+\sqrt{y+2^x}\right)=2x$. Khi biểu thức $y-2^{x+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $y+2^x$ bằng?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{4}{25}$.

Lời giải

Ta có:

$\log_2\left(y+\sqrt{y+2^x}\right)=2x$

$\Leftrightarrow y+\sqrt{y+2^x}=2^{2x}$

$\Leftrightarrow y+2^x+\sqrt{y+2^x}=2^{2x}+2^x \Leftrightarrow f\left(\sqrt{y+2^x}\right)=f\left(2^x\right)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=2t+1>0\forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)=t^2+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $\sqrt{y+2^x}=2^x \Leftrightarrow y+2^x=2^{2x} \Leftrightarrow y-2^{x+2}=2^{2x}-2^x-2^{x+2} \Leftrightarrow y-2^{x+2}=2^{2x}-5.2^x$

Đặt $2^x=u, u>0$. Ta có: $y-2^{x+2}=g(u)=u^2-5u$

$Min(y-2^{x+2})=Min\, g(u) \Leftrightarrow u=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2^x=\frac{5}{2} \Rightarrow y+2^x=2^{2x}=\frac{25}{4}$.

Câu 30. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\log\frac{x+1}{3y+1}\ge 9y^4+6y^3-x^2y^2-2xy^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-2x-4y$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Với x và y là các số thực dương ta có:

$$\log\frac{x+1}{3y+1}\ge 9y^4+6y^3-x^2y^2-2xy^2 \Leftrightarrow \log\frac{xy+y}{3y^2+y}\ge\left(9y^4+6y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2xy^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(3y^2+y\right)\ge\left(3y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y)+(xy+y)^2\ge\log\left(3y^2+y\right)+\left(3y^2+y\right)^2 \quad (*)$$

+/ Xét hàm số $f(t)=\log t+t^2$ khoảng $(0;+\infty)$, có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 10}+2t>0,\ \forall t>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f(xy+y)\ge f\left(3y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y\ge 3y^2+y \Leftrightarrow x\ge 3y \Leftrightarrow x-3y\ge 0,\ \forall x,y>0$.

Ta có: $P = x^2 + y^2 - 2x - 4y$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = P + 5$.

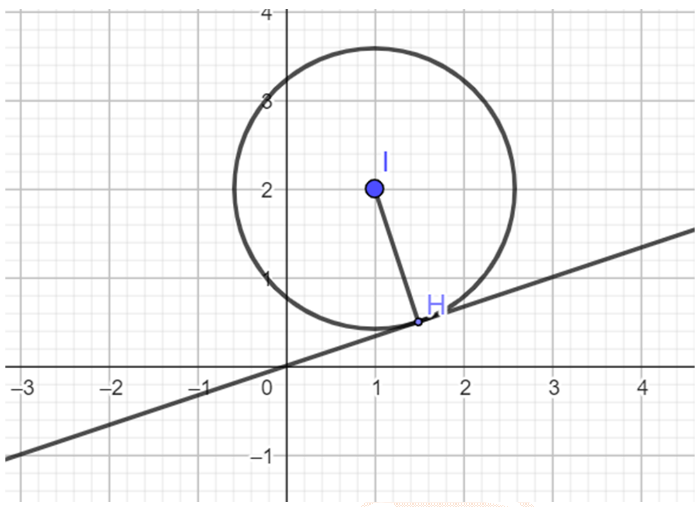
$P_{\min} \Leftrightarrow R = \sqrt{P_{\min} + 5} = d(I;\Delta)$

trong đó: $\Delta : x - 3y = 0,\ I(1;2)$.

$\sqrt{P_{\min} + 5} = \dfrac{|1-3.2|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Leftrightarrow P_{\min} = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{5}{2}$.



Câu 31. Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + xy - 4 = \log_2 \dfrac{x+4}{y+1}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2024;2024]$ để bất phương trình $4x + (5-m)y - 12 - 4m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi số thực dương x và y. Số phần tử của tập S là

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2026. **D.** 1013.

Lời giải

$\log_2 x + xy - 4 = \log_2 \dfrac{x+4}{y+1}$

$\Leftrightarrow \log_2 x + xy - 4 = \log_2(x+4) - \log_2(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(y+1) + xy = 4 + \log_2(x+4)$

$\Leftrightarrow \log_2(xy+x) + xy + x = x + 4 + \log_2(x+4) \qquad (1)$

+/ Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t\ (t>0) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0,\ \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy: $(1) \Leftrightarrow xy + x = x + 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{x}$.

Khi đó: $4x + (5-m)y - 12 - 4m \ge 0,\ \forall x,y > 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{4x+5y-12}{y+4},\ \forall x,y>0$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2-3x+5}{x+1},\ \forall x > 0 \Rightarrow m \le \min\limits_{(0;+\infty)} \dfrac{x^2-3x+5}{x+1}\ (2)$

+/ Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x+1},\ x>0$

Khi đó: $g'(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-4 & (l) \\ x=2 & (n) \end{array}\right.$

BBT

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT: $(2) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x>0} g(x)=1$

Do $\begin{cases} m \le 1 \\ m \in \mathbb{Z}, m \in [-2024;2024] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2024;-2023;...;1\}$

Câu 32. Cho các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

A. $\dfrac{21}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải

Ta có $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1} \ge 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \ge (3-2x)2^{3-2x}$ (1).

Xét trường hợp 1: $3-2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$.

(1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y \ge \dfrac{33}{4}$ (2).

Xét trường hợp 2: $3-2x>0 \Leftrightarrow 0 \le x < \dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t \ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow f(2y) \ge f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \ge 3-2x \Leftrightarrow y \ge \dfrac{3}{2}-x$

$\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y \ge x^2+\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2+4x+(3-2x)=2x^2-x+\dfrac{21}{4}$

$\Rightarrow P=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{41}{8} \ge \dfrac{41}{8}$ (3).

So sánh (2) và (3) ta có GTNN của P là $\dfrac{41}{8}$ khi $x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{5}{4}$.

Câu 33. Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(9x+18)+x-2y=9^y$.Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_3(9x+18)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_3(9x+18)+x-2y=9^y \Leftrightarrow \log_3(x+2)+x+2=2y+3^{2y}$

$\Leftrightarrow \log_3(x+2)+3^{\log_3(x+2)}=2y+3^{2y}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+3^t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+3^t\ln 3 \Rightarrow f'(t)>0 \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_3(x+2)=2y \Leftrightarrow x+2=3^{2y}$

Ta có $0\le x\le 2020$ nên $2\le x+2\le 2022$ suy ra $2\le 3^{2y}\le 2022$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3 2\le y\le \frac{1}{2}\log_3 2022$ mà $y\in\mathbb{Z}$ thì $y\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 3 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(7;1)$, $(79;2)$, $(727;3)$.

Câu 34. Cho phương trình $2^{(x+2)(2x+1)}.\ln\left[2(x+2)x+3\right]=2^{y+x^2+x+1}.\ln\sqrt{x^2+y+1}$ (1) với $y\ge 0$. Khi $2x^2-y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $S=y-x$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

(1) $\Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+2}.\ln\left(2x^2+4x+3\right)=2^{y+x^2+x}.\ln\left(x^2+y+1\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+2}.\ln\left(2x^2+4x+3\right)=2^{y+x^2}.2^x.\ln\left(x^2+y+1\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2+4x+2}.\ln\left(2x^2+4x+3\right)=2^{y+x^2}.\ln\left(x^2+y+1\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2+4x+3}.\ln\left(2x^2+4x+3\right)=2^{y+x^2+1}.\ln\left(x^2+y+1\right)$

Ta có: $\begin{cases}2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1\ge 1,\forall x\\ x^2+y+1\ge 1,\forall x\in\mathbb{R},y\ge 0\end{cases}$.

Xét $f(t)=2^t.\ln t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=2^t.\ln t.\ln 2+\frac{2^t}{t}>0,\forall t\ge 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Mà $f\left(2x^2+4x+3\right)=f\left(x^2+y+1\right)$

$\Rightarrow 2x^2+4x+3=x^2+y+1$

$\Rightarrow y=x^2+4x+2$

$\Rightarrow 2x^2-y=x^2-4x-2=(x-2)^2-6\ge -6$

$\Rightarrow \left(2x^2-y\right)_{\min}=-6$ khi $x=2 \Rightarrow y=14$.

$\Rightarrow S=12$.

Câu 35. Cho hai số thực dương $x;y$ thỏa mãn $3xy+4x+\log_3(xy+2x)^x=27$. Khi $P=\frac{2}{9}y+x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $x+y^2$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** $\frac{23}{9}$. **C.** 50. **D.** $\frac{433}{9}$.

Lời giải

Ta có: $3xy+4x+\log_3(xy+2x)^x=27 \Leftrightarrow 3xy+4x+x\log_3(xy+2x)=27$.

$\Leftrightarrow 3y+4+\log_3 x(y+2)=\frac{27}{x}$. $\Leftrightarrow 3(y+2)+\log_3 x+\log_3(y+2)=\frac{27}{x}+2$

$\Leftrightarrow 3(y+2)+\log_3(y+2)=\frac{27}{x}-\log_3 x+\log_3 9$. $\Leftrightarrow 3(y+2)+\log_3(y+2)=3.\frac{9}{x}+\log_3\frac{9}{x}$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=3t+\log_3 t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Có $f'(t)=3+\frac{1}{t\ln 3}>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên từ (1) ta suy ra: $\Leftrightarrow y+2=\frac{9}{x}$.

$P=\frac{2}{9}y+x^2=\frac{2}{9}\left(\frac{9}{x}-2\right)+x^2=\frac{2}{x}+x^2-\frac{4}{9}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+x^2-\frac{4}{9}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+x^2-\frac{4}{9}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.x^2}-\frac{4}{9}=3-\frac{4}{9}=\frac{23}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{x}=x^2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=9-2=7$. Khi đó $x+y^2=1+7^2=50$.

Ta chọn đáp án **C.**

Câu 36. Cho các số thực $x\ne 0, y>0$ thỏa mãn $\log_2\frac{y}{2x^2}+y^2=x^4-1$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để với mỗi m có đúng 3 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\frac{m}{2}\left(2^{y-2x}+2^{-y+4x}\right)=\frac{m^2}{4}+2^{2x}$. Tổng các phần tử trong S bằng

A. 49. **B.** 50. **C.** 51. **D.** 48.

Lời giải

+) Với $x\ne 0, y>0$, $\log_2\frac{y}{2x^2}+y^2=x^4-1 \Leftrightarrow \log_2 y+y^2=x^4+\log_2 x^2-1+\log_2 2$

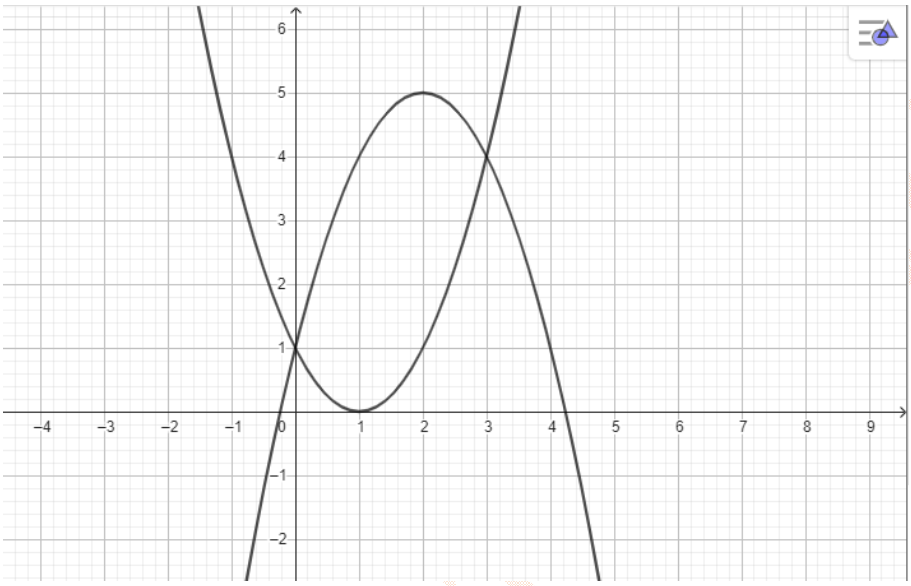
$\Leftrightarrow \log_2 y+y^2=\log_2 x^2+x^4 \Leftrightarrow f(y)=f(x^2)$ (1)

với $f(t)=\log_2 t+t^2$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $(1)\Leftrightarrow y=x^2$.

+) $\frac{m}{2}\left(2^{y-2x}+2^{-y+4x}\right)=\frac{m^2}{4}+2^{2x} \Leftrightarrow \left(2^{y-2x}-\frac{m}{2}\right)\left(2^{4x-y}-\frac{m}{2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2}=2^{y-2x}=2^{x^2-2x} \\ \frac{m}{2}=2^{4x-y}=2^{4x-x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-\log_2 m+1=0 \\ x^2-4x+\log_2 m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=\log_2 m \\ -x^2+4x+1=\log_2 m \end{array}\right.$$

+ Vẽ đồ thị hai parabol $(P_1): y=x^2-2x+1$ và $(P_2): y=-x^2+4x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



+ Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2)

$$\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ y=-x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \end{array}\right. \\ y=-x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

+ Để hệ có đúng 3 cặp số $(x;y)$ thì (*) có 3 nghiệm phân biệt khác 0. Từ đồ thị ta thấy

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 m=0 \\ \log_2 m=1 \\ \log_2 m=4 \\ \log_2 m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \\ m=16 \\ m=32 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{1;2;16;32\} \Rightarrow \sum m=51.$$

Câu 1: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2024a)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[6]{a}, t>0$, từ giả thiết ta có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3$

$\Leftrightarrow f(t)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$$f'(t)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\frac{2}{\ln 2}.\frac{1}{t}=\frac{(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t \geq 1$.

Xét $g(t) = (3\ln 2 - 2\ln 3)t^3 + (2\ln 2 - 2\ln 3)t^2 - 2\ln 3$

Ta có $g'(t) = 3\ln\frac{8}{9}t^2 + 2\ln\frac{4}{9}t = t\left(3\ln\frac{8}{9}t + 2\ln\frac{4}{9}\right)$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2\ln\left(\frac{9}{4}\right)}{3\ln\left(\frac{8}{9}\right)} \approx -4,59 < 0 \\ t = 0 \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ ta được:

t	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(t)$	$-$

Suy ra $g(t) \leq g(1) = 5\ln 2 - 6\ln 3 < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên khoảng $[1;+\infty)$.

Lại có $f(4) = 0$ nên $t = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Suy ra $f(t) > 0 \Leftrightarrow f(t) > f(4) \Leftrightarrow t < 4 \Leftrightarrow \sqrt[6]{a} < 4 \Leftrightarrow a < 4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a = 4095$.

Lúc đó $\log_2(2024a) \approx 22,9826$. Nên phần nguyên của $\log_2(2024a)$ bằng 22.

Câu 2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) = x+2y$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) = \log_3(3x+3y) + x + 2y - 1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + 2x + y + 1 = \log_3(3x+3y) + 3x + 3y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2x+y+1 = 3x+3y \Leftrightarrow x+2y = 1 \Leftrightarrow x = 1-2y$.

Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{2}$.

Xét $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $T \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{y(1-2y)}} = 3.\sqrt[3]{\frac{2}{2y(1-2y)}} \geq 3.\sqrt[3]{8} = 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y \\ 1-2y = \sqrt{y} \\ 2y = 1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 3: Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3\log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

A. $P_{\min} = 20$. **B.** $P_{\min} = 10$. **C.** $P_{\min} = 18$. **D.** $P_{\min} = 12$.

Lời giải

Ta có: $P = \dfrac{4}{2\log_{bc} a} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\log_{ac} b} + \dfrac{8}{\log_{ab} c} = 2\log_a bc + 2\log_b ac + 8\log_c ab$

$= 2\log_a b + 2\log_a c + 2\log_b a + 2\log_b c + 8\log_c a + 8\log_c b$

$= (2\log_a b + 2\log_b a) + (2\log_a c + 8\log_c a) + (2\log_b c + 8\log_c b)$.

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$P \geq 2\sqrt{2\log_a b.2\log_b a} + 2\sqrt{2\log_a c.8\log_c a} + 2\sqrt{2\log_b c.8\log_c b} = 4+8+8 = 20$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4\log_c a \\ \log_b c = 4\log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1$.

Vậy $P_{\min} = 20$.

Câu 4: Gọi x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1 + \log_{2y} x = \log_y x$ và $A = \dfrac{x}{y^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^3 - 4x^2 + x - 1$ **B.** $y = x^2 - 4x + 1$. **C.** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = x^4 - 18x^2 + 12$.

Lời giải

Ta có $1 + \log_{2y} x = \log_y x \Leftrightarrow 1 + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 (2y)} = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$

$\Leftrightarrow \log_2 y(1 + \log_2 y) + \log_2 x.\log_2 y = \log_2 x(1 + \log_2 y)$

$\Leftrightarrow \log_2 y + (\log_2 y)^2 + \log_2 x.\log_2 y = \log_2 x + \log_2 x.\log_2 y$

$\Leftrightarrow \log_2 y + (\log_2 y)^2 = \log_2 x$

Đặt $t = \log_2 y$, suy ra $\log_2 x = t^2 + t$

Khi đó ta có

$A = \dfrac{x}{y^3} \Rightarrow \log_2 A = \log_2 x - \log_2 y^3 = t^2 - 2t \geq -1$

Dấu "=" xảy ra khi $t = 1$ ứng với $x = 4; y = 2$. Suy ra $M(4;2)$.

Ta thấy $M(4;2)$ thuộc đồ thị của $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 5: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}+3$ **B.** $2+3\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{3}$ **D.** 9

Lời giải

Với $x>0, y>0$ ta có

$\log_2 x+\log_2 y+1\ge \log_2\left(x^2+2y\right) \Leftrightarrow \log_2 2xy \ge \log_2\left(x^2+2y\right)$

$\Leftrightarrow 2xy\ge x^2+2y \Leftrightarrow 2y(x-1)\ge x^2 \Leftrightarrow x-1\ge \dfrac{x^2}{2y}>0 \Rightarrow x>1$

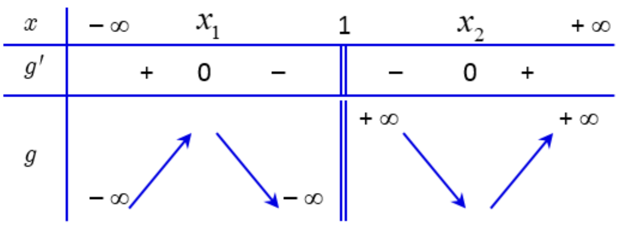
Đặt $m=x+2y$

Ta có $x(m-x)\ge x^2-x+m \Leftrightarrow m\ge \dfrac{2x^2-x}{x-1}$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}, x>1$

Ta có $g'(x)=\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<1 \\ x_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}>1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$



Xét sự biến thiên của hàm $g(x)$ trên $(1;+\infty)$

Ta có $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x)=g(x_2)=g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=3+2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

Vậy $m\ge 3+2\sqrt{2}$ Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $x+2y$ là $3+2\sqrt{2}$

Câu 6: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x+y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 16

Lời giải

Với $x>0, y>0$ ta có $\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)-\ln(x-y)$

$\Leftrightarrow \ln(xy)=\ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow xy = \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 xy = (x+y)^2 \ (1)$

Đặt $\begin{cases} u = x+y > 0 \\ v = xy > 0 \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (u^2 - 4v)v = u^2 \Leftrightarrow (v-1)u^2 = 4v^2$

Vì $v > 0$ nên $4v^2 > 0$. Do đó $(v-1).u^2 > 0$. Suy ra $v - 1 > 0$ hay $v > 1$.

Ta có

$(v-1)u^2 = 4v^2 \Leftrightarrow u^2 = \dfrac{4v^2}{v-1} = f(v), (v > 1)$

Ta có $f'(v) = \dfrac{8v(v-1) - 4v^2}{(v-1)^2} = \dfrac{4v(v-2)}{(v-1)^2}$

$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 2$ (vì $v > 1$)

Ta có bảng biến thiên

v	1		2		$+\infty$
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$	$+\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min(x+y) = \min u = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 2 \\ x > y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = 2-\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $x + y = 4$.

Câu 7: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y để tồn tại số thực $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$ thỏa mãn đẳng thức $y + x^2.9^y + \log_3 x = x\left(3^{x+y} + 1\right)$. Tổng các phần tử của S là

A. 36. **B.** 35. **C.** 28. **D.** 21.

Lời giải

Ta có $y + x^2.9^y + \log_3 x = x\left(3^{x+y}+1\right) \Leftrightarrow \left(x.3^y\right)^2 + \log_3\left(x.3^y\right) = x.3^y.3^x + \log_3 3^x$

$\Leftrightarrow x.3^y\left(x.3^y - 3^x\right) = \log_3 \dfrac{3^x}{x.3^y} \quad (*)$.

Nếu $x.3^y > 3^x \Rightarrow VT(*) > 0 > VP(*)$.

Nếu $x.3^y < 3^x \Rightarrow VT(*) < 0 < VP(*)$.

Nếu $x.3^y = 3^x \Rightarrow VT(*) = 0 = VP(*)$.

Vậy $3^y = \dfrac{3^x}{x} \Rightarrow y = x - \log_3 x$ mà $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$ nên $y \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Tổng các phần tử của S là 21.

Câu 8: Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $\log_2\sqrt{x^2+1}=2^{4y-1}-2x^2+2y-3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^4-4^{2y+2}$ bằng

A. $(0;+\infty)$. **B.** -9760. **C.** -1088. **D.** 2530.

Lời giải

Ta có $\log_2\sqrt{x^2+1}=2^{4y-1}-2x^2+2y-3 \Leftrightarrow 2\log_2\sqrt{x^2+1}=2^{4y}-4x^2+4y-6$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+1\right)=2^{4y}-4x^2+4y-6 \Leftrightarrow 2+\log_2\left(x^2+1\right)=2^{4y}-4\left(x^2+1\right)+4y$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+1\right)+\log_2 4\left(x^2+1\right)=2^{4y}+4y \Leftrightarrow 4\left(x^2+1\right)+\log_2 4\left(x^2+1\right)=t+\log_2 t$ (với $t=2^{4y}$)

Xét hàm số $f(u)=u+\log_2 u \Rightarrow f'(u)=1+\dfrac{1}{u\ln 2}>0$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

suy ra $t=4x^2+4 \Leftrightarrow 2^{4y}=4x^2+4$.

Vậy $T=x^4-4^{2y+2}=x^4-16.2^{4y}=x^4-16\left(4x^2+4\right)=x^4-64x^2-64=\left(x^2-32\right)^2-1088\geq -1088$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là -1088 khi $x^2=32$ và $y=\dfrac{1}{4}\log_2 132$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên $y\leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2}+\left(y+\ln x\right).e^{y+\ln x}\leq\left(x^3+x\right)e^y$?

A. 2023 **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2026

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

Ta có: $e^{x^2}+\left(y+\ln x\right).e^{y+\ln x}\leq\left(x^3+x\right).e^y$

Chia 2 vế cho $e^y.x$ ta được

$\dfrac{e^{x^2-y}}{x}+y+\ln x\leq x^2+1 \Leftrightarrow e^{x^2-y-\ln x}-\left(x^2-y-\ln x\right)\leq 1$.

Mà $e^{x^2-y-\ln x}-\left(x^2-y-\ln x\right)\geq 1$ vì $e^t\geq t+1$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Từ đó suy ra $x^2-y-\ln x=0\Rightarrow y=x^2-\ln x=f(x)$.

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (vì $x>0$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y\geq\dfrac{1}{2}-\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx 0,85$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của y thỏa bất phương trình đã cho.

Câu 10: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2020^{2019\left(x^2-y+4\right)}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$. Khi biểu thức $y-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x-2y$ bằng

A. -6. **B.** -7. **C.** -8. **D.** -9.

Lời giải

Ta có $2020^{2019\left(x^2-y+4\right)}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019\left[(x+2)^2-(4x+y)\right]}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2}(x+2)^2=2020^{2019(4x+y)}(4x+y)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2020^{2019t}t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2020^{2019t}+2020^{2019t}t\ln 2020^{2019}>0$, $\forall t>0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y \Leftrightarrow y=x^2+4$.

Nên $P=y-2x=x^2+4-2x=(x-1)^2+3\geq 3$.

$\min P=3$ khi $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$

Vậy $x-2y=1-2.5=-9$.

Câu 11: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_2(4y+4)-x=1+2^x-y$. Khi biểu thức $y+2^x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x+2^y$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$\log_2(4y+4)+y=x+1+2^x \Leftrightarrow \log_2 4+\log_2(y+1)+y=x+1+2^x$

$\Leftrightarrow \log_2(y+1)+(y+1)=2^x+x$

$\Leftrightarrow \log_2(y+1)+(y+1)=\log_2 2^x+2^x$ (1)

Xét hàm số $f(u)=\log_2 u+u$, với $u\geq 1$.

Ta có $f'(u)=1+\dfrac{1}{u\ln 2}>0$ với $u\geq 1 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow y+1=2^x \Leftrightarrow y=2^x-1$.

Nên $P=y+2^x=2.2^x-1\geq 1$.

$\min P=1$ khi $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

Vậy $x+2^y=0+2^0=1$.

Câu 12: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Lời giải

Ta có: $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=125-\left[(x+2)-3\right](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(y+1)\right]=\dfrac{125}{y+1}-\left[(x+2)-3\right]$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+\log_5(y+1)=\frac{125}{y+1}-(x+2)+3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\frac{125}{y+1}+\log_5(y+1)^{-1}+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\frac{125}{y+1}+\log_5\left(\frac{1}{y+1}\right)+\log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\log_5\left(\frac{125}{y+1}\right)+\frac{125}{y+1}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+t$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 5}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+2=\frac{125}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\frac{125}{y+1}-2$

Nên $P=x+5y=\frac{125}{y+1}-2+5y=\frac{125}{y+1}+5(y+1)-7\geq 2\sqrt{\frac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)}-7=43,\forall y\geq 0$.

$\min P=43$ khi $\frac{125}{y+1}=5(y+1)\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=23$

Vậy $5x+y=5.23+4=119$.

Câu 13: Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\leq x,y\leq 1$ và $\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(1-xy)+xy+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)(*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 t+t$ trên $(0;2)$

$f'(t)=\frac{1}{t}\ln 3+1>0,\forall t\in(0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x+y=1-xy\Leftrightarrow y(1+x)=1-x\Leftrightarrow y=\frac{1-x}{1+x}$

$P=2x+y=2x+\frac{1-x}{1+x}$

$P'(x)=2-\frac{2}{(1+x)^2}\geq 0,\forall x\in[0;1]$

Suy ra $\min P=P(0)=1$ đạt được khi $x=0,y=1$.

Câu 14: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$

.

Lời giải

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)=\log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5\left[5(a+b)\right]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x)=\log_5 x+x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x.\ln 5}+1>0, \forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5)=f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5=5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

Mặt khác: $5^2=(a+3b)^2 \le (1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T=a^2+b^2 \ge \frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{2}; b=\frac{3}{2}$.

Câu 15: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$ **B.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$

C. $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{9}$ **D.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{9}$

Lời giải

Điều kiện $\frac{1-y}{x+3xy}>0 \Rightarrow 1-y>0 \Leftrightarrow y<1$. Vậy điều kiện xác định của bài toán là: $x>0; 0<y<1$.

Ta có: $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=\frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y}=(3xy+x).3^{3xy+x}$ (*)

Xét $f(t)=t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0$ với $\forall t>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y)=f(3xy+x)$ với $3-3y>0, 3xy+x>0$ nên $3-3y=3xy+x \Leftrightarrow y=\frac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P=x+y=x+\frac{3-x}{3(x+1)}=(x+1)+\left(\frac{3-x}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}$

$P=(x+1)+\frac{4}{3(x+1)}-\frac{4}{3} \ge 2\sqrt{(x+1).\frac{4}{3(x+1)}}-\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{4}{3(x+1)} \\ y = \dfrac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}$.

Câu 47: **(Đề TK BGD 2024)** Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=2|z|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 1. Giá trị lớn nhất của $P=|z+w-1+2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\overline{z}.w=1+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{1+bi}=1-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=2$.

Ta có:

$$|z-w|=2\Rightarrow 4=|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$$

$$=|z|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+|w|^2-2=|w|^2-1\Rightarrow |w|=\sqrt{5}$$

$$|z+w|^2=(z+w).\left(\overline{z+w}\right)=(z+w).\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=|z|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+5+2=8\Rightarrow |z+w|=2\sqrt{2}$$

Khi đó: $P=|z+w-1+2i|=|(z+w)+(-1+2i)|\le |z+w|+|-1+2i|=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 47

Câu 1: Xét các số phức z,w thoả mãn $|z|=\sqrt{5}$; $|w|=2\sqrt{10}$; $|2z-3w|=2\sqrt{65}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|2z+w+3-2i|$?

A. $10+\sqrt{13}$. **B.** $10-\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{5}+\sqrt{13}$. **D.** 13.

Câu 2: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 3: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=3\sqrt{2}$ và $\dfrac{z_1}{z_2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|^2+25|z_2|^2$ là

A. 164. **B.** 160. **C.** 196. **D.** 225.

Câu 4: Cho số thực z_1 và số phức z_2 thoả mãn $|z_2-2i|=1$ và $\dfrac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính $T=m+n$.

A. $T=4$. **B.** $T=4\sqrt{2}$. **C.** $T=3\sqrt{2}+1$. **D.** $T=\sqrt{2}+3$.

Câu 5: Xét hai số phức z,w thỏa mãn $\left|z+i.\overline{w}\right|=2|z|=4$ và $z.w$ là số thực. Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w+1+i|$. Giá trị $M+n$ bằng?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z-i|=1,|z|=|w|$ và $z.w$ là số phức thuần ảo với phần ảo dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w-4-4i|$ bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** 6. **C.** 4. **D.** $\sqrt{35}$.

Câu 7: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{13}$, $|w|=5$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 7. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+w+7i-24|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(10;20)$. **B.** $(21;30)$. **C.** $(31;40)$. **D.** $(41;50)$.

Câu 8: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}$, và số phức $z.\overline{w}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z-w+5-i|$ là

A. $(1;5)$. **B.** $(5;10)$. **C.** $(10;15)$. **D.** $(15;20)$.

Câu 9: Xét hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=2,|iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2-wz-4|$ bằng.

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

Câu 10: Xét hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1|=|z_2|=2$ và $|2z_1-3z_2|=2\sqrt{7}$. Giá trị lớn nhất của $|2z_1-z_2+2-3i|$ bằng

A. $\sqrt{12}+3$. **B.** $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{13}-\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{13}+\sqrt{12}$.

Câu 11: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{10}$, $|z|=3$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+w+1+3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(10;12)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $(3;6)$.

Câu 12: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{7},|\text{w}|=\sqrt{2}$, và số phức $z.\overline{w}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z-w+1-i|$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;8)$.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z^2|$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3+4i|$ bằng

A. $\sqrt{41}+2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{41}+\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{41}-\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{41}+\sqrt{2}$.

Câu 14: Gọi z_1,z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-i+3z-3|=2\sqrt{10}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. (3;4). **B.** (2;3). **C.** (4;5). **D.** (1;2).

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{3z-15+2i}{i}\right|=|1-3i|$. Khi đó giá trị lớn nhất của $P=2|z-i|-|z-3|$ thuộc khoảng

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(10;11)$.

Câu 16: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+2+2i|=1$ và $|w-1+2i|=|w-3i|$. Khi $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính $|w|$.

A. $\frac{11\sqrt{13}}{13}$. **B.** 7. **C.** $\sqrt{130}$. **D.** $\frac{\sqrt{130}}{13}$.

Câu 17: Cho hai số phức z,w thoả $|z|=1;|w|=4$ và $z.\overline{w}+w.\overline{z}+8=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z-i}{w+3i}\right|$. Tính giá trị $m-7M$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 18: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-2|=1$; gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-3|+|z+1|$. Khi đó giá trị của $M+m$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(10;12)$. **C.** $(11;13)$. **D.** $(7;9)$.

Câu 19: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=5$; $|z|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ là số phức có phần thực bằng 3. Giá trị lớn nhất của $P=|z-w-6+8i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;10)$. **B.** $(11;13)$. **C.** $(13;15)$. **D.** $(7;9)$.

Câu 20: Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2-z_1|=2\sqrt{2}$, và $z_1.\overline{z_2}$ có phần thực bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của $A=|z_1+z_2-1-i|$.

A. $2\sqrt{3}+2$. **B.** $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Câu 21: Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$, và $a.b\ge 0$. Hai số phức z_1,z_2 thuộc tập S sao cho $\frac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+2i|+|z_2|$ bằng:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $1+\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Câu 22: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|\overline{z+w}|=5$; $|\overline{z}|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-w-8+6i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;9)$.

Câu 23: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|\overline{z-w}|=3$; $|z|=1$ và số phức $\frac{z}{w}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P=|z+w+3+4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;10)$. **B.** $(10;12)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 24: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=4,|z+i\overline{w}|=5$ và zw là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w+i|$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 25: Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|\overline{z+2w}\right|=10;\left|\overline{z}\right|=1$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-w+3-4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Câu 26: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 27: Cho các số phức w,z thỏa mãn $|\mathrm{w}-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$ là

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$ **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 28: Xét các số phức thỏa mãn $|z|=|w|=2$ và $|z-2w|=4$. Giá trị lớn nhất của $P=|2z+3w-3+4i|$ là:

A. 3 **B.** 8 **C.** 13 **D.** 5

Câu 29: Xét các số phức thỏa mãn $|u|=2,|v|=4$. Giá trị lớn nhất của $P=|u+2v|+|u-v|$ là:.

A. $9\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{14}$. **C.** $2\sqrt{43}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{2}$ và $\left|\overline{z}+4+4i\right|+|w|=3\sqrt{2}$. Khi biểu thức $P=|w+1+2i|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|w+2-i|$ bằng.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1+2+8i|=2\sqrt{5}$ và $|z_2+3+5i|=|z_2-1-3i|$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|+|z_2-3+i|+|z_2+3+4i|$ bằng.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Câu 32: Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 33: Cho z và w là các số phức thỏa mãn các điều kiện $w(z+1)+iz-1=0$ và điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn $x^2+y^2=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|w+1-2i|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 34: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-3-5i|=3$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2+1+2i|=|z_2+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-1-2i|$.

A. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tỉ số $\frac{M}{m}$ được xác định bởi công thức nào dưới đây?

A. $\frac{M}{m}=3$. **B.** $\frac{M}{m}=\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{M}{m}=2$.

Câu 36: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|\overline{z}-2+3i|$, số phức z_0 có mô đun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 37: Cho tất cả các số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2\mathrm{i}-1|=|z+\mathrm{i}|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $\mathrm{P}=2x+3y$.

A. 9 **B.** 11 **C.** -3 **D.** 5

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 39: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(15;16)$. **D.** $(14;15)$.

Câu 40: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|\overline{z+w}|=10;|\overline{z}|=1$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-w+3-4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Câu 41: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=2|\overline{z}|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P=|z+w+2-3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+3i|=\sqrt{2}$ và biểu thức $T=|z+7+2i|^2+|z-1-6i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S=|z-(2023-2024i)|$

A. $2020\sqrt{2}$. **B.** $2021\sqrt{2}$. **C.** $2022\sqrt{2}$. **D.** $2023\sqrt{2}$.

Câu 43: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 44: Cho các số phức w,z thỏa mãn $|\mathrm{w}-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$ là

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$ **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Khi đó modun của số phức $\mathrm{w}=M+mi$

A. $2\sqrt{314}$. **B.** $\sqrt{1258}$. **C.** $3\sqrt{137}$. **D.** $2\sqrt{309}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{7}-4$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Câu 47: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2|w|=2$. Biết $P=|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $|z-\mathrm{w}|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 48: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=3,|z_1|=2$ và số phức $\dfrac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1+z_2-3+2i|$ bằng

A. $3+\sqrt{2}$. **B.** $3+\sqrt{13}$. **C.** $3+\sqrt{5}$. **D.** $5+\sqrt{3}$.

Câu 49: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=|z_1|=3$ và số phức $\overline{z_1}z_2$ có phần thực bằng $\dfrac{9}{2}$. Giá trị lớn nhất của $P=|2z_1+z_2+1-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{7}+\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$. **D.** $6\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Câu 50: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2 - 1| = 3|z_1 - i| = 3$ và số phức $(\overline{z_1} + i)(z_2 + 1 - i)$ có phần thực bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1 + 2z_2 + 3 - i|$ bằng

A. $\sqrt{69} + \sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{69} - \sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{69}}{2} + \sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{69}}{2} - \sqrt{10}$.

Câu 51: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = 2|z| = 4$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P = |z - w + 3 - 4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(7;8)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Câu 52: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z - w| = 2|z| = 6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 3. Giá trị lớn nhất của $P = |2z + 2w - 1 + 3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(10;12)$.

Câu 53: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = 3|z| = 6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 4. Giá trị lớn nhất của $P = |3z - 3w + 2 - i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

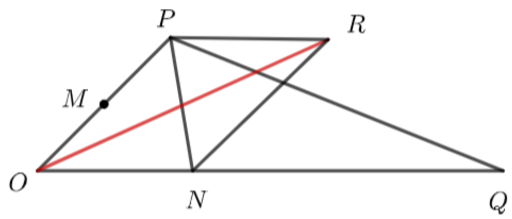
A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(18;20)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Xét các số phức z, w thoả mãn $|z|=\sqrt{5}; |w|=2\sqrt{10}; |2z-3w|=2\sqrt{65}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|2z+w+3-2i|$?

A. $10+\sqrt{13}$. **B.** $10-\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{5}+\sqrt{13}$. **D.** 13.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, khi đó $|z|=|\overrightarrow{OM}|=OM=\sqrt{5}$

Và N là điểm biểu diễn số phức w, khi đó $|w|=|\overrightarrow{ON}|=ON=2\sqrt{10}$

P,Q lần lượt là điểm biểu diễn số phức $2z,3w$; khi đó

$|2z|=|\overrightarrow{OP}|=OP=2\sqrt{5}$; $|3w|=|\overrightarrow{OQ}|=OQ=6\sqrt{10}$

$|2z-3w|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=QP=2\sqrt{65}$; $|2z+w|=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{OR}|=OR$

Ta có $\cos\widehat{POQ}=\dfrac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2.OP.OQ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{POQ}=45^o$

Do $OPRN$ là hình bình hành nên $\widehat{OPR}=135^0$.

Trong tam giác OPR, ta có

$OR^2=OP^2+PR^2-2.OP.PR.\cos\widehat{OPR}=\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2-2.2\sqrt{5}.2\sqrt{10}.\cos135^0=100$

$\Rightarrow OR=10$

Lúc đó $P=|2z+w+3-2i|\le|2z+w|+|3-2i|\Leftrightarrow P\le OR+\sqrt{13}=10+\sqrt{13}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $10+\sqrt{13}$.

Câu 2: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-3+\sqrt{3}i|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$ bằng

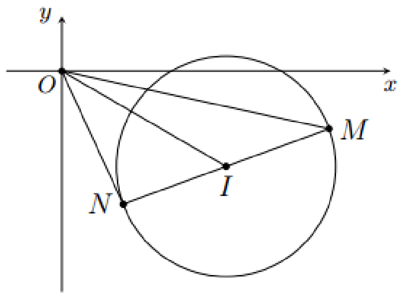
A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Ta có $\begin{cases}|z_1-3+\sqrt{3}i|=|z_2-3+\sqrt{3}i|=2\\|z_1-z_2|=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M,N\in(C):(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2\\MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $OI=\sqrt{12}$.



Ta có $P=|z_1|+|z_2|=1.OM+1.ON\le\sqrt{(1+1)\left(OM^2+ON^2\right)}=\sqrt{2\left(2OI^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$

Giá trị lớn nhất của P bằng 8.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 3: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=3\sqrt{2}$ và $\dfrac{z_1}{z_2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|^2+25|z_2|^2$ là

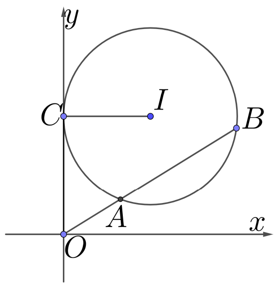
A. 164. **B.** 160. **C.** 196. **D.** 225.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

Ta có: $|(1+i)z+1-7i|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow|z-3-4i|=3$.

Vì $\dfrac{z_1}{z_2}=k\in\mathbb{R}$ nên O, A, B thẳng hàng như hình vẽ.



Ta có: $OA.OB=OC^2\Rightarrow OA.OB=4^2=16\Rightarrow OA=\dfrac{16}{OB}$.

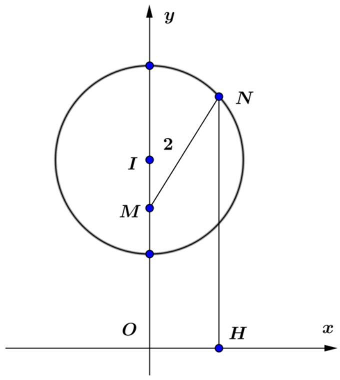
Ngoài ra, $P=OA^2+25OB^2=\dfrac{16^2}{OB^2}+25OB^2\xrightarrow{t=OB^2\in[4,64]}g(t)=\dfrac{16^2}{t}+25t$.

Vậy $\min\limits_{[6;64]}g(t)=164$.

Câu 4: Cho số thực z_1 và số phức z_2 thoả mãn $|z_2-2i|=1$ và $\dfrac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính $T=m+n$.

A. $T=4$. **B.** $T=4\sqrt{2}$. **C.** $T=3\sqrt{2}+1$. **D.** $T=\sqrt{2}+3$.

Lời giải



Gọi M , N lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2.

Theo giả thiết $M \in Ox$ và $N \in (C): x^2 + (y-2)^2 = 1$ có tâm $I(0,2)$ và bán kính $R = 1$.

Với $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực suy ra $z_2 - z_1 = k(1+i)$ $(k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u} = (1,1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên Ox ,

Ta có: $MN = \frac{NH}{\sin \widehat{NMH}} = \frac{NH}{\left|\sin\left(\vec{i}, \vec{u}\right)\right|} = \frac{NH}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}NH$.

Do đó, $d(I, Ox) - R \le NH \le d(I, Ox) + R \Leftrightarrow 2 - 1 \le NH \le 2 + 1 \Rightarrow MN = |z_2 - z_1| \in \left[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right]$.

Vậy $T = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Câu 5: Xét hai số phức z, w thỏa mãn $|z + i.\overline{w}| = 2|z| = 4$ và $z.w$ là số thực. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w + 1 + i|$. Giá trị $M + n$ bằng?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases} |z + i.\overline{w}| = 4 \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow z \ne 0$.

Ta có $z.w = k \in \mathbb{R} \Rightarrow w = \frac{k}{z} = \frac{k.\overline{z}}{|z|^2} = \frac{k.\overline{z}}{4} \Rightarrow \overline{w} = \frac{k.z}{4}$ và $|w| = |\overline{w}| = \left|\frac{k.z}{4}\right| = \left|\frac{k}{2}\right|$

Lại có $4 = |z + i.\overline{w}| = \left|z + i.\frac{k.z}{4}\right| = |z|\left|1 + \frac{k}{4}i\right| = 2\left|1 + \frac{k}{4}i\right| \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{k}{4}\right)^2} = 2 \Leftrightarrow k = \pm 4\sqrt{3}$

Lúc đó $\left||w| - |1+i|\right| \le |w + 1 + i| \le |w| + |1+i| \Leftrightarrow \left|\left|\frac{4\sqrt{3}}{2}\right| - \sqrt{2}\right| \le |w + 1 + i| \le \left|\frac{4\sqrt{3}}{2}\right| + \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} M = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ n = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M + n = 4\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức: $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i, (a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$

Dấu "=" xảy khi và chỉ khi:

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2=a_2b_1 \\ a_1a_2+b_1b_2 \ge 0 \end{cases}$; $|z_1|-|z_2|=|z_1+z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2=a_2b_1;\ |z_1|\ge|z_2| \\ a_1a_2+b_1b_2 \le 0 \end{cases}$

Câu 6: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z-i|=1, |z|=|w|$ và $z.w$ là số phức thuần ảo với phần ảo dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w-4-4i|$ bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** 6. **C.** 4. **D.** $\sqrt{35}$.

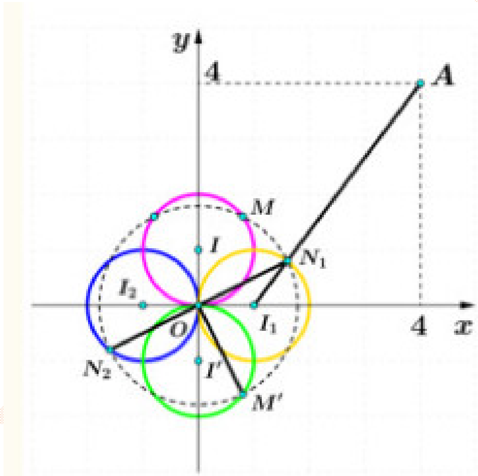
Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ và $w=x+yi, (a;b;x;y\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-i|=1$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

$z.w=ax-bi+(ay+bx)i$ thuần ảo với phần ảo dương $\begin{cases} ax-by=0 \\ ay+bx>0 \end{cases}$

Gọi $M'(a;-b)$ là điểm đối xứng của M qua Ox, lúc đó M' thuộc đường tròn tâm $I'(0;-1)$, bán kính $R'=1$



Lúc đó $ax-by=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{ON}=0 \Leftrightarrow \widehat{NOM'}=90^o$

Ta thấy khi M di động trên đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính bằng 1 thì M' di động trên đường tròn tâm $I'(0;-1)$, bán kính bằng 1 và N di động trên 2 đường tròn tâm $I_1(1;0), I_2(-1;0)$ có cùng bán kính $R=1$.

TH1: N di động trên đường tròn tâm $I_1(1;0)$, bán kính $R=1$

Ta có $P=|w-4-4i|=NA, A(4;4)$; $P_{\min}=I_1A-1=4$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}$ và $\begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ thỏa điều kiện $ay+bx>0$.

TH2: N di động trên đường tròn $I_2(-1;0)$, bán kính $R=1$

Ta có $P=|w-4-4i|=NA, A(4;4)$; $P_{\min}=I_2A-1=\sqrt{41}-1>4$

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Câu 7: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{13}$, $|w|=5$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 7. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+w+7i-24|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(10;20)$. **B.** $(21;30)$. **C.** $(31;40)$. **D.** $(41;50)$.

Lời giải

Gọi $z=a_1+b_1i$; $w=a_2+b_2i$ với $a_1;b_1;a_2;b_2\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$|w|=5\Leftrightarrow a_2^2+b_2^2=25$.

$\overline{z}.w=(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)$ có phần thực $a_1a_2+b_1b_2=7$.

$$\begin{aligned}|z-w|=\sqrt{13}&\Leftrightarrow|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|=\sqrt{13}\\&\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=13\\&\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2(a_1a_2+b_1b_2)=13\\&\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+25-2.7=13\\&\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2=2.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}A=|z+w+7i-24|\le|z+w|+|7i-24|&=|(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i|+25\\&=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}+25\\&=\sqrt{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2(a_1a_2+b_1b_2)}+25\\&=\sqrt{2+25+2.7}+25=\sqrt{41}+25\approx31,4.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|z+w+7i-24|=|z+w|+|7i-24|$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a_1+a_2).7=(-24).(b_1+b_2)\\(a_1+a_2).(-24)+(b_1+b_2).7\ge0\end{cases}$$

Vậy $\max A=\sqrt{41}+25\approx31,4$, chọn C.

Câu 8: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}$, và số phức $z.\overline{w}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z-w+5-i|$ là

A. $(1;5)$. **B.** $(5;10)$. **C.** $(10;15)$. **D.** $(15;20)$.

Lời giải

Gọi $z=a_1+b_1i$; $w=a_2+b_2i$ với $a_1;b_1;a_2;b_2\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2=2$.

$\overline{z}.w=(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)$ là số thuần ảo nên $a_1a_2+b_1b_2=0$

$$\begin{aligned}|z+w|=\sqrt{10} &\Leftrightarrow |(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i|=\sqrt{10}\\ &\Leftrightarrow (a_1+a_2)^2+(b_1-b_2)^2=10\\ &\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2(a_1a_2+b_1b_2)=10\\ &\Leftrightarrow 2+a_2^2+b_2^2+2.0=10\\ &\Leftrightarrow a_2^2+b_2^2=8.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}A=|z-w+5-i| &\le |z-w|+|5-i|\\ &=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|+\sqrt{26}\\ &=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}+\sqrt{26}\\ &=\sqrt{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2(a_1a_2+b_1b_2)}+\sqrt{26}\\ &=\sqrt{2+8}+\sqrt{26}=\sqrt{10}+\sqrt{26}\approx 8,26\end{aligned}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $|z-w+5-i|=|z-w|+|5-i|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a_1-a_2).(-1)=5.(b_1-b_2)\\(a_1-a_2).5+(b_1-b_2).(-1)\ge 0\end{cases}$$

Vậy $\max A=\sqrt{10}+\sqrt{26}\approx 8,26$, chọn B.

Câu 9: Xét hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=2, |iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2-wz-4|$ bằng.

A. 4. **B.** $2(\sqrt{29}-3)$. **C.** 8. **D.** $2(\sqrt{29}-5)$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}; \mathrm{w}=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$ có điểm biểu diễn lần lượt là M,N.

Ta có

$|z|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$. Suy ra M nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R_1=2$

Ta có $|iw-2+5i|=1\Leftrightarrow |i(a+bi)-2+5i|=1\Leftrightarrow |ai-b-2+5i|=1\Leftrightarrow |-b-2+ai+5i|=1$

$\Leftrightarrow (a+5)^2+(b+2)^2=1$.

Suy ra N nằm trên đường tròn tâm $I(-5;-2)$ bán kính $R_2=1$

Đặt

$T=|z^2-\mathrm{w}z-4|=|z^2-\mathrm{w}z-z\bar{z}|=|z(z-\mathrm{w}-\bar{z})|=|z(2yi-\mathrm{w})|=|z||\mathrm{w}-2yi|=2NA$ với $A(0;2y)$

Lại có

$NA\ge |IA-R_2|\Leftrightarrow NA\ge\left|\sqrt{(0+5)^2+(2y+2)^2}-1\right|\Leftrightarrow NA\ge\left|\sqrt{25+4(y+1)^2}-1\right|$

Ta có $x^2+y^2=4\Rightarrow -2\le y\le 2\Rightarrow (y+1)^2\ge 0$

Do đó

$$NA\ge\left|\sqrt{25+4(y+1)^2}-1\right|\Rightarrow MA\ge\left|\sqrt{25+4.0}-1\right|\Rightarrow MA\ge 4\Rightarrow T\ge 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2-wz-4\right|$ bằng 8.

Câu 10: Xét hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1|=|z_2|=2$ và $|2z_1-3z_2|=2\sqrt{7}$. Giá trị lớn nhất của $|2z_1-z_2+2-3i|$ bằng

A. $\sqrt{12}+3$. **B.** $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{13}-\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{13}+\sqrt{12}$.

Lời giải

Đặt $w_1=2z_1, w_2=3z_2\ \Rightarrow\begin{cases}|w_1|=2|z_1|=4\\|w_2|=3|z_2|=6\\|w_1-w_2|=2\sqrt{7}\end{cases}$.

Có $|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=2\left(|w_1|^2+|w_2|^2\right)$

$\Rightarrow |w_1+w_2|^2=2\left(|w_1|^2+|w_2|^2\right)-|w_1-w_2|^2=2\left(4^2+6^2\right)-\left(2\sqrt{7}\right)^2=76$.

Ta có: $|2z_1-z_2+2-3i|\le|2z_1-z_2|+|2-3i|=|2z_1-z_2|+\sqrt{13}$.

Mặt khác:

$|2z_1-z_2|=\frac{1}{3}|6z_1-3z_2|=\frac{1}{3}|3w_1-w_2|=\frac{1}{3}|2w_1+(w_1-w_2)|$

$\Rightarrow|2z_1-z_2|^2=\frac{1}{9}|2w_1+(w_1-w_2)|^2=\frac{1}{9}\left[2\left(|2w_1|^2+|w_1-w_2|^2\right)-|w_1+w_2|^2\right]$

$=\frac{1}{9}\left[2(64+28)-76\right]=12$

$\Rightarrow|2z_1-z_2|=2\sqrt{3}\ \Rightarrow|2z_1-z_2+3-2i|\le 2\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

Vậy GTLN của $|2z_1-z_2+3-2i|$ bằng $2\sqrt{3}+\sqrt{13}=\sqrt{12}+\sqrt{13}$.

Câu 11: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{10}$, $|z|=3$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+w+1+3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(10;12)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $(3;6)$.

Lời giải

+ $|z-w|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|z-w|^2=10\Leftrightarrow(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=10$

Ta được:

$(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=10 \Leftrightarrow |z|^2+|w|^2-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=10 \Leftrightarrow 9+|w|^2-4=10 \Rightarrow |w|=\sqrt{5}$

$+|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})=|z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=9+5+4=18$

Suy ra: $|z+w|=3\sqrt{2}$

Ta có: $A=|z+w+1+3i|\le|z+w|+|1+3i|=3\sqrt{2}+\sqrt{10}\approx 7,4$

Vậy $\max A=3\sqrt{2}+\sqrt{10}\approx 7,4$.

Câu 12: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{7},|w|=\sqrt{2}$, và số phức $z.\overline{w}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z-w+1-i|$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;8)$.

Lời giải

$+z.\overline{w}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow z.\overline{w}+\overline{z}.w=0$

$+\ |z+w|=\sqrt{7} \Leftrightarrow |z+w|^2=7 \Leftrightarrow (z+w)(\overline{z+w})=7$

Ta được:

$(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=7 \Leftrightarrow |z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=7 \Leftrightarrow |z|^2+2+0=7 \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$

$+|z-w|^2=(z-w)(\overline{z-w})=|z|^2+|w|^2-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=5+2=7$

Suy ra: $|z-w|=\sqrt{7}$

Ta có: $A=|z-w+1-i|\le|z-w|+|1-i|=\sqrt{7}+\sqrt{2}\approx 4,05$

Vậy $\max A=\sqrt{7}+\sqrt{2}\approx 4,05$.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z^2|$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3+4i|$ bằng

A. $\sqrt{41}+2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{41}+\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{41}-\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{41}+\sqrt{2}$.

Lời giải

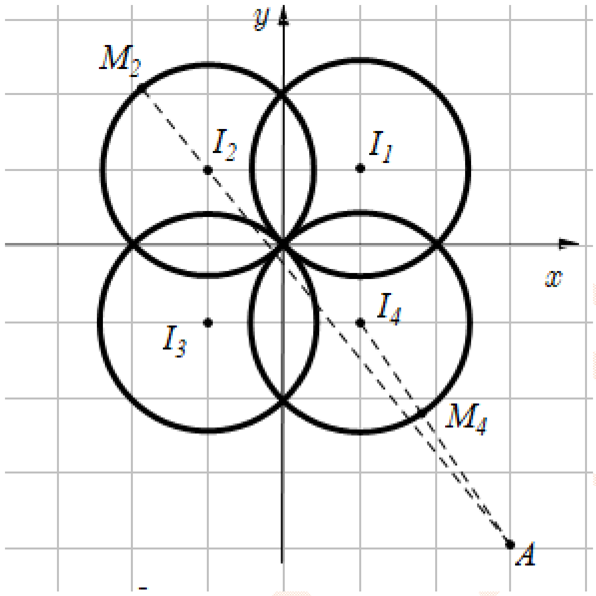
Gọi $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ có $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $\overline{z}=x-yi$ và $z^2=x^2-y^2+2xyi$ nên

$$|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z^2| \Leftrightarrow 2|x|+2|y|=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$\Leftrightarrow 2|x|+2|y|=x^2+y^2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+(|y|-1)^2=2$. Từ đó suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các đường tròn có tâm $I_1(1;1), I_2(-1;1), I_3(-1;-1), I_4(-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Khi đó, $P=|z-3+4i|=MA$, với $A(3;-4)$ thuộc góc phần tư thứ tư.



Có MA lớn nhất $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ khi đó $MA_{\max}=AI_2+R=\sqrt{41}+\sqrt{2}.$

Có MA nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (C_4) có tâm $I_4(1;-1)$ khi đó $MA_{\min}=AI_4-R=\sqrt{13}-\sqrt{2}.$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-3+4i|$ bằng $\sqrt{41}+\sqrt{13}.$

Câu 14: Gọi z_1, z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-i+3z-3|=2\sqrt{10}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Ta có $|iz-i+3z-3|=2\sqrt{10} \Leftrightarrow |(i+3)(z-1)|=2\sqrt{10} \Leftrightarrow |z-1|=2$.

Gọi M là điểm biểu diễn của z ta có M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(1;0)$, $R=2$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho z_1, z_2 ta có $|z_1-z_2|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB=2\sqrt{2}.$

Gọi H là trung điểm AB ta có tam giác IAB vuông tại $I \Rightarrow IH=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ H chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R_1=\sqrt{2}.$

Ta có $P=|z_1|+|z_2|=OA+OB\le\sqrt{2\left(OA^2+OB^2\right)}.$

Mặt khác theo công thức độ dài đường trung tuyến, ta có $OA^2+OB^2=2OH^2+\dfrac{AB^2}{2}=2OH^2+4.$

Mà $OH\le OI+R_1=1+\sqrt{2}$ nên $P=|z_1|+|z_2|=OA+OB\le\sqrt{2\left(OA^2+OB^2\right)}\le\sqrt{10+4\sqrt{2}}.$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{10+4\sqrt{2}}.$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{3z-15+2i}{i}\right|=|1-3i|$. Khi đó giá trị lớn nhất của $P=2|z-i|-|z-3|$ thuộc khoảng

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(10;11)$.

Lời giải

Ta có $\left|\dfrac{3z-15+2i}{i}\right|=|1-3i|\Leftrightarrow\left|z-5+\dfrac{2}{3}i\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn tâm $I\left(5;-\dfrac{2}{3}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Giả sử $A(0;1);B(3;0)$ khi đó $P=2MA-MB$ ta đi tìm điểm K sao cho $MB=2MK$.

Ta có: $MB=2MK\Leftrightarrow MB^2=4MK^2$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IB^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IK}=0\\3R^2+4IK^2-IB^2=0\,(*)\end{cases},\forall M\in(C).$

Từ đó ta tìm được $K\left(\dfrac{9}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Khi đó $P=2MA-MB=2(MA-MK)\le 2AK=3\sqrt{10}\in(9;10)$.

Câu 16: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+2+2i|=1$ và $|w-1+2i|=|w-3i|$. Khi $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính $|w|$.

A. $\dfrac{11\sqrt{13}}{13}$. **B.** 7. **C.** $\sqrt{130}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{130}}{13}$.

Lời giải

Gọi M, F lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z, w.

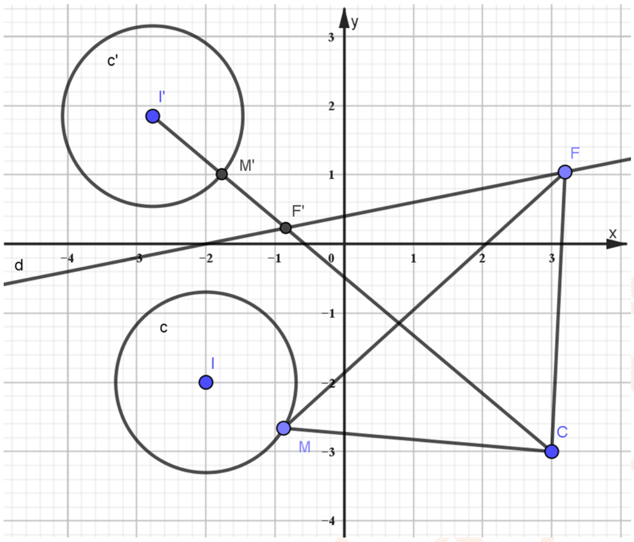
Do $|z+2+2i|=1$ nên M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R=1$.

Gọi $A(1;-2),B(0;3)$.

Do $|w-1+2i|=|w-3i|$ nên F nằm trên đường thẳng $d: x-5y+2=0$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Gọi $C(3;-3)$. Khi đó $|z-w|+|w-3+3i|=MF+FC$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của tổng hai đoạn thẳng này.



Giả sử (C') là đường tròn đối xứng với (C) qua đường thẳng d. Suy ra (C') có tâm $I'\left(-\frac{36}{13};\frac{24}{13}\right)$, bán kính $R'=R=1$. Khi đó ứng với mỗi $M\in(C)$ luôn tồn tại $M'\in(C')$ sao cho $MF=M'F$.

Suy ra $|z-w|+|w-3+3i|=MF+FC=M'F+FC$ đạt giá trị nhỏ nhất khi I',M',F,C thẳng hàng.

Khi đó F là giao điểm của d và $I'C$ với $I'C: 21x+25y+12=0$. Suy ra $F\left(-\frac{11}{13};\frac{3}{13}\right)$.

Do đó $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $w=-\frac{11}{13}+\frac{3}{13}i$.

Vậy $|w|=\frac{\sqrt{130}}{13}$.

Câu 17: Cho hai số phức z,w thoả $|z|=1;\ |w|=4$ và $z.\overline{w}+w.\overline{z}+8=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z-i}{w+3i}\right|$. Tính giá trị $m-7M$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Gọi $z=x_1+y_1i,\ w=x_2+y_2i\ \ (x_1;x_2;y_1;y_2\in\mathbb{R})$ và A,B lần lượt biểu diễn z và w.

Ta có $|z|=OA=1;|w|=OB=4$

Lúc đó $z.\overline{w}+w.\overline{z}+8=0\Leftrightarrow(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)+(x_1-y_1i)(x_2+y_2i)=-8$

$\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=-4\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-4\Leftrightarrow OA.OB.\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-4$

$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-1\Rightarrow \widehat{AOB}=180^0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ ngược hướng nhau và $\overrightarrow{OB}=-4.\overrightarrow{OA}$

Lúc này ta đặt lại $A(x;y),B(-4x;-4y)$ lần lượt là 2 điểm biểu diễn của z,w.

Ta có $|z|=1\Rightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow x^2=1-y^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le y\le 1$

Lúc đó $P=\left|\dfrac{z-i}{w+3i}\right|=\left|\dfrac{x+(y-1)i}{-4x-(4y-3)i}\right|=\sqrt{\dfrac{x^2+(y-1)^2}{16x^2+(4y-3)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1-y^2+(y-1)^2}{16(1-y^2)+(4y-3)^2}}=\sqrt{\dfrac{2y-2}{24y-25}}=f(y)$

Xét hàm số $f(y)=\sqrt{\dfrac{2y-2}{24y-25}}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{-\dfrac{2}{(24y-25)^2}}{2.\sqrt{\dfrac{2y-2}{24y-25}}}<0,\forall y\in(-1;1)$$

Ta có $M=P_{\max}=f(-1)=\dfrac{2}{7}$ và $m=P_{\min}=f(1)=0$

Vậy $m-7M=-2$.

Câu 18: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-2|=1$; gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-3|+|z+1|$. Khi đó giá trị của $M+m$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(10;12)$. **C.** $(11;13)$. **D.** $(7;9)$.

Lời giải

Ta có $P=2|z-3|+|z+1|=|z-3|+|-z+3|+|z+1|\ge|z-3|+|-z+3+z+1|\ge 4$

Suy ra $m=4$ dấu bằng xảy ra khi $z=3$ (thỏa mãn điều kiện đề bài)

Ta có: $P=2|z-3|+|z+1|$

$|z-3|^2=|(z-2)-1|^2=|z-2|^2+1-\left(z-2+\overline{z-2}\right)=2-\left(z-2+\overline{z-2}\right)$

$|z+1|^2=|(z-2)+3|^2=|z-2|^2+9+3\left(z-2+\overline{z-2}\right)=10+3\left(z-2+\overline{z-2}\right)$

$\Rightarrow 3|z-3|^2+|z+1|^2=16$

$P=2|z-3|+|z+1|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}.|z-3|+|z+1|\le\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}+1\right)\left(3|z-3|^2+|z+1|^2\right)}=\sqrt{\dfrac{7}{3}.16}=\dfrac{\sqrt{336}}{3}$

$\Rightarrow M=\dfrac{\sqrt{336}}{3}$

$\Rightarrow M+m=\dfrac{\sqrt{336}}{3}+4\approx 10,11$

Câu 19: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+\mathrm{w}|=5$; $|z|=2$ và số phức $\overline{z}.\mathrm{w}$ là số phức có phần thực bằng 3. Giá trị lớn nhất của $P=|z-\mathrm{w}-6+8i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;10)$. **B.** $(11;13)$. **C.** $(13;15)$. **D.** $(7;9)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.\mathrm{w}=3+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{\overline{z}.\mathrm{w}}=z.\overline{\mathrm{w}}=3-bi$ nên $z.\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}.w=6$

Ta có $|z+\mathrm{w}|=5$

$\Rightarrow 25=|z+\mathrm{w}|^2=(z+\mathrm{w})\left(\overline{z+\mathrm{w}}\right)=(z+\mathrm{w})\left(\overline{z}+\overline{\mathrm{w}}\right)$

$=z.\overline{z}+\mathrm{w}.\overline{\mathrm{w}}+\left(z\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}\mathrm{w}\right)=|z|^2+|\mathrm{w}|^2+\left(z\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}\mathrm{w}\right)$

$=4+|\mathrm{w}|^2+6$

$\Rightarrow|\mathrm{w}|^2=15\Rightarrow|\mathrm{w}|=\sqrt{15}$

Ta có:

$|z-\mathrm{w}|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{\mathrm{w}}\right)=z.\overline{z}+\mathrm{w}.\overline{\mathrm{w}}-\left(z.\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}.\mathrm{w}\right)$

$=|z|^2+|\mathrm{w}|^2-\left(z.\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}.\mathrm{w}\right)=4+15-6=13$

$\Rightarrow|z-w|=\sqrt{13}$

Khi đó: $P=|z-w-6+8i|\le|z-w|+|-6+8i|=\sqrt{13}+10\approx 13,6$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{13}+10$.

Câu 20: Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2-z_1|=2\sqrt{2}$, và $z_1.\overline{z_2}$ có phần thực bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của $A=|z_1+z_2-1-i|$.

A. $2\sqrt{3}+2$. **B.** $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt: $z_1.\overline{z}_2=1+bi\Rightarrow\overline{z_1.\overline{z}_2}=\overline{z}_1.z_2=1-bi\Rightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=2$.

Ta có: $|z_2-z_1|=2\sqrt{2}\Rightarrow|z_2-z_1|^2=8$

$\Rightarrow(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1})=(z_2-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})=z_2.\overline{z_2}+z_1.\overline{z_1}-z_1.\overline{z_2}-z_2.\overline{z_1}=8$

$\Rightarrow|z_2|^2+|z_1|^2-\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)=|z_2|^2+1-2=8\Rightarrow|z_2|^2=9\Rightarrow|z_2|=3$.

Lại có: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)=1+9+2=12$

$\Rightarrow |z_1+z_2|=2\sqrt{3}$.

Khi đó: $A=|z_1+z_2-1-i|\le|z_1+z_2|+|-1-i|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Câu 21: Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$, và $a.b\ge0$. Hai số phức z_1,z_2 thuộc tập S sao cho $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+2i|+|z_2|$ bằng:

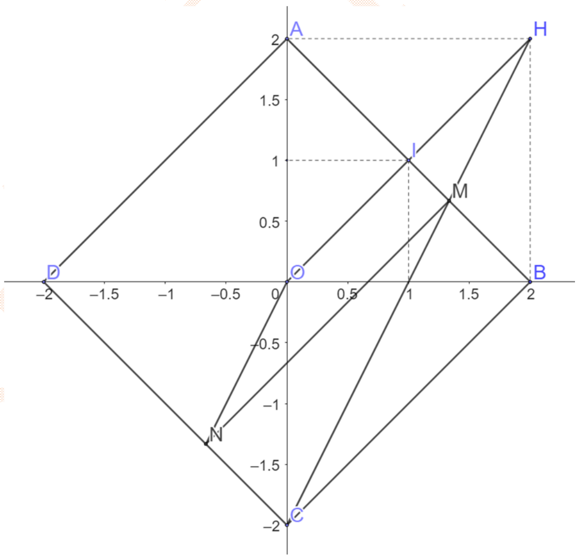
A. $2\sqrt{5}$. **B.** $1+\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Lời giải

Với $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Ta có $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|2a|+|2bi|=4\Rightarrow|a|+|b|=2$.

Mà $a.b\ge0$ nên điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức $z=a+bi$ thuộc cạnh AB,CD của hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh $2\sqrt{2}$, với các đỉnh có tọa độ $A(0;2),B(2;0),C(0;-2),D(-2;0)$



Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn z_1,z_2 ta có: $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}=k\ \ (k>0)$

$\Rightarrow z_1-z_2=k(1+i)\Rightarrow\overrightarrow{NM}=k\overrightarrow{OI}$ với điểm $I(1;1)$.

Nhận thấy $\overrightarrow{OI}=(1;1),\overrightarrow{DA}=(2;2)$ nên $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{NM}=k.\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{DA}\ \ (k>0)$ suy ra hai vector $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{DA}$ cùng hướng.

$\Rightarrow$ Điểm N thuộc cạnh CD, Điểm M thuộc cạnh AB, và $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{DA}$.

Ta có $|z_1+2i|+|z_2|=MC+ON=MC+MH\geq CH$ (với H là một đỉnh của hình bình hành $MNOH$).

Trong đó $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}=(2;2)\Rightarrow H(2;2)$.

$\Rightarrow CH=2\sqrt{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+2i|+|z_2|$ bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 22: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|\overline{z+w}|=5$; $|\overline{z}|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-w-8+6i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$.	**B.** $(2;4)$.	**C.** $(5;7)$.	**D.** $(7;9)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=3+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{3+bi}=3-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=6$.

Ta có: $|\overline{z}|=2=|z|$

$|z+w|=5\Rightarrow 25=|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})$

$\Rightarrow 25=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z.\overline{z}+w.\overline{w}+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow 25=|z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow 25=4+|w|^2+6$

$\Rightarrow 25=|w|^2+10\Rightarrow|w|=\sqrt{15}$

Mặt khác

$|z-w|^2=(z-w).(\overline{z-w})=(z-w).(\overline{z}-\overline{w})=|z|^2+|w|^2-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow|z-w|^2=2^2+15-6=13\Rightarrow|z-w|=\sqrt{13}$

Khi đó: $P=|z-w-8+6i|\geq\big||z-w|-|8-6i|\big|=\left|\sqrt{13}-10\right|\approx 6{,}3$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=t.\mathrm{w}$, $t\leq 0$.

Câu 23: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|\overline{z-w}|=3$; $|z|=1$ và số phức $\frac{z}{\mathrm{w}}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P=|z+\mathrm{w}+3+4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;10)$.	**B.** $(10;12)$.	**C.** $(4;6)$.	**D.** $(3;4)$.

Lời giải

Đặt $\frac{z}{\text{w}}=0+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $\frac{z}{\text{w}}=\frac{z.\overline{w}}{\text{w}.\overline{w}}=\frac{z.\overline{w}}{|\text{w}|^2}=0+bi$ nên $\overline{z}.w=0+|\text{w}|^2.bi\Rightarrow z.\overline{\text{w}}=0-|\text{w}|^2.bi$

$\Rightarrow \overline{z}.w+z.\overline{w}=0$.

Ta có: $|\overline{z-\text{w}}|=3\Rightarrow 9=|z-w|^2=(z-w)(\overline{z-w})$

$\Rightarrow 9=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z.\overline{z}+w.\overline{w}-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow 9=|z|^2+|w|^2-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow 9=1+|w|^2+0$

$\Rightarrow 9=|w|^2+1\Rightarrow |w|=\sqrt{8}$

Mặt khác

$|z+w|^2=(z+w).(\overline{z+w})=(z+w).(\overline{z}+\overline{w})=|z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

$\Rightarrow |z+w|^2=1^2+8-0=9\Rightarrow |z+w|=3$

Khi đó: $P=|z+w+3+4i|\le|z+w|+|3+4i|=3+5=8$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=t.\text{w}$, $t\ge 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8.

Câu 24: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=4,|z+i\overline{\text{w}}|=5$ và zw là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w+i|$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $z=a+bi,\text{w}=c+di$ với $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases}|z|=4\\|z+i\overline{\text{w}}|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=16(1)\\(a+d)^2+(b+c)^2=25(2)\end{cases}$$

zw là một số thực suy ra $ad+bc=0\ (3)$. Từ $(1),(2),(3)$ ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases}a^2+b^2=16\\(a+d)^2+(b+c)^2=25\\ad+bc=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=16\\a^2+b^2+c^2+d^2+2(ad+bc)=25\Rightarrow c^2+d^2=9\Rightarrow|\text{w}|=3\\ad+bc=0\end{cases}$$

Khi đó ta có $P=|w+i|\ge|w|-|i|=3-1=2\Rightarrow P_{\min}=2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\text{w}=ki(k<0)\Rightarrow\begin{cases}\text{w}=-3i\\z=2i\end{cases}$.

Câu 25: Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|\overline{z+2w}\right|=10;\left|\overline{z}\right|=1$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-w+3-4i\right|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Ta có

Đặt $\overline{z}.w=2+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{2+bi}=2-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=4$.

Ta có:

$$\left|\overline{z+2w}\right|=10\Rightarrow 100=\left|z+2w\right|^2=\left(z+2w\right)\left(\overline{z+2w}\right)=\left(z+2w\right)\left(\overline{z}+2\overline{w}\right)=z.\overline{z}+4w.\overline{w}+4\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$$

$$=\left|\overline{z}\right|^2+4\left|w\right|^2+4\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+4\left|w\right|^2+16=4\left|w\right|^2+17\Rightarrow\left|w\right|=\frac{\sqrt{83}}{2}$$

$$\left|z-w\right|^2=\left(z-w\right).\left(\overline{z-w}\right)=\left(z-w\right).\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=\left|\overline{z}\right|^2+\left|w\right|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+\frac{83}{4}-4=\frac{71}{4}\Rightarrow\left|z-w\right|=\frac{\sqrt{71}}{2}$$

Khi đó: $P=\left|z-w+3-4i\right|=\left|\left(z-w\right)+\left(3-4i\right)\right|\geq\left|\left|z-w\right|-\left|3-4i\right|\right|=\left|\frac{\sqrt{71}}{2}-5\right|\approx-0.78$.

Câu 26: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $\left|z-w\right|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z\right|+\left|w\right|$ bằng

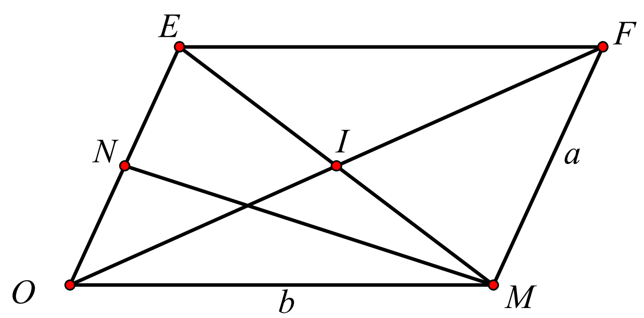
A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Gọi E là điểm biểu diễn cho số phức $2w$. Suy ra $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$ với $F\left(8;6\right)$ là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MOEF$, $I(4;3)$ là trung điểm của OF.

Ta có $\left|z-w\right|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $\left|z\right|=ON=\frac{a}{2};\left|w\right|=OM=b.$



Xét tam giác ΔOMF và ΔOME

Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25 \\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16 \end{cases} \Rightarrow a^2+2b^2=88$.

$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2 \le \left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$.

Suy ra $|z|+|w| \le \sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $\left(|z|+|w|\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 27: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$ là

A. $\sqrt{53}$.	**B.** $2\sqrt{53}$	**C.** $5\sqrt{2}$.	**D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $(1+2i)(z-5)=5w \Leftrightarrow (1+2i)z-5-10i=5w$

$\Leftrightarrow (1+2i)z-10-5i=5w-5+5i \Leftrightarrow (1+2i)(z-4+3i)=5(w-1+i)$

$\Rightarrow \sqrt{5}|z-4+3i|=5|w-1+i|=5\sqrt{5}$

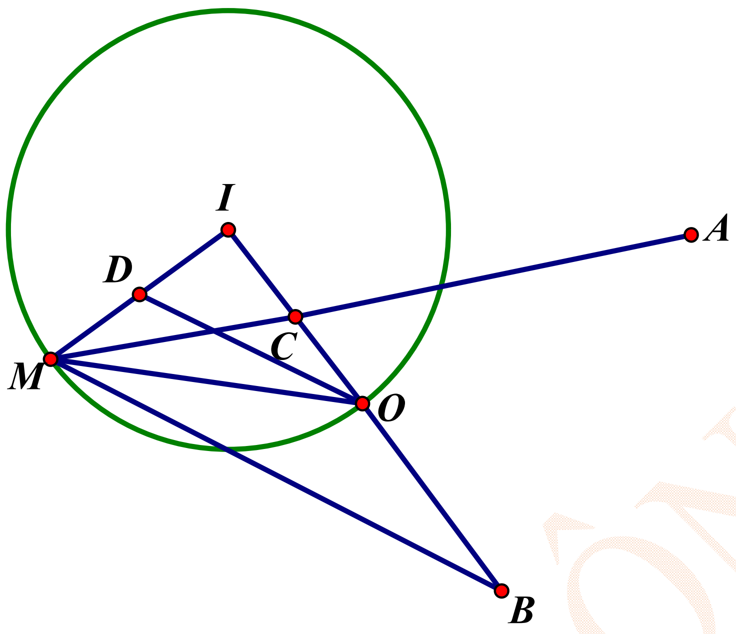
$\Rightarrow |z-4+3i|=5$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z

Vì $|z-4+3i|=5 \Rightarrow M \in (C):(x-4)^2+(y+3)^2=25$ có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$.

Gọi $A(3;2); B(-4;3)$, khi đó:

$P=2MA-MB$



Nhận xét $O(0;0)$ là trung điểm của IB và $O \in (C)$, A, B nằm ngoài (C).

Gọi C, D là trung điểm của IO, IM $\Rightarrow DO = \frac{1}{2}MB$ với $C\left(2;-\frac{3}{2}\right)$

Vì tam giác IMO cân tại I nên $MC = OD \Rightarrow MB = 2MC$.

Khi đó $P = 2MA - MB = 2MA - 2MC \leq 2AC$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} M = AC \cap (C) \\ \overline{MA} = k.\overline{MC}; k > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P_{\max} = 2AC = 2\sqrt{(3-2)^2 + \left(2+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{53}$.

Câu 28: Xét các số phức thỏa mãn $|z| = |w| = 2$ và $|z - 2w| = 4$. Giá trị lớn nhất của $P = |2z + 3w - 3 + 4i|$ là:

A. 3 **B.** 8 **C.** 13 **D.** 5

Lời giải

Tính chất: $|a.z + b.w| = c \Leftrightarrow |a.z + b.w|^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2|z|^2 + b^2|w|^2 + ab\left(\overline{z}.w + z.\overline{w}\right) = c^2$.

Ta có:

$|z - 2w| = 4 \Leftrightarrow |z - 2w|^2 = 16 \Leftrightarrow |z|^2 + 4|w|^2 - 2\left(\overline{z}.w + z.\overline{w}\right) = 16 \Leftrightarrow \overline{z}.w + z.\overline{w} = 2$.

$|2z + 3w|^2 = 4|z|^2 + 9|w|^2 + 6\left(\overline{z}.w + z.\overline{w}\right) = 64 \Rightarrow |2z + 3w| = 8$.

$P = |2z + 3w - 3 + 4i| \leq |2z + 3w| + |-3 + 4i| = 8 + 5 = 13$.

Vậy GTLN của P là 13.

Câu 29: Xét các số phức thỏa mãn $|u| = 2, |v| = 4$. Giá trị lớn nhất của $P = |u + 2v| + |u - v|$ là:.

A. $9\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{14}$. **C.** $2\sqrt{43}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có

$$|u+2v|^2=|u|^2+4|v|^2+2\left(\overline{u}.v+u.\overline{v}\right)$$

$$|u-v|^2=|u|^2+|v|^2-\left(\overline{u}.v+u.\overline{v}\right)\Rightarrow 2|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2-2\left(\overline{u}.v+u.\overline{v}\right)$$

$$\Rightarrow |u+2v|^2+2|u-v|^2=3|u|^2+6|v|^2$$

Áp dụng BĐT BCS:

$$P=|u+2v|+|u-v|=|u+2v|+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|u-v|\le\sqrt{\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right].\left[\left(|u+2v|\right)^2+\left(\sqrt{2}|u-v|\right)^2\right]}$$

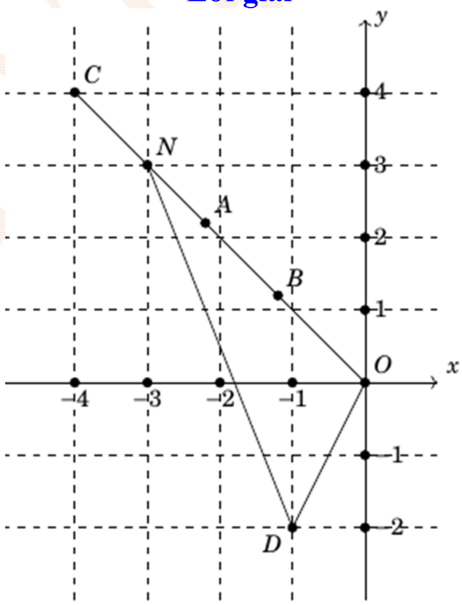
$$=\sqrt{\frac{3}{2}.\left(3|u|^2+6|v|^2\right)}=9\sqrt{2}$$

Vậy Vậy GTLN của P là $9\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{2}$ và $\left|\overline{z}+4+4i\right|+|w|=3\sqrt{2}$. Khi biểu thức $P=|w+1+2i|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|w+2-i|$ bằng.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải



Trên mặt phẳng phức, gọi các điểm $A(z),B(w),C(-4;4),D(-1;-2)$.

Khi đó từ giả thiết

$$|z-w|=\sqrt{2}\Rightarrow AB=\sqrt{2}$$

$$\left|\overline{z}+4+4i\right|+|w|=3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |z+4-4i|+|w|=3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AC+OB=3\sqrt{2}$$

Nhận xét: $OB+BA+AC=4\sqrt{2}=OC$ nên O,B,A,C thẳng hàng theo thứ tự đó.

Gọi điểm $N(-3;3)$ thì N thuộc đoạn thẳng OC.

Do $AB=\sqrt{2}$ nên B di động trên đoạn ON .

Khi đó $P=|w+1+2i|=DB\le \max\{DO,\ DN\}=DN$.

Đẳng thức xảy ra khi B trùng N , tức là $w=-3+3i$.

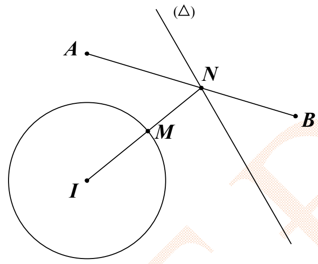
Vậy $|w+2-i|=|-3+3i+2-i|=\sqrt{5}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1+2+8i|=2\sqrt{5}$ và $|z_2+3+5i|=|z_2-1-3i|$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|+|z_2-3+i|+|z_2+3+4i|$ bằng.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Lời giải



Ta có quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường tròn tâm $I(-2;-8)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$

Quỹ tích các điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng $(\Delta): x+2y+3=0$

$$d(I,(\Delta))=\frac{|-2+2.(-8)+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3\sqrt{5}>2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow (\Delta)$ không cắt đường tròn

$P=|z_1-z_2|+|z_2-3+i|+|z_2+3+4i|=MN+NA+NB$ với $A(3;-1);B(-3;-4)$

Xét $\Delta(A)=3+2.(-1)+3=4$, $\Delta(B)=-3+2.(-4)+3=-8$

$\Rightarrow \Delta(A).\Delta(B)<0$

$\Rightarrow A$, B nằm khác phía so với đường thẳng (Δ)

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $NA+NB\ge AB$

Nên $NA+NB$ nhỏ nhất bằng $AB=3\sqrt{5}$ (1) $\Leftrightarrow A;B;N$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \{N\}=(\Delta)\cap(AB)$

$$(AB):\frac{x+3}{3+3}=\frac{y+4}{-1+4}\Leftrightarrow x-2y-5=0$$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y=5\\ x+2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1\\ y=-2\end{cases}$

$\Rightarrow N(1;-2)$

Ta có $d(I;\Delta)>R$ nên khi M chuyển động trên đường tròn $(I;R)$, N chuyển động trên đường thẳng Δ thì $MinMN=d(I,\Delta)-R=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$, đạt được khi N là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng $\Delta\Rightarrow N(1;-2)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $4\sqrt{5}$.

Câu 32: Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải

Ta có $|z+w|=\sqrt{2} \Rightarrow 2=|z+w|^2 =(z+w)(\overline{z}+\overline{w}) =|z|^2+|w|^2+z\overline{w}+\overline{z}w$

$\Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=0 \Rightarrow z\overline{w}$ là số thuần ảo. Hay $z\overline{w}=ki$, $k\in\mathbb{R}$. Do đó, $z=\dfrac{ki}{\overline{w}}$.

Mặt khác, $|z+w|=\sqrt{2} \Rightarrow \left|\dfrac{ki}{\overline{w}}+w\right|=\sqrt{2} \Rightarrow |ki+w\overline{w}|=\sqrt{2}|\overline{w}| \Rightarrow |ki+1|=\sqrt{2}$ (do $|w|=|\overline{w}|=1$)

$\Rightarrow \sqrt{k^2+1}=\sqrt{2} \Rightarrow k=\pm 1$.

Vậy $z=\pm\dfrac{i}{\overline{w}}$. Do vai trò bình đẳng của z và w nên ta chỉ cần xét trường hợp $z=\dfrac{i}{\overline{w}}$.

Khi đó: $P=|iw^2+(2i-2)w-4|=|w^2+(2+2i)w+4i|=\left|(w+1+i)^2+2i\right|$.

Đặt $u=w+1+i \Rightarrow w=u-1-i \Rightarrow |w|=|u-1-i|=1$ và $z_0=-1-i$.

Ta có $P^2=|u^2+2i|^2=|u^2+z_0^2|^2 =(u^2+z_0^2)(\overline{u}^2+\overline{z}_0^2)$

$=|u|^4+|z_0|^4+(u\cdot\overline{z}_0+z_0\cdot\overline{u})^2-2|u.z_0|^2 =|u|^4-4|u|^2+4+(u.\overline{z_0}+z_0.\overline{u})^2$.

Mà $(u+z_0)(\overline{u}+\overline{z_0})=|u+z_0|^2=1 \Rightarrow u\cdot\overline{z_0}+z_0\cdot\overline{u}=1-|u|^2-|z_0|^2=-|u|^2-1$.

Suy ra: $P^2=|u|^4-4|u|^2+4+(|u|^2+1)^2 =2|u|^4-2|u|^2+5=2\left(|u|^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}\geq\dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow P\geq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\approx 2,1\in(2;3)$.

Câu 33: Cho z và w là các số phức thỏa mãn các điều kiện $w(z+1)+iz-1=0$ và điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn $x^2+y^2=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|w+1-2i|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Ta thấy do điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính bằng 1 nên suy ra $|z|=1$ $(*)$.

Giả thiết $w(z+1)+iz-1=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-w}{i+w}$.

Từ $(*):|z|=1$ ta có $\left|\dfrac{1-w}{i+w}\right|=1 \Leftrightarrow |1-w|=|w+i|$

Đặt $w=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ ta có $|1-x-yi|=|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (1-x)^2+(-y)^2=(y+1)^2+x^2 \Leftrightarrow y=-x$

Khi đó $T=|x+yi+1-2i|=\sqrt{(x+1)^2+(-x-2)^2}=\sqrt{2x^2+6x+5}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $T_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0;1)$, dấu bằng xảy ra $x=-\dfrac{3}{2};y=\dfrac{3}{2}$, hay $w=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Câu 34: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-3-5i|=3$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2+1+2i|=|z_2+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-1-2i|$.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

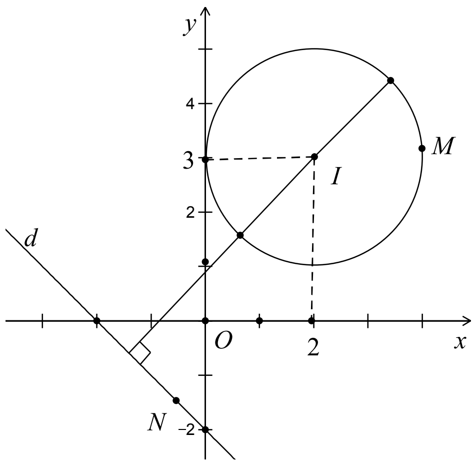
Ta có $|z_1-z_2-1-2i|=|(z_1-1-2i)-z_2|=|z_3-z_2|$, với $z_3=z_1-1-2i$.

Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_3,\ z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có $|z_1-3-5i|=2\Leftrightarrow|(z_1-1-2i)-2-3i|=2\Leftrightarrow|z_3-2-3i|=2$

Suy ra $M\in(C)$ có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=2$.

Gọi $z_2=x+yi;(x;y\in\mathbb{R}),|z_2+1+2i|=|z_2+i|\Leftrightarrow x+y+2=0(d)\Rightarrow N\in d$.



Ta có $d\left(I;d\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Từ hình vẽ ta có $MN_{\min}=d\left(I;d\right)-R=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-2=\dfrac{7\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 35: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tỉ số $\dfrac{M}{m}$ được xác định bởi công thức nào dưới đây?

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\leq P\leq\dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\leq P\leq 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\leq P\leq\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 36: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|\bar{z}-2+3i|$, số phức z_0 có mô đun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$.

C. $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Giả sử $z_0=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $|z-i|=|\bar{z}-2+3i|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(x-2)+(-y+3)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(-y+3)^2\Leftrightarrow y=-x+3$.

$|z_0|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-x+3)^2}=\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}\geq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy $|z_0|_{\min}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow z_0=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, suy ra phần ảo của z_0 bằng $\dfrac{3}{2}$.

Câu 37: Cho tất cả các số phức $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z+2\mathrm{i}-1|=|z+\mathrm{i}|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $\mathrm{P}=2x+3y$.

A. 9 **B.** 11 **C.** -3 **D.** 5

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $|z+2\mathrm{i}-1|=|z+\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow|x+yi+2\mathrm{i}-1|=|x+yi+\mathrm{i}|\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)\mathrm{i}|=|x+(y+1)\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=x^2+(y+1)^2\Leftrightarrow x-y-2=0$.

Dễ thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng: $x-y-2=0\Rightarrow M(x;x-2)$

$\overrightarrow{MA}=(x-1;x-5)\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=\sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2}=\sqrt{2x^2-12x+26}=\sqrt{\left(x\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)^2+8}\geq 8$

Suy ra: $MA_{\min}=8$ khi $x\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=1$. Vậy $P=2x+3y=2.3+3.1=9$

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+\left|z^2-z+1\right|$. Tính $M.m$.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, $(x,y\in R)$.

Do $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $x,y\in[-1;1]$.

Ta có $z.\bar{z}=|z|^2=1$. Thay vào P ta được:

$$P=|z+1|+\left|z^2-z+z.\bar{z}\right|=|z+1|+\left|z\left(z-1+\bar{z}\right)\right|=|z+1|+|z|.\left|z+\bar{z}-1\right|=|z+1|+\left|z+\bar{z}-1\right|$$

$$=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|2x-1|=\sqrt{2x+2}+|2x-1|.$$

Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x+2}+|2x-1|$

Ta có $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+2}-2x+1 & khi\ \ -1\leq x<\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}+2x-1 & khi\ \ \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-2 & khi\ \ -1<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}+2 & khi\ \ \dfrac{1}{2}<x\leq 1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{8}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$

x	-1		$-\frac{7}{8}$		$\frac{1}{2}$		1
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Suy ra $\begin{cases}m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\sqrt{3}\\ M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\dfrac{13}{4}\end{cases}$. Vậy $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 39: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(15;16)$. **D.** $(14;15)$.

Lời giải

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5w+5i=(2+i)(z-4)+5i$

$\Rightarrow |5w+5i|=|(2+i)(z-4)+5i|$

$\Rightarrow 5|w+i|=|(2+i)(z-4+1+2i)|=\sqrt{5}|z-3+2i|$

$\Rightarrow 5.\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}|z-3+2i|\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Ta có:

$|z+z_1|^2+|z-z_1|^2=2\left(|z|^2+|z_1|^2\right);\ \forall z,z_1$. (1)

$|z|^2+|z_1|^2\ge\dfrac{\left(|z|+|z_1|\right)^2}{2};\ \forall z,z_1$. (2)

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|$.

Áp dụng (1) và (2), ta có:

$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2=2\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2\ge\dfrac{\left(|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|\right)^2}{2}=\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}$.

Vậy, ta có:

$\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}\le 2\left(|z-3-2i|^2+9\right)\Rightarrow\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2\le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$\Rightarrow P^2\le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

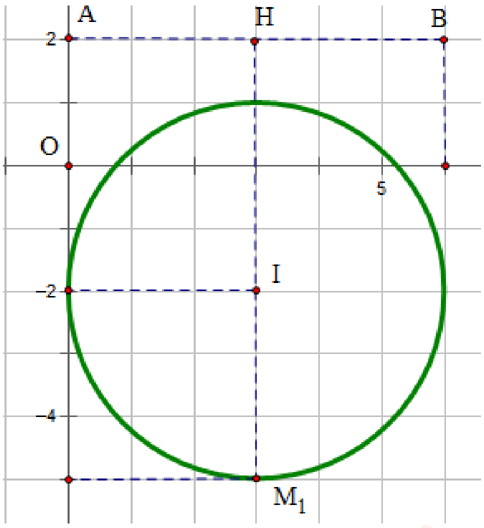
Do $4\left(|z-3-2i|^2+9\right)=4\left(|z-3+2i-4i|^2+9\right)$ nên $P^2\le 4\left(\left(|z-3+2i|+|-4i|\right)^2+9\right)$

$\Rightarrow P^2\le 4\left(7^2+9\right)=232\Rightarrow P\le 2\sqrt{58}\approx 15,23$.

Ta có thể làm theo phương pháp hình học như sau

Biến đổi suy ra $|z-3+2i|=3$, vậy quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;-2),R=3$. Đặt $A(0;2),B(6;2)$ ta có

$P=|z-2i|+|z-6-2i|=MA+MB\le\left(1^2+1^2\right)\left(MA^2+MB^2\right)=2\left(2MH^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)$, trong đó H là trung điểm AB. Do đó $P_{\max}\Leftrightarrow MH_{\max}\Leftrightarrow M\equiv M_1(3;-5)$



Khi đó $P_{\min}=\sqrt{58}+\sqrt{58}=2\sqrt{58}\approx 15,23$.

Câu 40: Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|\overline{z+w}\right|=10;\left|\overline{z}\right|=1$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-w+3-4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=2+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{2+bi}=2-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=4$.

Ta có:

$$\left|\overline{z+w}\right|=10\Rightarrow 10=|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$$

$$=\left|\overline{z}\right|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+|w|^2+4=|w|^2+5\Rightarrow |w|=\sqrt{5}$$

$$|z-w|^2=(z-w).\left(\overline{z-w}\right)=(z-w).\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=\left|\overline{z}\right|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+5-4=2\Rightarrow |z-w|=\sqrt{2}$$

Khi đó: $P=|z-w+3-4i|=|(z-w)+(3-4i)|\ge \left||z-w|-|3-4i|\right|=\left|\sqrt{2}-5\right|\approx 3,6$.

Câu 41: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=2\left|\overline{z}\right|=2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P=|z+w+2-3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=2+bi;b\in\mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{2+bi}=2-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=4$.

Ta có:

$$|z-w|=2\Rightarrow 4=|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$$

$$=|z|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+|w|^2-4=|w|^2-3\Rightarrow |w|=\sqrt{7}$$

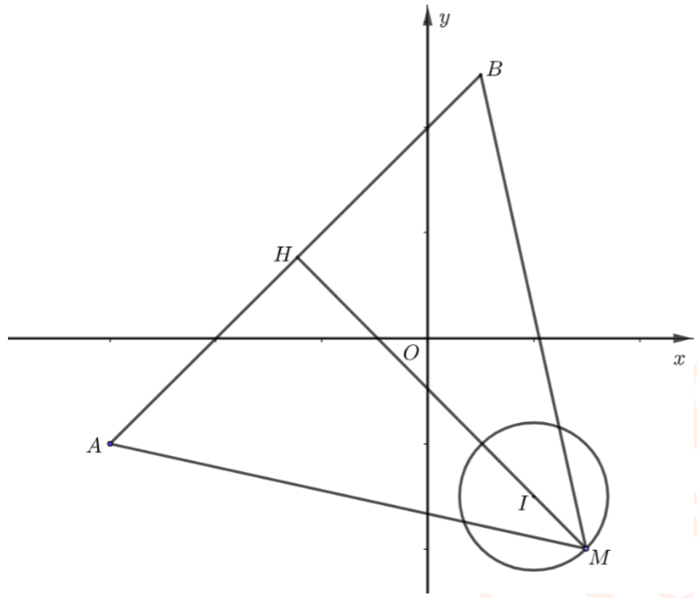
$$|z+w|^2=(z+w).\left(\overline{z+w}\right)=(z+w).\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=|z|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=1+7+4=12\Rightarrow |z+w|=2\sqrt{3}$$

Khi đó: $P=|z+w+2-3i|=|(z+w)+(2-3i)|\le |z+w|+|2-3i|=2\sqrt{3}+\sqrt{13}\approx 7,07$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+3i|=\sqrt{2}$ và biểu thức $T=|z+7+2i|^2+|z-1-6i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S=|z-(2023-2024i)|$

A. $2020\sqrt{2}$. **B.** $2021\sqrt{2}$. **C.** $2022\sqrt{2}$. **D.** $2023\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I\left(2;-3\right)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Gọi $A\left(-7;-2\right),B\left(1;6\right) \Rightarrow T=MA^2+MB^2$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow H\left(-3;2\right)$.

MH là đường trung tuyến trong tam giác MAB nên ta có

$$MH^2=\frac{2\left(MA^2+MB^2\right)-AB^2}{4} \Rightarrow MA^2+MB^2=2MH^2+\frac{1}{2}AB^2$$

$AB=8\sqrt{2}$ không đổi nên T lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH=IH+R$ với $HI=5\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{HI}{R}.\overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{HI}=5\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases}5=5(x-2)\\-5=5(y+3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases} \Rightarrow M\left(3;-4\right)$$

$$\Rightarrow S=\left|z-\left(2023-2024i\right)\right|=\left|-2020+2020i\right|=2020\sqrt{2}.$$

Câu 43: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $\left|z-w\right|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z\right|+\left|w\right|$ bằng

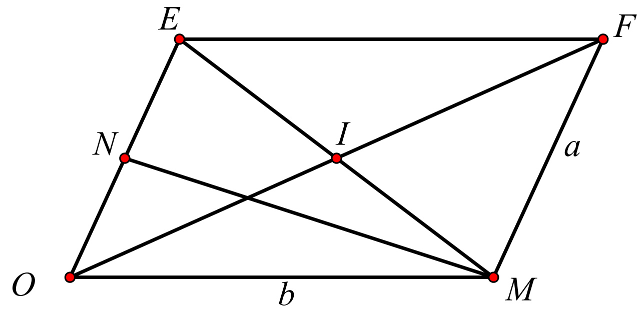
A. $4\sqrt{6}$.	**B.** $2\sqrt{26}$.	**C.** $\sqrt{66}$.	**D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Gọi E là điểm biểu diễn cho số phức $2w$. Suy ra $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$ với $F\left(8;6\right)$ là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MOEF$, $I(4;3)$ là trung điểm của OF.

Ta có $\left|z-w\right|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $\left|z\right|=ON=\frac{a}{2};\left|w\right|=OM=b.$



Xét tam giác ΔOMF và ΔOME

Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25 \\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16 \end{cases} \Rightarrow a^2+2b^2=88$.

$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$.

Suy ra $|z|+|w|\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $\left(|z|+|w|\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 44: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$ là

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $(1+2i)(z-5)=5w\Leftrightarrow(1+2i)z-5-10i=5w$

$\Leftrightarrow(1+2i)z-10-5i=5w-5+5i\Leftrightarrow(1+2i)(z-4+3i)=5(w-1+i)$

$\Rightarrow\sqrt{5}|z-4+3i|=5|w-1+i|=5\sqrt{5}$

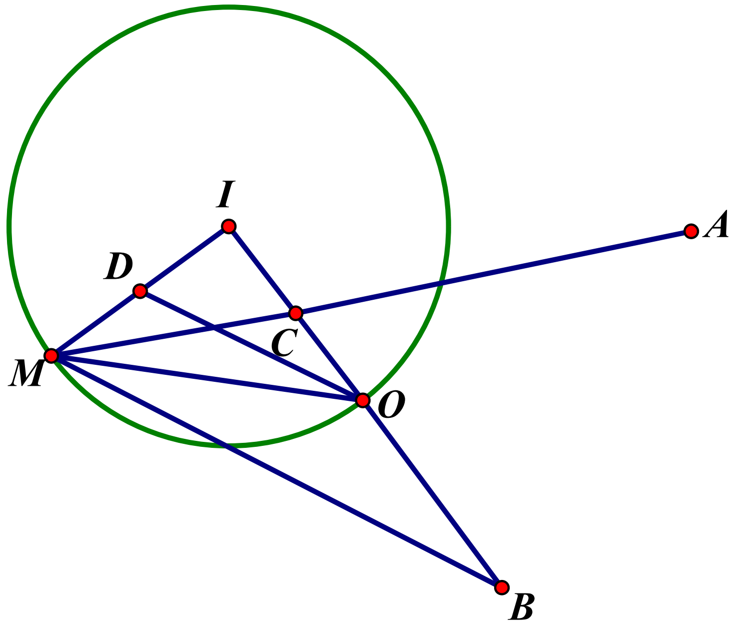
$\Rightarrow|z-4+3i|=5$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z

Vì $|z-4+3|=5\Rightarrow M\in(C):(x-4)^2+(y+3)^2=25$ có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$.

Gọi $A(3;2);B(-4;3)$, khi đó:

$P=2MA-MB$



Nhận xét $O(0;0)$ là trung điểm của IB và $O \in (C)$, A, B nằm ngoài (C).

Gọi C, D là trung điểm của $IO, IM \Rightarrow DO = \dfrac{1}{2}MB$ với $C\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$

Vì tam giác IMO cân tại I nên $MC = OD \Rightarrow MB = 2MC$.

Khi đó $P = 2MA - MB = 2MA - 2MC \le 2AC$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} M = AC \cap (C) \\ \overline{MA} = k.\overline{MC}; k > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P_{\max} = 2AC = 2\sqrt{(3-2)^2 + \left(2+\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{53}$.

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Khi đó modun của số phức $w = M + mi$

A. $2\sqrt{314}$. **B.** $\sqrt{1258}$. **C.** $3\sqrt{137}$. **D.** $2\sqrt{309}$.

Lời giải

Cách 1: Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

Ta có $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow P = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow 4(x-3) + 2(y-4) = P - 23$

Ta có $\left[4(x-3) + 2(y-4)\right]^2 \le 20\left[(x-3)^2 + (y-4)^2\right] = 100$

Suy ra $-10 \le P - 23 \le 10 \Leftrightarrow 13 \le P \le 33$ suy ra $M = 33, m = 13$ do đó ta được $w = 33 + 13i$ vậy $|w| = \sqrt{1258}$.

Cách 2: Gọi $z = x + yi$ **với** $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$. Suy ra, tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trên hệ tọa độ Oxy là đường tròn (C) tâm $I(3;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Lại có: $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 - P = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0$, đây là phương trình của đường thẳng $\Delta: 4x + 2y + 3 - P = 0$.

Ta thấy $M = \Delta \cap (C)$.

Điều kiện để Δ cắt (C) là: $d(I,\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow -10\le 23-P\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$.

Suy ra: $m=13, M=33$ và $w=33+13i\Rightarrow |w|=\sqrt{1258}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{7}-4$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Cách 1 : Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=|z-3|+|z+3|\ge|z-3+z+3|=|2z|\Leftrightarrow|z|\le 4$.

Do đó $M=max|z|=4$.

Mà $|z-3|+|z+3|=8\Leftrightarrow|x-3+yi|+|x+3+yi|=8\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$8=1.\sqrt{(x-3)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+3)^2+y^2}\le\sqrt{(1^2+1^2)\left[(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 8\le\sqrt{2(2x^2+2y^2+18)}\Leftrightarrow 2(2x^2+2y^2+18)\ge 64$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 7\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{7}\Leftrightarrow|z|\ge\sqrt{7}$.

Do đó $M=min|z|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Cách 2: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là elip

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1\left(\begin{cases}F_1(-3;0),F_2(0,3)\\ a=\dfrac{8}{2}=4\\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\end{cases}\right)$$

Do vậy $\begin{cases}|z|_{Max}=a=4\\ |z|_{Min}=b=\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow M+m=4+\sqrt{7}$.

Câu 47: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2|w|=2$. Biết $P=|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $|z-\text{w}|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $|iz+w+3-4i|\ge|3-4i|-|iz+w|\ge 5-(|iz|+|w|)\ge 5-(2+1)=2$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}w=k_1(3-4i)\ khi\ (k_1<0)\\ i.z=k_2(3-4i)\ khi\ (k_2<0)\end{cases}$ và $\begin{cases}|w|=1\\ |iz|=|z|=2\end{cases}$.

Giải hệ trên suy ra $k_2=-\dfrac{2}{5}$; $k_1=-\dfrac{1}{5}$.

Hay $\begin{cases} w=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i \\ iz=\dfrac{-2}{5}(3-4i) \end{cases}$

$\Rightarrow -z=\dfrac{-2i}{5}(3-4i) \Rightarrow z=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i$

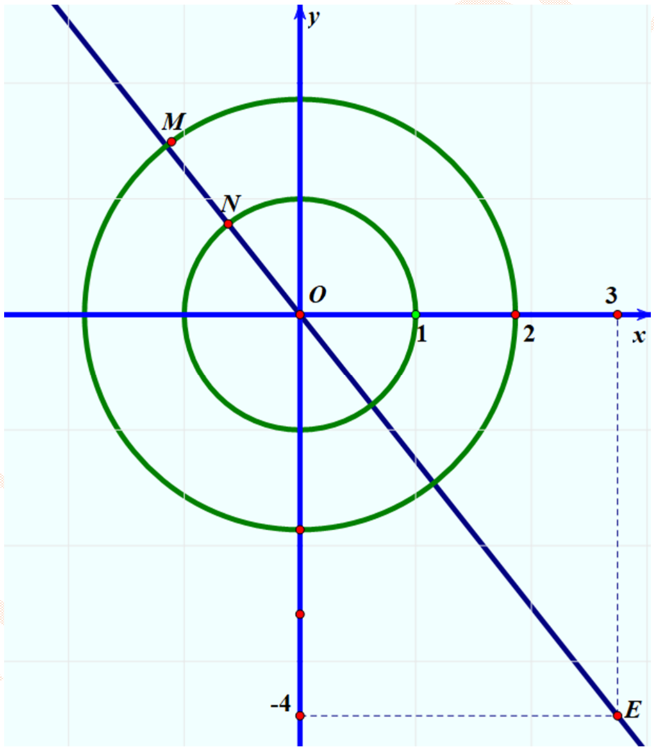
Khi đó $z-w=-1-2i \Rightarrow |z-w|=\sqrt{5}$.

Cách 2: Trong mặt phẳng Oxy :

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $iz \Rightarrow OM=2 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm O bán kính $R_1=2$.

Gọi N là điểm biểu diễn của số phức $w \Rightarrow ON=1 \Rightarrow N$ thuộc đường tròn (C_2) tâm O bán kính $R_2=1$.

Gọi $E(3;-4)$. Khi đó, ta có $P=|iz+w+3-4i| =\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OE}\right|$.



Ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất khi M, N, E thẳng hàng và $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$

Đường thẳng OE có phương trình là $y=\dfrac{-4}{3}x$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\frac{-4}{3}x\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{-8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $M\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\frac{-4}{3}x\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{-4}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $N\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Do đó: $w = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ và $i.z = -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \Leftrightarrow z = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i$.

Vậy $|z - \text{w}| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$.

Câu 48: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 3, |z_1| = 2$ và số phức $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P = |z_1 + z_2 - 3 + 2i|$ bằng

A. $3+\sqrt{2}$. **B.** $3+\sqrt{13}$. **C.** $3+\sqrt{5}$. **D.** $5+\sqrt{3}$.

Lời giải

Cách 1.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2

Ta có: $\begin{cases} |z_1 - z_2| = 3 \\ |z_1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3 \\ OA = 2 \end{cases}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo nên $x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$. Suy ra ΔOAB vuông tại O

Gọi là I trung điểm của AB

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}, \left|\overrightarrow{OI}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{3}{2}$

Số phức $z = -3 + 2i$ được biểu diễn bởi điểm $C(-3;2)$

Khi đó $P = \left|2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC}\right| \le 2\left|\overrightarrow{OI}\right| + \left|\overrightarrow{OC}\right| \Rightarrow P \le 2.\frac{3}{2} + \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = 3 + \sqrt{13}$

Vậy $\max P = 3+\sqrt{13}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng.

Cách 2.

Ta có $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo suy ra $z_1.\overline{z_2}$ thuần ảo

Mà $z_1.\overline{z_2}$ và $\overline{z_1}z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = 2.0 = 0$

Xét $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2} = |z_1|^2+|z_2|^2$

$|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2 = 2(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}) = 0 \Rightarrow |z_1+z_2| = |z_1-z_2| = 3$

$P = |z_1+z_2-3+2i| \le |z_1+z_2|+|-3+2i| = 3+\sqrt{13} \Rightarrow \max P = 3+\sqrt{13}$

Câu 49: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2| = |z_1| = 3$ và số phức $\overline{z_1}z_2$ có phần thực bằng $\frac{9}{2}$. Giá trị lớn nhất của $P = |2z_1+z_2+1-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{7}+\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$. **D.** $6\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Lời giải

Cách 1.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2

Ta có: $\begin{cases} |z_1-z_2| = 3 \\ |z_1| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3 \\ OA = 3 \end{cases}$

$\overline{z_1}z_2$ có phần thực bằng $\frac{9}{2}$ nên $x_1x_2+y_1y_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{9}{2}$.

Ta có $AB^2 = \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2 = 9 \Leftrightarrow OB^2-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+OA^2 = 9 \Rightarrow OB = 3$

Suy ra ΔOAB đều có cạnh bằng 3.

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $2z_1$ suy ra $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$

Khi đó ΔOBC vuông tại B có $OC = 6; OB = 3$.

Gọi là I trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(OB^2+4\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+4OA^2\right) \Rightarrow OI = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

Số phức $z = 1-2i$ được biểu diễn bởi điểm $D(1;-2)$

Khi đó $P = \left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right| \le 2\left|\overrightarrow{OI}\right|+\left|\overrightarrow{OD}\right| \Rightarrow P \le 2.\frac{3\sqrt{7}}{2}+\sqrt{1^2+(-2)^2} = 3\sqrt{7}+\sqrt{5}$ Vậy $\max P = 3\sqrt{7}+\sqrt{5}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

Cách 2.

Ta có $z_1.\overline{z_2}$ và $\overline{z_1}z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = 2.\frac{9}{2} = 9$

Xét $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}) = 9 \Rightarrow |z_2|^2 = 9$

$|2z_1+z_2|^2 = (2z_1+z_2)(2\overline{z_1}+\overline{z_2}) = 4|z_1|^2+|z_2|^2+2(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}) = 63$

$P = |2z_1+z_2+1-2i| \le |2z_1+z_2|+|1-2i| = 3\sqrt{7}+\sqrt{5} \Rightarrow \max P = 3\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Câu 50: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2-1| = 3|z_1-i| = 3$ và số phức $(\overline{z_1}+i)(z_2+1-i)$ có phần thực bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1+2z_2+3-i|$ bằng

A. $\sqrt{69}+\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{69}-\sqrt{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{69}}{2}+\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{69}}{2}-\sqrt{10}$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có: $|z_1-z_2-1|=|(z_1-i)-(z_2+1-i)|$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1-i và z_2+1-i

Ta có: $|z_1-z_2-1|=3|z_1-i|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} AB=3 \\ OA=1 \end{cases}$

Xét $(\overline{z_1}+i)(z_2+1-i)=(\overline{z_1-i})(z_2+1-i)$ có phần thực bằng 3

Do đó $x_1x_2+y_1y_2=3 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=3$.

Ta có $AB^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=9 \Leftrightarrow OB^2-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+OA^2=9 \Rightarrow OB=\sqrt{14}$

$P=|z_1-i+2(z_2+1-i)+1+2i|$

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $2(z_2+1-i)$ suy ra $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}$

Khi đó ΔOAC có $OA=1; OC=2\sqrt{14}$.

Gọi là I trung điểm của AC. Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$

$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|^2=\frac{1}{4}\left(OA^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+4OB^2\right) \Rightarrow OI=\frac{\sqrt{69}}{2}$

Số phức $z=1+2i$ được biểu diễn bởi điểm $D(1;2)$

Khi đó $P=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right| \geq \left|2\left|\overrightarrow{OI}\right|-\left|\overrightarrow{OD}\right|\right| \Rightarrow P \geq 2.\frac{\sqrt{69}}{2}-\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{69}-\sqrt{5}$

Vậy $\min P=\sqrt{69}-\sqrt{5}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OD}$ ngược hướng.

Cách 2.

Ta có: $|z_1-z_2-1|=|(z_1-i)-(z_2+1-i)|$

Đặt $w_1=z_1-i$ và $w_2=z_2+1-i$

Suy ra $(\overline{z_1}+i)(z_2+1-i)=\overline{w_1}w_2$

Ta có $w_1.\overline{w_2}$ và $\overline{w_1}w_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $w_1.\overline{w_2}+\overline{w_1}w_2=2.3=6$

Xét $|w_1-w_2|^2=(w_1-w_2)(\overline{w_1}-\overline{w_2})=|w_1|^2+|w_2|^2-(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2})=9 \Rightarrow |w_2|^2=14$

$|w_1+2w_2|^2=(w_1+2w_2)(\overline{w_1}+\overline{w_2})=|w_1|^2+4|w_2|^2+2(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2})=69$

$P=|z_1-i+2(z_2+1-i)+1+2i| \leq \left||w_1+2w_2|-|1+2i|\right|=\sqrt{69}-\sqrt{5} \Rightarrow \min P=\sqrt{69}-\sqrt{5}$

Câu 51: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=2|z|=4$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P=|z-w+3-4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(7;8)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=2+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{2+bi}=2-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=4$.

Ta có:

$|z+w|=4\Rightarrow 16=|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$

$=|z|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+|w|^2+4=|w|^2+8\Rightarrow |w|=2\sqrt{2}$

$|z-w|^2=(z-w).\left(\overline{z-w}\right)=(z-w).\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=|z|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+8-4=8\Rightarrow |z-w|=2\sqrt{2}$

Khi đó: $P=|z-w+3-4i|=|(z-w)+(3-4i)|\le|z-w|+|3-4i|=2\sqrt{2}+5$.

Câu 52: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-w|=2|z|=6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 3. Giá trị lớn nhất của $P=|2z+2w-1+3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(10;12)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=3+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{3+bi}=3-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=6$.

Ta có:

$|z-w|=6\Rightarrow 36=|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$

$=|z|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=9+|w|^2-6=|w|^2+3\Rightarrow |w|=\sqrt{33}$

$|z+w|^2=(z+w).\left(\overline{z+w}\right)=(z+w).\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=|z|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=9+33+6=48$

$\Rightarrow |z+w|=4\sqrt{3}$

Khi đó: $P=|2z+2w-1+3i|=|2(z+w)+(-1+3i)|\le|2(z+w)|+|-1+3i|=8\sqrt{3}+\sqrt{10}$.

Câu 53: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=3|z|=6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 4. Giá trị lớn nhất của $P=|3z-3w+2-i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(18;20)$.

Lời giải

Đặt $\overline{z}.w=4+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{4+bi}=4-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=8$.

Ta có:

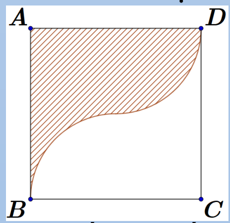
$|z+w|=6\Rightarrow 36=|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$

$=|z|^2+|w|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+|w|^2+8=|w|^2+12\Rightarrow |w|=2\sqrt{6}$

$|z-w|^2=(z-w).\left(\overline{z-w}\right)=(z-w).\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=|z|^2+|w|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+24-8=20\Rightarrow |z-w|=2\sqrt{5}$

Khi đó: $P=|3z-3w+2-i|=|3(z-w)+(2-i)|\le 3|z-w|+|2-i|=6\sqrt{5}+\sqrt{5}=7\sqrt{5}$.

Câu 48: **(Đề TK BGD 2024)** Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

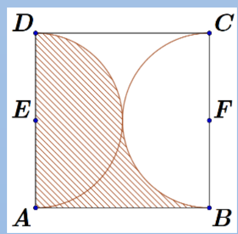


Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười

A. $20,3\ cm^3$. **B.** $10,5\ cm^3$. **C.** $12.6\ cm^3$. **D.** $8,4\ cm^3$.

Lời giải

Chọn B



Chọn AB chứa trong trục Ox và $A \equiv O(0;0)$.

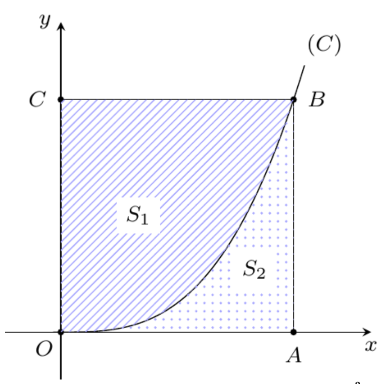
Khi đó $E(0;1)$ và $F(2;1)$ với E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Khi đó đường tròn tâm E chứa cung tròn AD là $x^2+(y-1)^2=1$ và đường tròn tâm F chứa cung tròn BC là $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là $y=\sqrt{1-x^2}+1$ và phương trình cung

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 48

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $OABC$, với $A(3;0), B(3;3), C(0;3)$. Đồ thị hàm số $y=kx^n$ (với k là số thực dương và n là số nguyên dương) chia hình vuông $OABC$ thành hai miền S_1, S_2 như hình vẽ. Khi quay hai miền S_1, S_2 xung quanh trục hoành lần lượt tạo thành hai khối tròn xoay có thể tích là V_1, V_2.

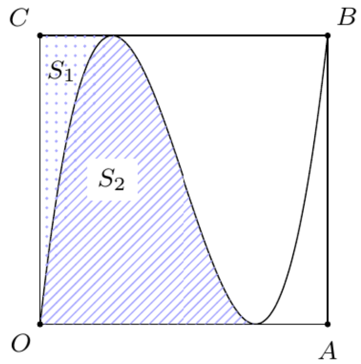


Biết $V_1=6V_2$ và đặt $T=2023n-2024k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T \in (2023;2024)$. **B.** $T \in (27;28)$.

C. $T \in (185;186)$. **D.** $T \in (5844;5845)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $OABC$, với $A(4;0), B(4;4), C(0;4)$. Một đồ thị (C) của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ đi qua hai điểm O và B, đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng OA, BC; chia hình vuông $OABC$ thành 4 phần (như hình vẽ). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của 2 miền chấm bi, gạch chéo như hình vẽ.

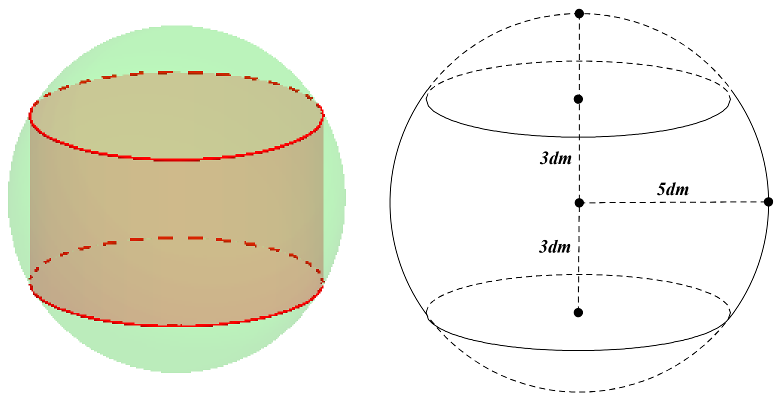


Đặt $k = \dfrac{S_2}{S_1}$ và $T = 2025k - 2024$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T \in (2023;2025)$. **B.** $T \in (27;29)$.

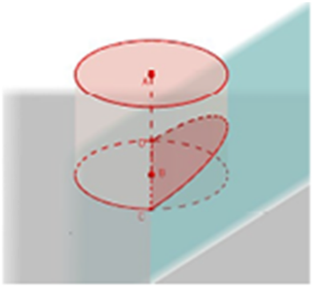
C. $T \in (8910;8912)$. **D.** $T \in (5844;5846)$.

Câu 3: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\dfrac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\dfrac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Câu 4: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $40cm$ người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 60^0 để lấy một hình nêm (Xem hình minh họa dưới đây). Ký hiệu V là thể tích của nêm (Hình 2). Tính V

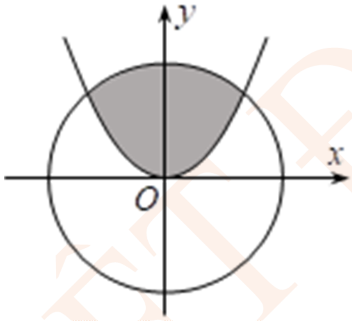


Hình 1

Hình 2

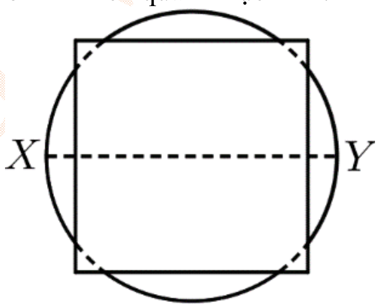
A. $V=\dfrac{400\sqrt{3}\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **B.** $V=2250\left(cm^3\right)$. **C.** $V=9237,6\left(cm^3\right)$. **D.** $V=\dfrac{3200\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Câu 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}.x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=4$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



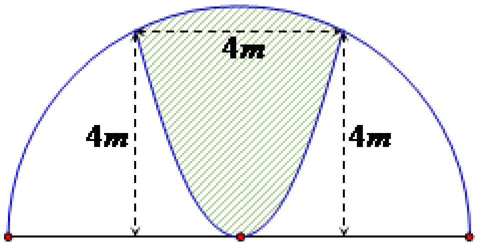
A. $V=\dfrac{92\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{25\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{27\pi}{5}$.

Câu 6: Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



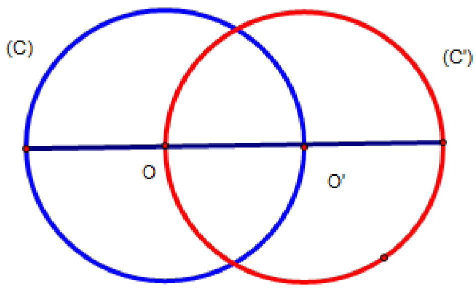
A. $V=\dfrac{260\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V=\dfrac{290\pi}{3}\text{cm}^3$. **C.** $V=\dfrac{580\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V=\dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$.

Câu 7: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}\,(m)$. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng $4(m)$, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



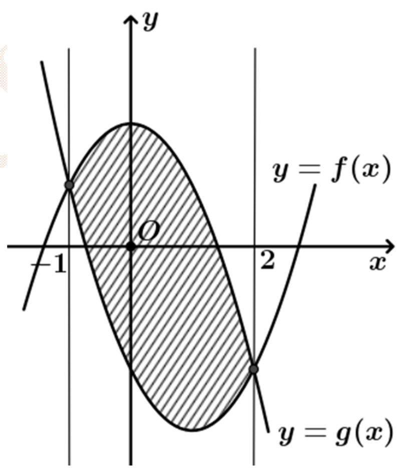
A. 3.895.000 (đồng). **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Câu 8: Cho đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm O của (C) thuộc (C') và ngược lại tâm O' của (C') thuộc (C). Khi hai đường tròn (C) và (C') quay quanh đường OO' tạo ra hai mặt cầu $(S),(S')$ Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S),(S')$ là



A. $V=\dfrac{45\pi}{4}$. **B.** $V=\dfrac{45\pi}{8}$. **C.** $V=\dfrac{45}{4}$. **D.** $V=\dfrac{45}{8}$.

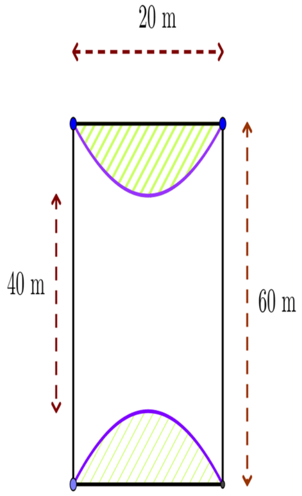
Câu 9: Gọi (D) là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)=ax^2+bx+c$ và $y=g(x)=-x^2+mx+n$ (như hình vẽ).



Biết $S_{(D)}=9$ và đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đỉnh $I(0;2)$. Khi cho miền được giới hạn bởi hai đường cong trên và hai đường thẳng $x=-1; x=2$ quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích V. Giá trị của V bằng

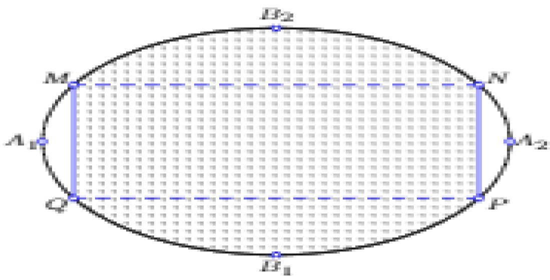
A. $\dfrac{295\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{295\pi}{19}$. **C.** $\dfrac{259\pi}{19}$. **D.** $\dfrac{259\pi}{15}$.

Câu 10: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài $60\,m$, chiều rộng $20\,m$. Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường parabol có hai đỉnh cách nhau $40\,m$ (như hình vẽ bên dưới). Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch. Biết chi phí lát gạch là 200.000 đồng/m^2 và tiền nhân công trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Tính tổng số tiền để lát gạch và trồng cỏ trên mảnh đất đó (làm tròn đến hàng nghìn).



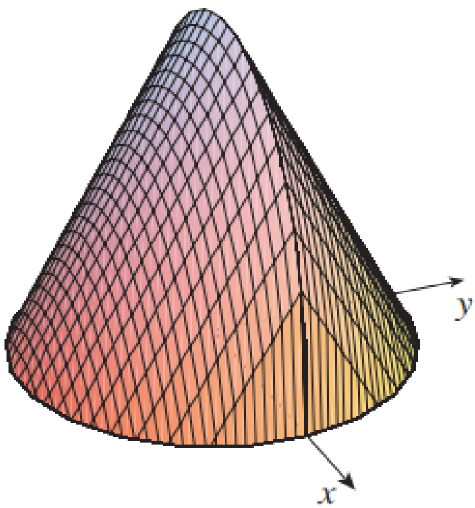
A. 133334000 đồng. **B.** 213333000 đồng. **C.** 213334000 đồng. **D.** 313333000 đồng.

Câu 9 **[Mức độ 4]** Một biển cảnh báo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ dưới phần tô màu chi phí là 150.000 đồng trên một mét vuông, phần còn lại chi phí là 100.000 đồng trên một mét vuông. Hỏi số tiền (tính theo đồng) phần tô màu gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10m, B_1B_2 = 8m$, và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4m$?



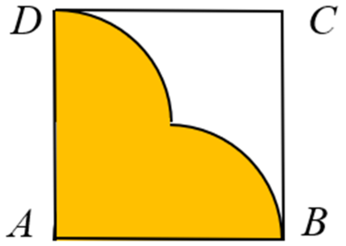
A. 9.243.000. **B.** 9.620.000. **C.** 7.330.000 **D.** 8.756.000.

Câu 11: Hình vẽ sau thể hiện một vật rắn có đáy là hình tròn bán kính bằng 1. Các mặt cắt song song, vuông góc với đáy là các tam giác đều. Tính thể tích của vật rắn đó.



A. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

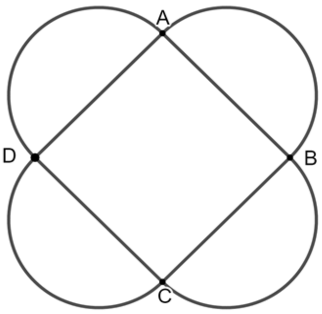
Câu 12: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.



Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

A. $10,6\text{ cm}^3$. **B.** $21,4\text{ cm}^3$. **C.** $23,4\text{ cm}^3$. **D.** $12,3\text{ cm}^3$.

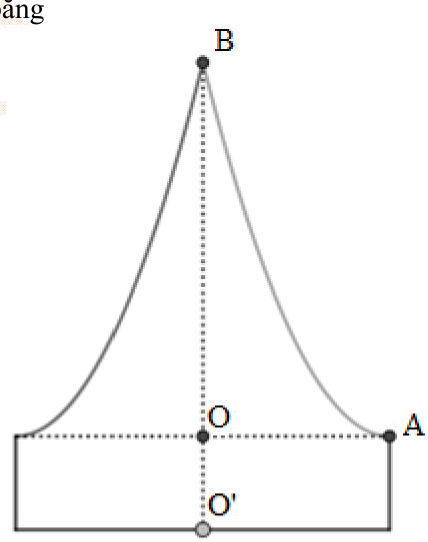
Câu 13: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC gần nhất với kết quả nào sau đây?

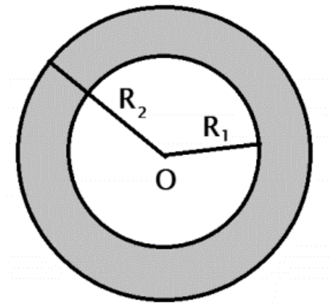
A. $72,9$. **B.** $36,5$. **C.** $73,4$. **D.** $145,9$.

Câu 14: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



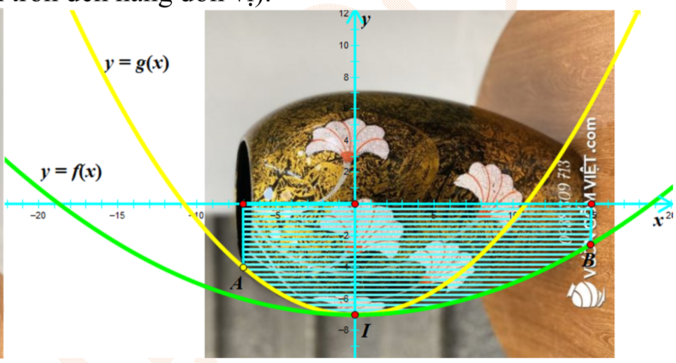
A. $\dfrac{2750\pi}{3}cm^3$. **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}cm^3$. **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}cm^3$. **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}cm^3$.

Câu 15: Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



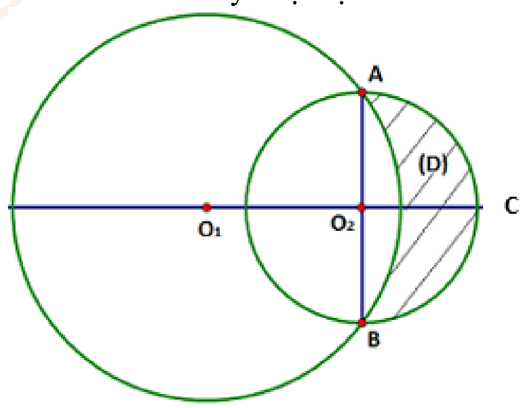
A. $1250\pi^2\ cm^3$ **B.** $1400\pi^2\ cm^3$ **C.** $2500\pi^2\ cm^3$ **D.** $600\pi^2\ cm^3$

Câu 16: Để tính thể tích lọ gốm, người ta xấp xỉ nó bởi khối tròn xoay sinh bởi phần hình phẳng (phần gạch ngang) giới hạn bởi hai hàm bậc hai $y=f(x)$ và $y=g(x)$ như hình vẽ. Biết tọa độ đỉnh của hai parabol là $I(0;-7)$, điểm $A(-7;-4,06)$ thuộc đồ thị $y=g(x)$ và điểm $B(15;-2,5)$ thuộc đồ thị $y=f(x)$. Tính thể tích xấp xỉ của lọ gốm (làm tròn đến hàng đơn vị).



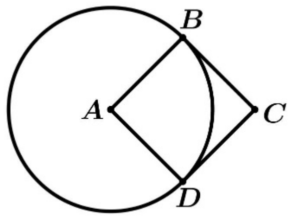
A. $3355\ cm^3$ **B.** $3120\ cm^3$ **C.** $3580\ cm^3$ **D.** $3225\ cm^3$

Câu 17: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



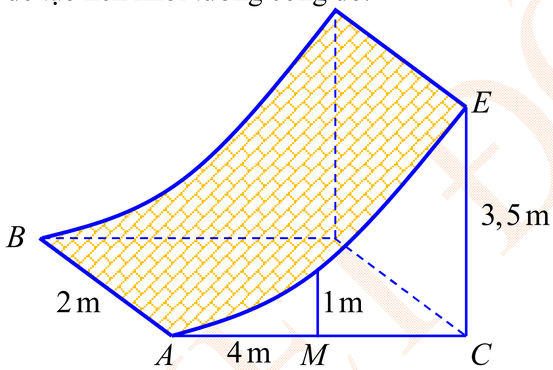
A. $V=\dfrac{40\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{14\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{68\pi}{3}$. **D.** $V=36\pi$.

Câu 18: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn (*hình vẽ bên dưới*). Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó.



A. $\dfrac{\left(16+24\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\left(16+12\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\left(28+16\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\left(12+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Câu 19: Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4\,\text{m}$, $CE = 3,5\,\text{m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao $1\,\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.

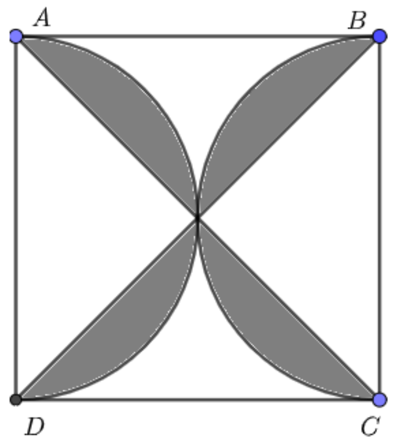


A. $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

Câu 20: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0,8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Thùng đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

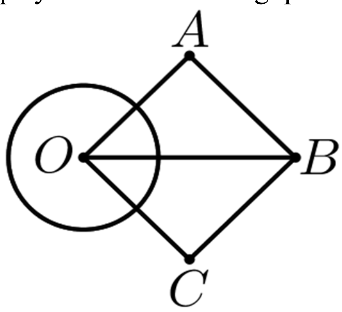
A. $V = 1,52\text{m}^3$. **B.** $V = 1,31\text{m}^3$. **C.** $V = 1,27\text{m}^3$. **D.** $V = 1,19\text{m}^3$.

Câu 21: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



A. $V = 7,18\,cm^2$. **B.** $V = 57,38\,cm^2$. **C.** $V = 28,69\,cm^2$. **D.** $V = 14,36\,cm^2$

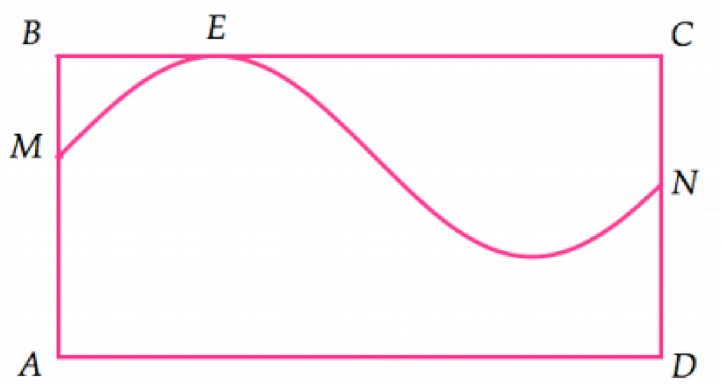
Câu 22: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R = 2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.



A. $V = \dfrac{8\left(3+4\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{8\left(2+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

C. $V = \dfrac{8\left(3+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{32\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Câu 23: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30\,cm, AD = \dfrac{55\pi}{3}\,cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20\,cm$, $CN = 15\,cm$, $BE = 5\pi\ cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

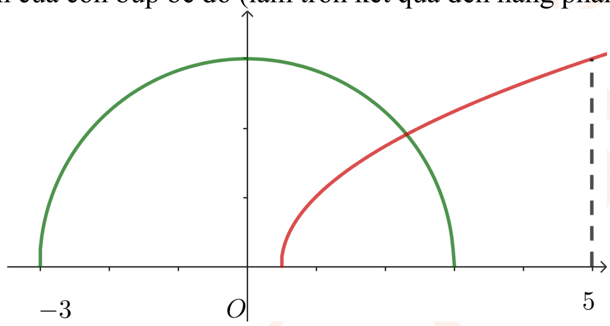


A. $81788\,cm^3$. **B.** $87388\,cm^3$. **C.** $83788\,cm^3$. **D.** $7883\,cm^3$.

Câu 24: Trong đợt tổ chức HKPĐ cấp tỉnh lần thứ XIV, ban tổ chức thiết kế một cổng chào bằng phao chứa không khí ở bên trong, có hình dạng như một nửa cái Săm ô tô khi bơm căng (*tham khảo hình vẽ*). Cổng chào có chiều cao so với mặt sân là $9m$ (tính cả phần phao chứa không khí), phần chân của cổng chào tiếp xúc với mặt sân theo một đường tròn có đường kính là $2m$ và bề rộng của cổng chào là $18m$ (tính cả phần phao chứa không khí). Bỏ qua độ dày của lớp vỏ cổng chào, mặt sân coi là bằng phẳng. Tính thể tích không khí chứa bên trong cổng chào.

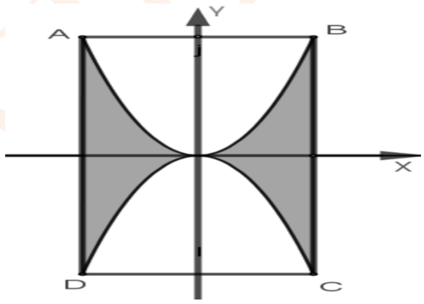
A. $9\pi^2\left(m^3\right)$. **B.** $18\pi^2\left(m^3\right)$. **C.** $8\pi^2\left(m^3\right)$. **D.** $16\pi^2\left(m^3\right)$.

Câu 25: Một con búp bê cầu mưa có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục Ox. Miền (R) được giới hạn bởi nửa đường tròn và một phần của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x-1}\,(1\le x\le 5)$ như trong hình vẽ. Tính thể tích của con búp bê đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười



A. $51,7\ cm^3$. **B.** $162,3\ cm^3$. **C.** $62,6\ cm^3$. **D.** $157,1\ cm^3$.

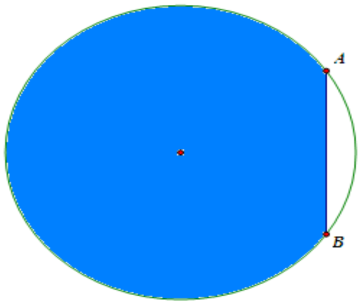
Câu 26: Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.Cho $AB=4dm; BC=8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

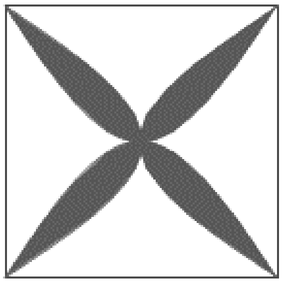
A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Câu 27: Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB=6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



A. 3722 nghìn đồng. **B.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **D.** 3723 nghìn đồng.

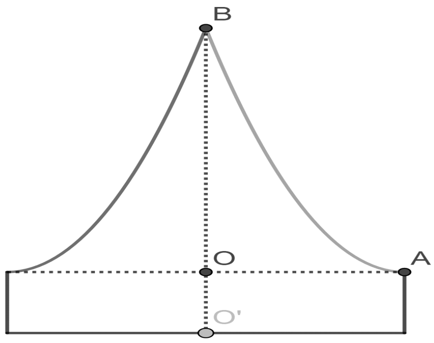
Câu 28: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

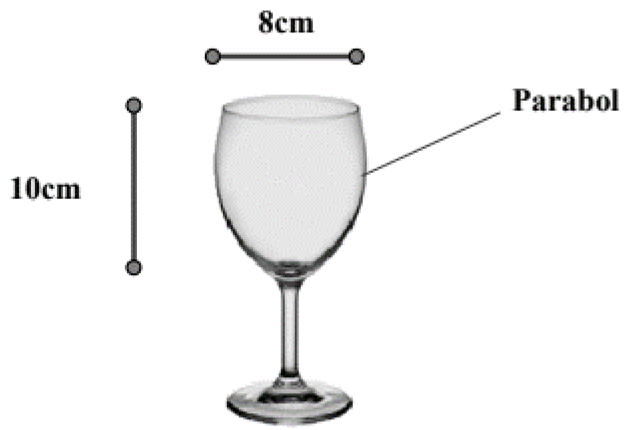
A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Câu 29: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



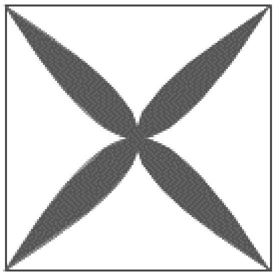
A. $\frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 30: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân).



A. $V=320\,\text{cm}^3$. **B.** $V=1005,31\,\text{cm}^3$. **C.** $V=251,33\,\text{cm}^3$. **D.** $V=502,65\,\text{cm}^3$.

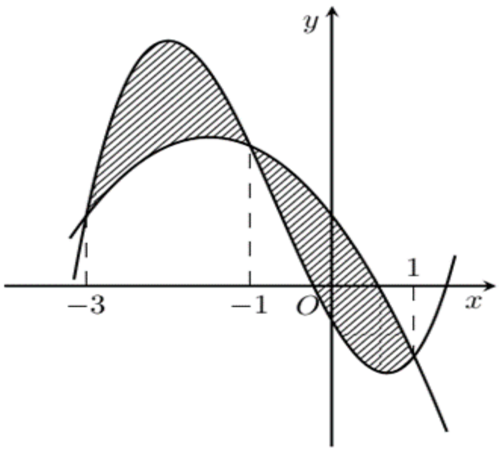
Câu 31: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



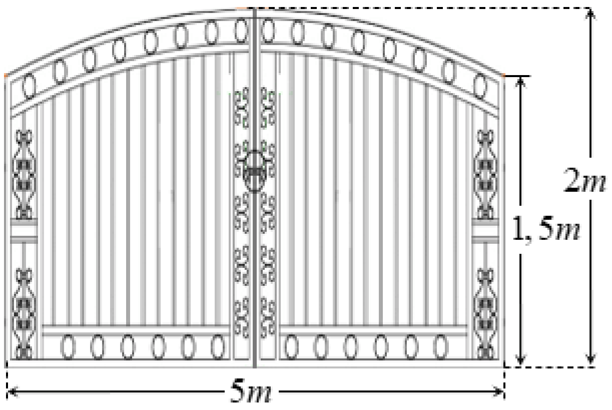
Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 33: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là 1600π(cm^2), chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống gần với giá trị nào trong 4 giá trị sau?

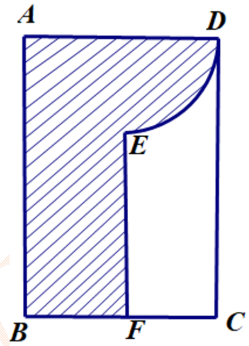
A. $425,2$ (lít). **B.** $42,52$ (lít). **C.** $4,252$ (lít). **D.** $212,5$ (lít).

Câu 34: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1 (m2) của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).



A. 6.520.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.417.000 đồng. **D.** 6.620.000 đồng.

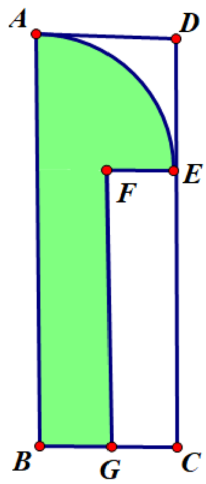
Câu 35: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

A. $16,4cm^3$. **B.** $16,5cm^3$. **C.** $5,2cm^3$. **D.** $3,8cm^3$.

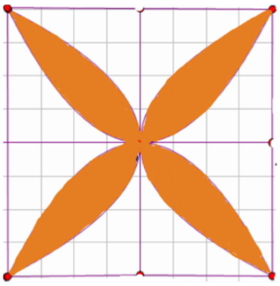
Câu 36: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 20mm$, $AD = 6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$



Thể tích của đinh tán là (quy tròn đến hàng phần mười)

A. $270mm^3$. **B.** $848,2mm^3$. **C.** $220,8mm^3$. **D.** $584,3mm^3$.

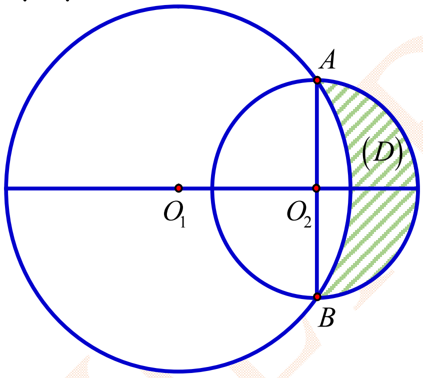
Câu 37: Một viên gạch hoa hình vuông có cạnh bằng $80cm$. Người ta thiết kế sử dụng 4 đường parabol cùng chung đỉnh tại tâm của viên gạch và đi qua hai đỉnh kề nhau của viên gạch để tạo thành bông hoa như hình vẽ.



Diện tích của bông hoa (phần tô đậm trong hình vẽ) là

A. $\frac{64}{3}dm^2$. **B.** $\frac{16}{3}dm^2$. **C.** $16dm^3$. **D.** $64dm^3$.

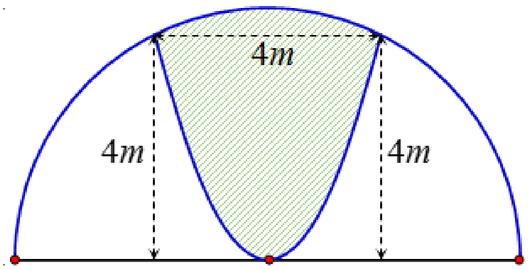
Câu 38: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn **(ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ)**. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V=\frac{14\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{68\pi}{3}$.

C. $V=\frac{40\pi}{3}$. **D.** $V=36\pi$.

Câu 39: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.

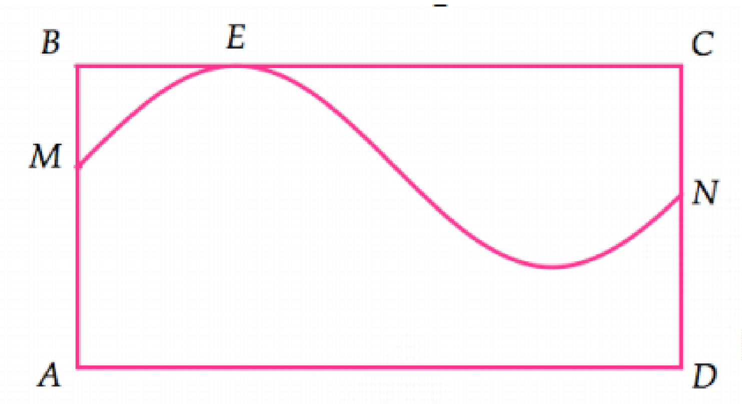


Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 2.388.000 (đồng). **B.** 3.895.000 **(đồng).**

C. 1.194.000 (đồng). **D.** 1.948.000 (đồng).

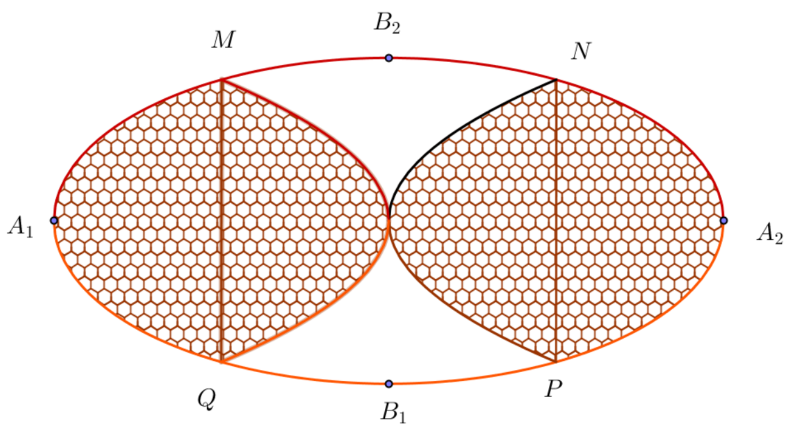
Câu 40: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30\,cm, AD=\dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM=20\,cm, CN=15\,cm$, $BE=5\pi\ cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD



(kết quả làm tròn đến hàng trăm).

A. $81788\,cm^3$.
B. $87388\,cm^3$
C. $83788\,cm^3$
D. $7883\,cm^3$

Câu 41: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M,N,P,Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN=4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\,\mathrm{m}$, $B_1B_2=4\,\mathrm{m}$?

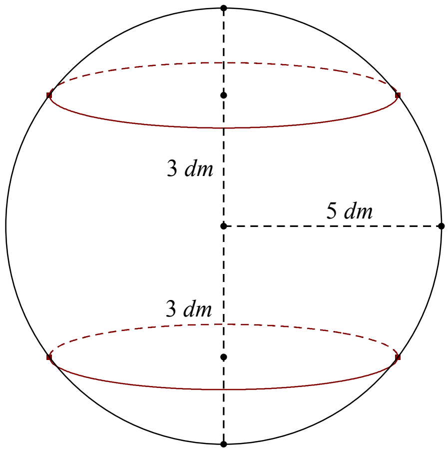


A. $4.889.000$ đồng.
B. $5.675.000$ đồng.
C. $3.526.000$ đồng.
D. $7.120.000$ đồng.

Câu 42: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60^0. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng.

A. $\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.
B. $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.
C. $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.
D. $\left(\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

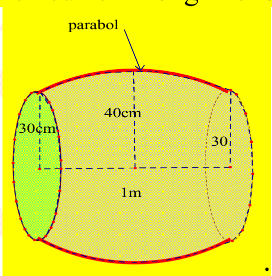
Câu 43: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính $5\ \text{dm}$ bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu $3\ \text{dm}$. Tính thể tích của chiếc lu.



A. $41\pi\left(\text{dm}^3\right)$. **B.** $132\pi\left(\text{dm}^3\right)$

C. $43\pi\left(\text{dm}^3\right)$ **D.** $\dfrac{100}{3}\pi\left(\text{dm}^3\right)$

Câu 44: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?



A. $425,2$ (lít). **B.** 425162 (lít).

C. $212,6$ (lít). **D.** 212581 (lít).

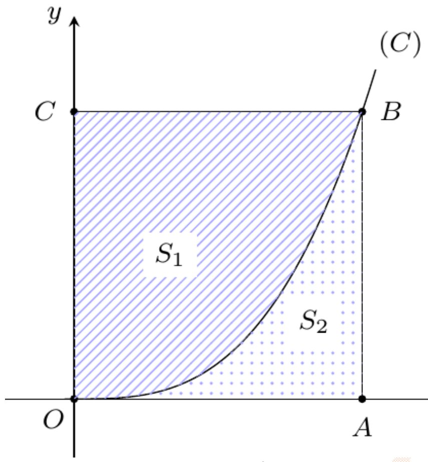
Câu 45: Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 180000 đồng. **B.** 183000 đồng.

C. 185000 đồng. **D.** 190000 đồng..

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $OABC$, với $A(3;0), B(3;3), C(0;3)$. Đồ thị hàm số $y = kx^n$ (với k là số thực dương và n là số nguyên dương) chia hình vuông $OABC$ thành hai miền S_1, S_2 như hình vẽ. Khi quay hai miền S_1, S_2 xung quanh trục hoành lần lượt tạo thành hai khối tròn xoay có thể tích là V_1, V_2.



Biết $V_1 = 6V_2$ và đặt $T = 2023n - 2024k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T \in (2023; 2024)$. **B.** $T \in (27; 28)$.

C. $T \in (185; 186)$. **D.** $T \in (5844; 5845)$.

Lời giải

Đường thẳng BC có phương trình là $y = 3$.

Khi quay hình vuông $OABC$ xung quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi\int_0^3 3^2 \mathrm{d}x = 27\pi \text{ (đvtt).}$$

Suy ra $V_1 + V_2 = 27\pi$.

Mà $V_1 = 6V_2$ nên $7V_2 = 27\pi \Rightarrow V_2 = \frac{27}{7}\pi$ (đvtt).

Ta lại có $V_2 = \pi\int_0^3 (kx^n)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^3 k^2x^{2n} \mathrm{d}x = \left.\frac{\pi k^2 x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^3 = \frac{\pi k^2 \cdot 3^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi k^2 \cdot 3^{2n} \cdot 3}{2n+1} = \frac{\pi (k \cdot 3^n)^2 \cdot 3}{2n+1}$.

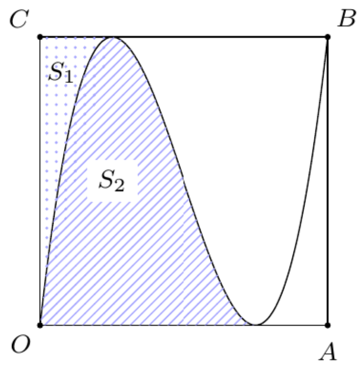
Hay $\frac{\pi (k \cdot 3^n)^2 \cdot 3}{2n+1} = \frac{27}{7}\pi \Leftrightarrow \frac{(k \cdot 3^n)^2}{2n+1} = \frac{9}{7}$ (*)

Mặt khác đồ thị (C) đi qua điểm $B(3;3)$ nên suy ra $3 = k \cdot 3^n$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \frac{9}{2n+1} = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 2n+1 = 7 \Leftrightarrow n = 3$. Suy ra $k = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$.

Và $T = 2023n - 2024k = 2023 \cdot 3 - 2024 \cdot \frac{1}{9} = \frac{52597}{9} \approx 5844,11$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $OABC$, với $A(4;0), B(4;4), C(0;4)$. Một đồ thị (C) của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ đi qua hai điểm O và B, đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng OA, BC; chia hình vuông $OABC$ thành 4 phần (như hình vẽ). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của 2 miền chấm bi, gạch chéo như hình vẽ.



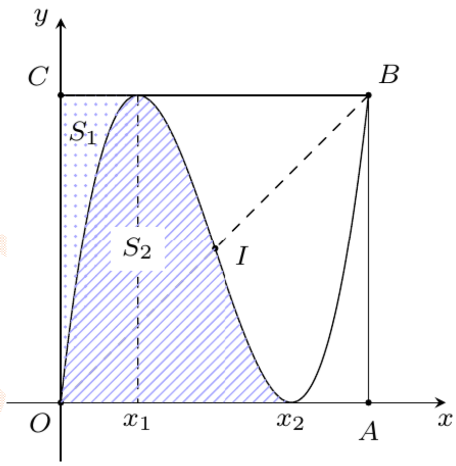
Đặt $k=\dfrac{S_2}{S_1}$ và $T=2025k-2024$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T\in(2023;2025)$. **B.** $T\in(27;29)$.

C. $T\in(8910;8912)$. **D.** $T\in(5844;5846)$.

Lời giải

Ta đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ O nên $d=0$.

Giả sử hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ có hai điểm cực trị x_1, x_2.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$ax^3+bx^2+cx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ax^2+bx+c=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) sẽ có nghiệm kép $x=x_2$ nên $x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $(BC): y=4$ là

$$ax^3+bx^2+cx=4\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx-4=0\quad(2)$$

Phương trình (2) sẽ có 1 nghiệm $x=4$ và 1 nghiệm kép $x=x_1$ nên theo định lí Vi-ét ta được

$4+x_1+x_1=-\dfrac{b}{a}\Rightarrow x_1=-\dfrac{b}{2a}-2$ hay $x_1=x_2-2$ (3)

Mặt khác do tính chất đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba nên đồ thị (C) đi qua tâm $I(2;2)$ của hình vuông $OABC$, (điểm I chính là điểm uốn của đồ thị (C)) nên $x_1 + x_2 = 2x_I = 4$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$.

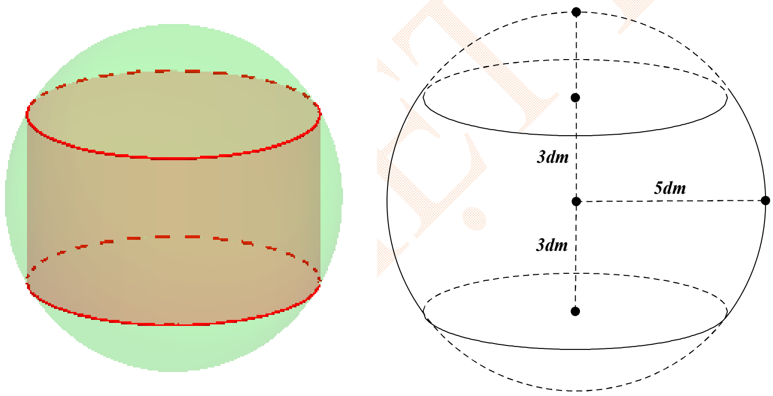
Khi đó đồ thị (C) đi qua 3 điểm $B(4;4), I(2;2), M(3;0)$ nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases} 64a + 16b + 4c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 2 \\ 27a + 9b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$. Suy ra $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Hay $S_1 = \int_0^1 \left(4 - x^3 + 6x^2 - 9x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{5}{4}$ (đvdt) và $S_2 = \int_0^3 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{27}{4}$ (đvdt).

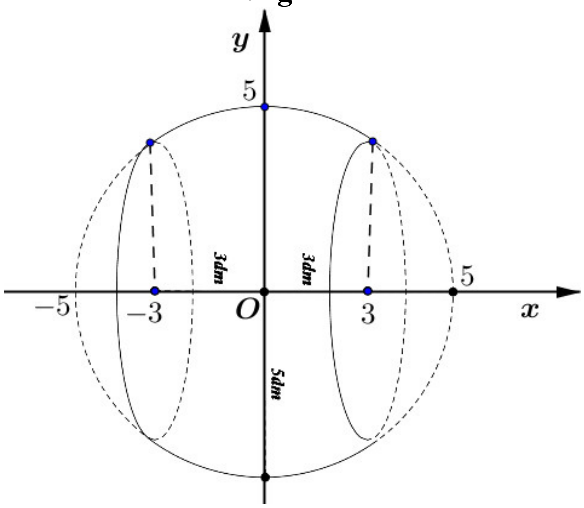
Suy ra $k = \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{27}{5}$ và $T = 2025 \cdot \dfrac{27}{5} - 2024 = 8911$.

Câu 3: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\dfrac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\dfrac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Lời giải



Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=-3,\ x=3$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là chiếc lu đựng nước.

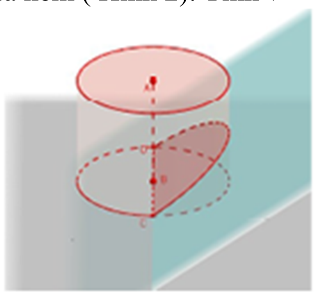
Ta có : $x^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_{-3}^{3}\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}=132\pi.$$

Câu 4: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $40cm$ người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 60^0 để lấy một hình nêm (Xem hình minh họa dưới đây). Ký hiệu V là thể tích của nêm (Hình 2). Tính V

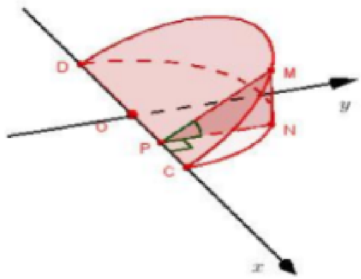


Hình 1

Hình 2

A. $V=\dfrac{400\sqrt{3}\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **B.** $V=2250\left(cm^3\right)$. **C.** $V=9237{,}6\left(cm^3\right)$. **D.** $V=\dfrac{3200\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{20^2-x^2}, x\in[-20;20]$.

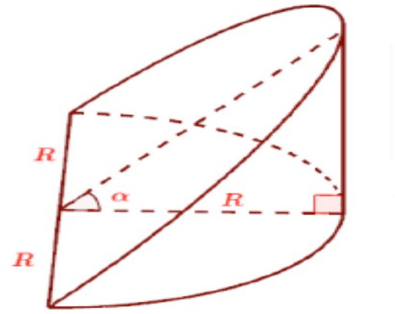
Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox (cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x) cắt hình nêm theo thiết diện là tam giác MNP vuông tại N có diện tích $S(x)$. Khi đó, ta có

$$NP=y=\sqrt{400-x^2}, MN=NP.\tan 60^0=y\sqrt{3}=\sqrt{3}.\sqrt{400-x^2}.$$

Khi đó $S(x)=\dfrac{1}{2}MN.NP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(400-x^2\right)$.

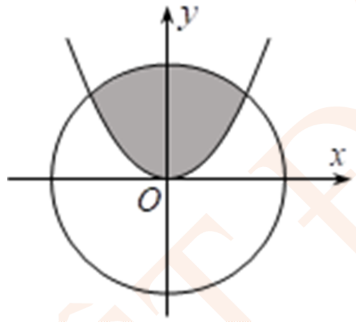
Thể tích hình nêm là: $V=\displaystyle\int_{-20}^{20}S(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-20}^{20}\left(400-x^2\right)dx=\frac{32000\sqrt{3}}{6}\simeq 9237{,}6\left(cm^3\right)$.

Chú ý: ta sử dụng công thức tính thể tích hình nêm:



$V=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha=\frac{2}{3}.20^3.\tan 60^0=9237,6\left(cm^3\right)$.

Câu 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}.x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=4$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



A. $V=\frac{92\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{25\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{27\pi}{5}$.

Lời giải

Với $y=\sqrt{3}.x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được

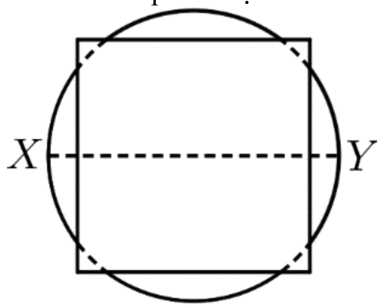
$$x^2+3x^4=4\Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-\frac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Hơn nữa $x^2+y^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\sqrt{4-x^2}\\y=\sqrt{4-x^2}\end{array}\right.$.

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng $(H_1):\begin{cases}y=\sqrt{4-x^2}\\x=-1\\x=1\\Ox\end{cases}$ quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng $(H_2):\begin{cases}y=\sqrt{3}.x^2\\x=-1\\x=1\\Ox\end{cases}$ quay quanh Ox.

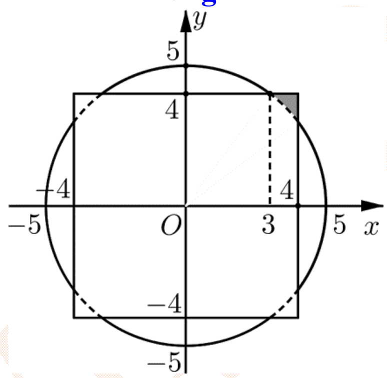
Do đó $V=\pi\left[\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{3}.x^2\right)^2\mathrm{d}x\right]=\dfrac{92\pi}{15}$.

Câu 6: Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng $8\mathrm{cm}$ và một hình tròn có bán kính $5\mathrm{cm}$ được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V=\dfrac{260\pi}{3}\mathrm{cm}^3$. **B.** $V=\dfrac{290\pi}{3}\mathrm{cm}^3$. **C.** $V=\dfrac{580\pi}{3}\mathrm{cm}^3$. **D.** $V=\dfrac{520\pi}{3}\mathrm{cm}^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Thể tích khối cầu $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi 5^3=\dfrac{500\pi}{3}$.

Ta có phương trình đường tròn có dạng: $x^2+y^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{25-x^2}\\y=-\sqrt{25-x^2}\end{array}\right.$

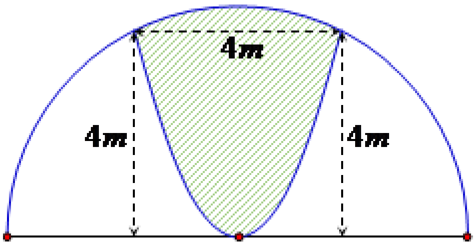
Giao điểm giữa đường tròn $y=\sqrt{25-x^2}$ và đường thẳng $y=4$ tại điểm $A(3;4),B(-3;4)$

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị các hàm số: $y=4,\ y=\sqrt{25-x^2}$, $x=4$ và $x=3$ khi quay quanh trục hoành:

$\Rightarrow V_2=\pi\int\limits_{3}^{4}\left|4^2-\left(25-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{10\pi}{3}$.

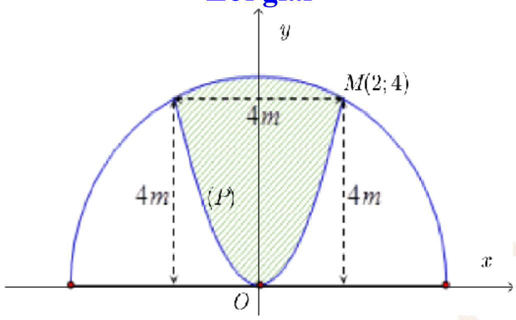
Vậy thể tích cần tính: $V=V_1+2V_2=\dfrac{520\pi}{3}\mathrm{cm}^3$.

Câu 7: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}\,(m)$. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng $4(m)$, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 3.895.000 (đồng). **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2 \Rightarrow a=1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn (phần kẻ sọc).

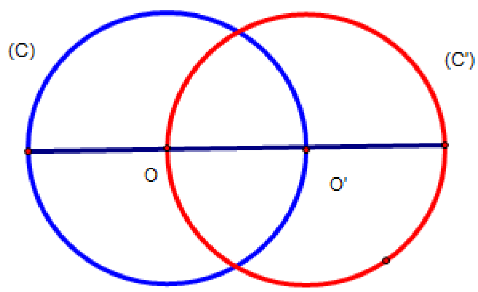
Ta có công thức $S_1=\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx \approx 11,94\,m^2$.

Diện tích hình tròn là: $S_2=\pi.\left(2\sqrt{5}\right)^2=20\pi\left(m^2\right)$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S=\frac{1}{2}S_2-S_1\approx 19,47592654\ m$

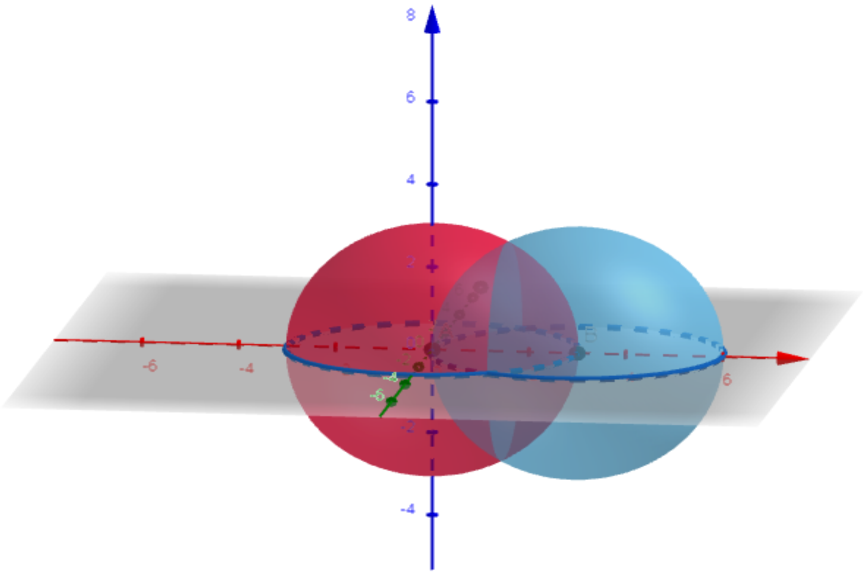
Vậy số tiền cần có là $S\times 100000\approx 1.948.000$ (đồng).

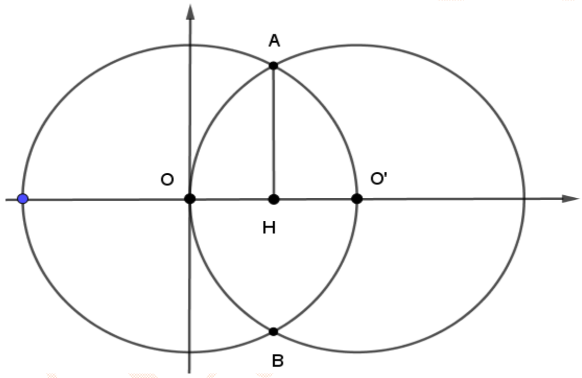
Câu 8: Cho đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm O của (C) thuộc (C') và ngược lại tâm O' của (C') thuộc (C). Khi hai đường tròn (C) và (C') quay quanh đường OO' tạo ra hai mặt cầu $(S),(S')$ Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S),(S')$ là



A. $V=\frac{45\pi}{4}$. **B.** $V=\frac{45\pi}{8}$. **C.** $V=\frac{45}{4}$. **D.** $V=\frac{45}{8}$.

Lời giải





Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần hình phẳng AHO' quay quanh trục OO'.

Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn $C(O;3)$ là : $x^2+y^2=9 \Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}$,

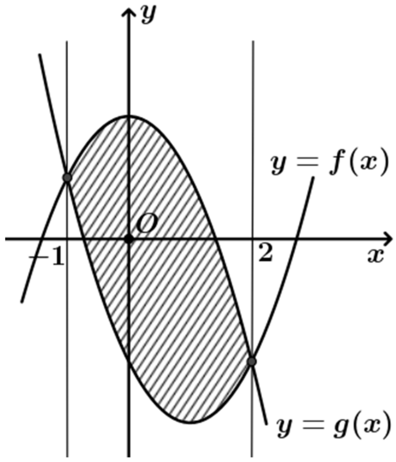
Do $OO'=3$ suy ra điểm H có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên

Hình phẳng AHO' giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y=\sqrt{9-x^2} \\ y=0 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=3 \end{cases}$ khi quay quanh trục Ox tạo ra khối

tròn xoay có thể tích là $V_1=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\frac{45}{8}\pi$

Thì thể tích phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$ là : $V=2V_1=\frac{45}{4}\pi$

Câu 9: Gọi (D) là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)=ax^2+bx+c$ và $y=g(x)=-x^2+mx+n$ (như hình vẽ).



Biết $S_{(D)}=9$ và đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đỉnh $I(0;2)$. Khi cho miền được giới hạn bởi hai đường cong trên và hai đường thẳng $x=-1;x=2$ quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích V. Giá trị của V bằng

A. $\frac{295\pi}{15}$. **B.** $\frac{295\pi}{19}$. **C.** $\frac{259\pi}{19}$. **D.** $\frac{259\pi}{15}$.

Lời giải

Parabol $y=g(x)$ có đỉnh $I(0;2)$ suy ra $m=0;\ n=2 \Rightarrow y=g(x)=-x^2+2$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$ax^2+bx+c=-x^2+2 \Leftrightarrow (a+1)x^2+bx+c-2=0 \quad (1)$$

Dựa vào hình vẽ, ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cũng có dạng là $(a+1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow (a+1)(x^2-x-2)=0 \quad (2)$

Ta có $S_{(D)}=9 \Leftrightarrow \int_{-1}^{2}\left|(a+1)(x^2-x-2)\right|\mathrm{d}x=9 \Leftrightarrow \frac{9}{2}|a+1|=9 \Leftrightarrow a+1=2 \Leftrightarrow a=1$

Với $a=1$ từ (1) và (2) ta suy ra: $2x^2+bx+c-2=2x^2-2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=-2 \end{cases}$

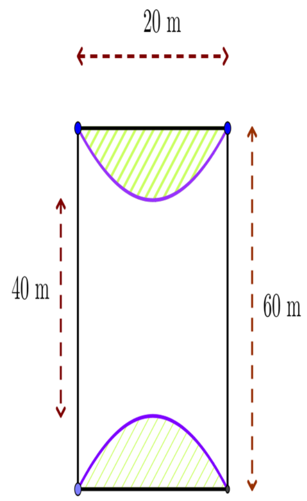
Vì hai đường $y=f(x)=x^2-2x-2$ và $y=g(x)=-x^2+2$ nằm khác phía trục Ox nên ta lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-2x-2$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y=-(x^2-2x-2)=-x^2+2x+2$.

Xét $-x^2+2-(-x^2+2x+2)=-2x \Rightarrow \begin{cases} -x^2+2 \ge -x^2+2x+2>0, \forall x\in[-1;0] \\ 0<-x^2+2 \le -x^2+2x+2, \forall x\in[0;2] \end{cases}$

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_{-1}^{0}(-x^2+2)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_{0}^{2}(-x^2+2x+2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{259\pi}{15}.$$

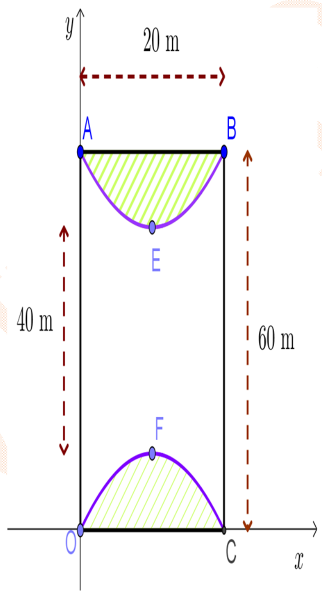
Câu 10: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài $60\,m$, chiều rộng $20\,m$. Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường parabol có hai đỉnh cách nhau $40\,m$ (như hình vẽ bên dưới). Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch. Biết chi phí lát gạch là 200.000 đồng/m^2 và tiền nhân công trồng cỏ là 100.000 đồng/m^2. Tính tổng số tiền để lát gạch và trồng cỏ trên mảnh đất đó (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 133334000 đồng. **B.** 213333000 đồng. **C.** 213334000 đồng. **D.** 313333000 đồng.

Lời giải

Lập hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các điểm: $O(0;0), A(0;60), B(20;60), C(20;0); E(10;50); F(10;10)$

* Parabol (P) có đỉnh $F(10;10)$, có phương trình dạng: $y = a(x-10)^2 + 10$

(P) đi qua $C(20;0) \Leftrightarrow a.(20-10)^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{10}$

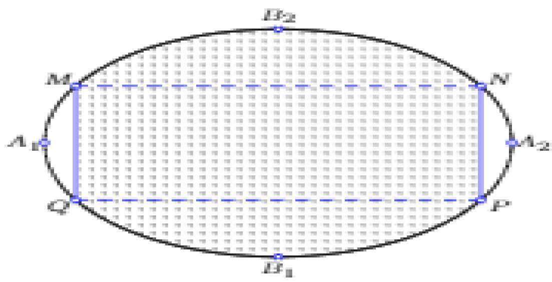
Vậy $(P): y = -\frac{1}{10}(x-10)^2 + 10$

* Diện tích trồng cỏ là $S = 2\int_0^{20}\left[-\frac{1}{10}(x-10)^2 + 10\right]dx = \frac{800}{3}(m^2)$

* Diện tích lát gạch: $S_g = 20.60 - S = 1200 - \frac{800}{3} = \frac{2800}{3}(m^2)$

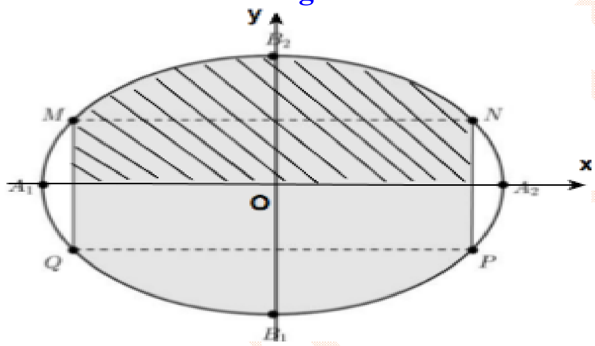
* Tổng số tiền để lát gạch và trồng cỏ là: $\frac{2800}{3}.200000 + \frac{800}{3}.100000 \approx 213333000$ đồng.

Câu 9 **[Mức độ 4]** Một biển cảnh báo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ dưới phần tô màu chi phí là 150.000 đồng trên một mét vuông, phần còn lại chi phí là 100.000 đồng trên một mét vuông. Hỏi số tiền (tính theo đồng) phần tô màu gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10m, B_1B_2 = 8m$, và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4m$?



A. 9.243.000. **B.** 9.620.000. **C.** 7.330.000 **D.** 8.756.000.

Lời giải



Gọi elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Theo giả thiết ta có : $\begin{cases} A_1A_2 = 10 \\ B_1B_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}.$

Suy ra (E): $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$

Diện tích của elip (E) là:

$S_E = \pi ab = 20\pi\left(m^2\right)$

Mà $MQ = 4 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với :

$d: y = 2 \Rightarrow M(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}; 2), N(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}; 2)$

Khi đó diện tích phần không tô màu là:

$S = 4\displaystyle\int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right)dx = \dfrac{20}{3}\pi - 10\sqrt{3}(m^2)$

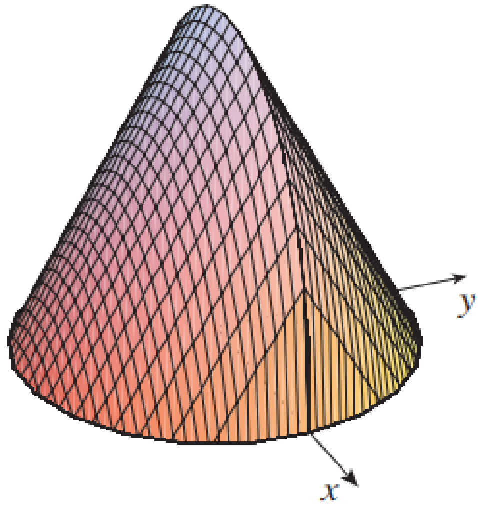
Vậy diện tích phần tô màu là:

$S' = S_E - S = 20\pi - \dfrac{20}{3}\pi + 10\sqrt{3} = \dfrac{40}{3}\pi + 10\sqrt{3}(m^2)$

Nên tổng chi phí để tô màu là

$T = 150000.(\dfrac{40}{3}\pi + 10\sqrt{3}) + 100000.(\dfrac{20}{3}\pi - 10\sqrt{3}) \approx 9.243.000$

Câu 11: Hình vẽ sau thể hiện một vật rắn có đáy là hình tròn bán kính bằng 1. Các mặt cắt song song, vuông góc với đáy là các tam giác đều. Tính thể tích của vật rắn đó.

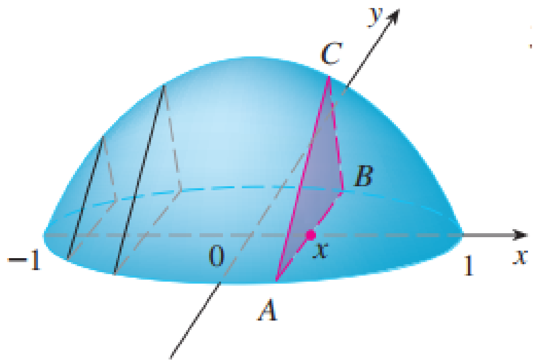


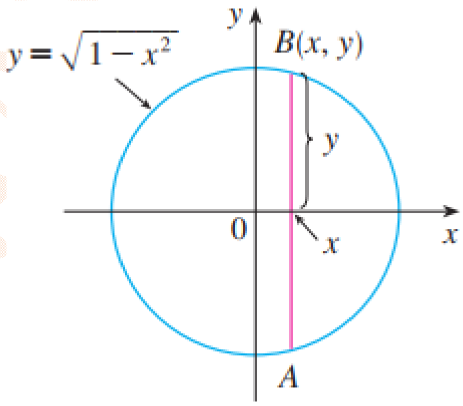
A. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

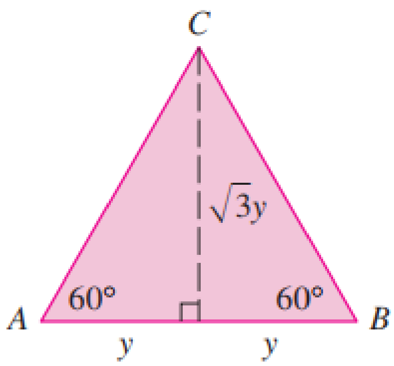
Lời giải

Trên mặt phẳng đáy của vật rắn, chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O là tâm đường tròn đáy. Khi đó đường tròn đáy bán kính bằng 1 nên có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Cắt vật rắn bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 < x < 1)$, thì thiết diện là một tam giác đều ABC như hình vẽ.







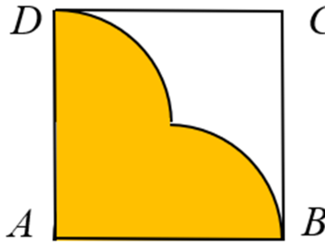
Ta có $B(x;y)$ với $y = \sqrt{1-x^2}$.

Tam giác ABC đều có cạnh $AB = 2y = 2\sqrt{1-x^2}$, đường cao $\sqrt{3}.y = \sqrt{3}.\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2}.\sqrt{3}.\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}\left(1-x^2\right)$.

Thể tích của vật rắn là $V = \int\limits_{-1}^{1} S(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3}\left(1-x^2\right)dx = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

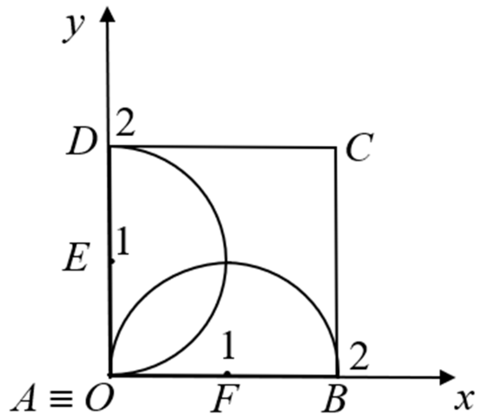
Câu 12: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.



Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

A. $10,6\text{ cm}^3$.   **B.** $21,4\text{ cm}^3$.   **C.** $23,4\text{ cm}^3$.   **D.** $12,3\text{ cm}^3$.

Lời giải



Chọn trục Ox chứa điểm B, trục Oy chứa điểm D, và gốc tọa độ O trùng điểm A (như hình vẽ).

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB. Khi đó $E(0;1), F(1;0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0;1)$ và đường kính $AD=2$ là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$

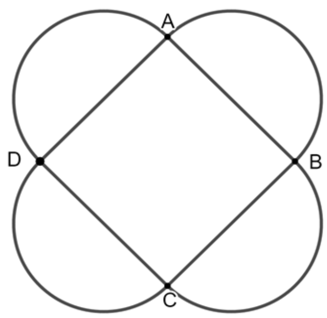
*Phương trình đường tròn có tâm $F(1;0)$ và đường kính $AB=2$ là: $(x-1)^2+y^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$

Vậy, thể tích vật trang trí là:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2.dx+\pi\int_1^2\left(1-(x-1)^2\right).dx\approx 12,3\left(\text{cm}^3\right)$$

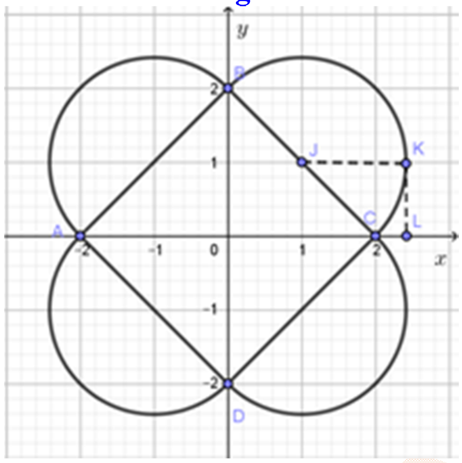
Câu 13: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $72,9$. **B.** $36,5$. **C.** $73,4$. **D.** $145,9$.

Lời giải



• Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có: $J(1;1), K(\sqrt{2}+1;1), L(\sqrt{2}+1;0), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm $J(1;1)$ bán kính $JB=\sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1+\sqrt{1+2x-x^2}, \quad \text{khi } y\ge 1 \\ y=-\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1-\sqrt{1+2x-x^2}, \text{ khi } y<1 \end{array}\right.$$

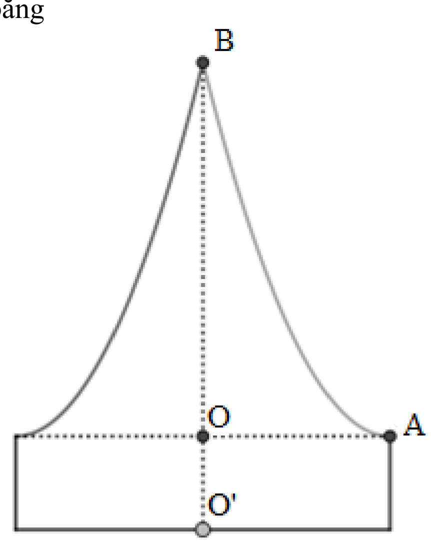
• Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1+\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=0$, $x=1+\sqrt{2}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1-\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=2$, $x=1+\sqrt{2}$.

• Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

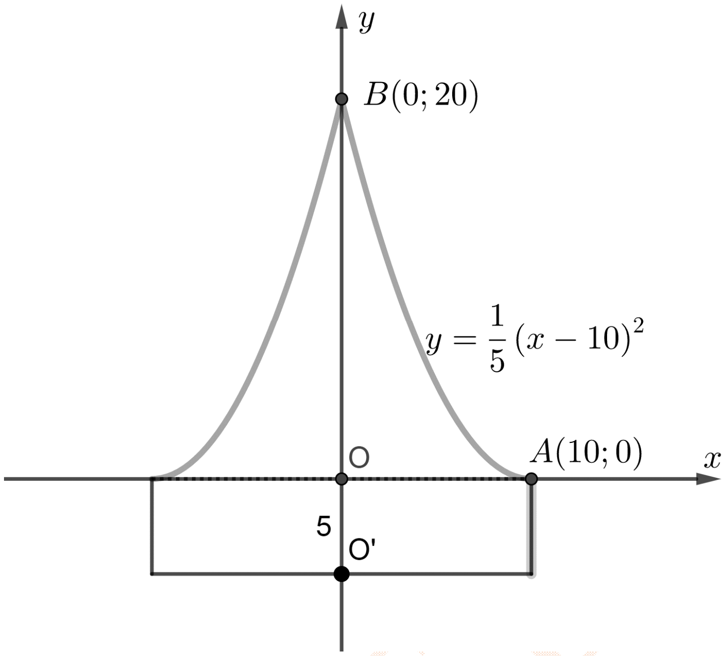
$$V=2\left[V_{(H_1)}-V_{(H_2)}\right]=2\left[\pi\int_0^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^{1+\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\approx 72,989 \text{ (đvtt).}$$

Câu 14: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}cm^3$. **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}cm^3$. **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}cm^3$. **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}cm^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.
Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.
Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi \ (\text{cm}^3)$.

Do parabol có đỉnh $A(10;0)$ nên parabol có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

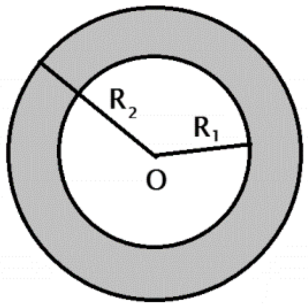
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x \le 10$).

Suy ra $V_2 = \pi\displaystyle\int_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi \ (\text{cm}^3)$.

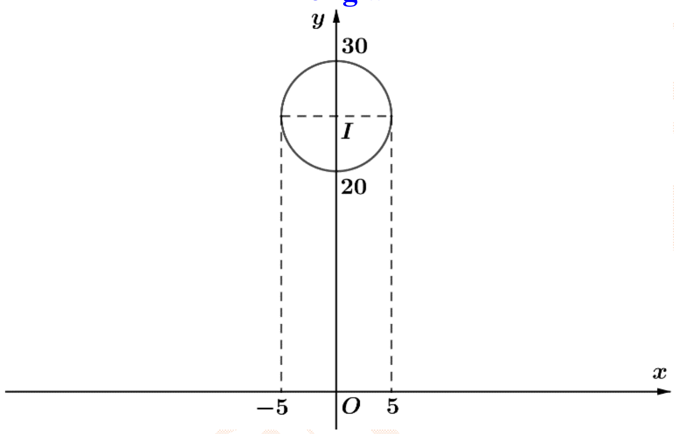
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi \ (\text{cm}^3)$.

Câu 15: Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2\, cm^3$ **B.** $1400\pi^2\, cm^3$ **C.** $2500\pi^2\, cm^3$ **D.** $600\pi^2\, cm^3$

Lời giải



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.

Ta có phương trình đường tròn là $x^2+(y-25)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25+\sqrt{25-x^2} \\ y=25-\sqrt{25-x^2} \end{array}\right., x\in[-5;5]$.

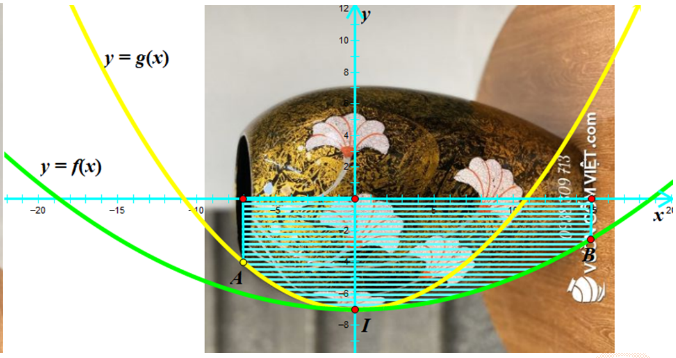
Vậy $V=\pi.\left[\int_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]=100\pi.\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$.

Ta có $\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5

$\Rightarrow \int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\pi.5^2=\frac{25\pi}{2}$.

Suy ra $V=100\pi.\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=100\pi.\frac{25\pi}{2}=1250\pi^2\ \left(cm^3\right)$.

Câu 16: Để tính thể tích lọ gốm, người ta xấp xỉ nó bởi khối tròn xoay sinh bởi phần hình phẳng (phần gạch ngang) giới hạn bởi hai hàm bậc hai $y=f(x)$ và $y=g(x)$ như hình vẽ. Biết tọa độ đỉnh của hai parabol là $I(0;-7)$, điểm $A(-7;-4,06)$ thuộc đồ thị $y=g(x)$ và điểm $B(15;-2,5)$ thuộc đồ thị $y=f(x)$. Tính thể tích xấp xỉ của lọ gốm (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $3355\ cm^3$ **B.** $3120\ cm^3$ **C.** $3580\ cm^3$ **D.** $3225\ cm^3$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, vì đỉnh I và điểm B thuộc đồ thị $y = f(x)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{b_1}{a_1} = 0 \\ c_1 = -7 \\ a_1.(-7)^2 - 7 = -4,06 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0,02 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = -7 \end{cases}, \text{ suy ra } f(x) = 0,02.x^2 - 7$$

Xét hàm số $y = g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, vì đỉnh I và điểm A thuộc đồ thị $y = g(x)$ nên ta có hệ

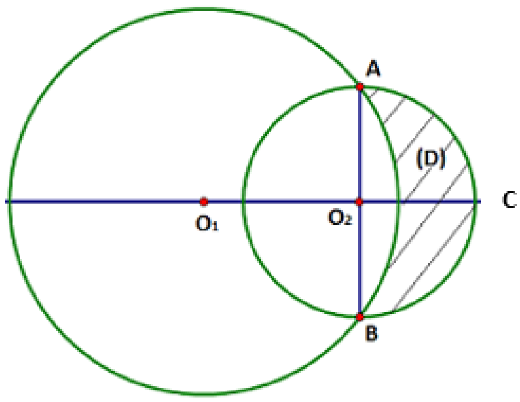
$$\begin{cases} -\dfrac{b_2}{a_2} = 0 \\ c_2 = -7 \\ a_2.15^2 - 7 = -2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0,06 \\ b_2 = 0 \\ c_2 = -7 \end{cases}, \text{ suy ra } g(x) = 0,06.x^2 - 7$$

Thể tích khối tròn xoay khi đó bằng

$$V = \pi\int_{-7}^{0}(g(x))^2\,dx + \pi\int_{0}^{15}(f(x))^2\,dx = \pi\int_{-7}^{0}(0,06.x^2 - 7)^2\,dx + \pi\int_{0}^{15}(0,02.x^2 - 7)^2\,dx \approx 3355$$

Vậy thể tích của lọ gốm xấp xỉ $3355\ cm^3$

Câu 17: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \dfrac{40\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{14\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$. **D.** $V = 36\pi$.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn $(O_2):\ x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 3$.

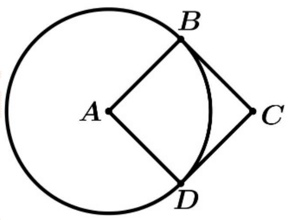
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\int\limits_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \left[25 - (x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{14\pi}{3}$.

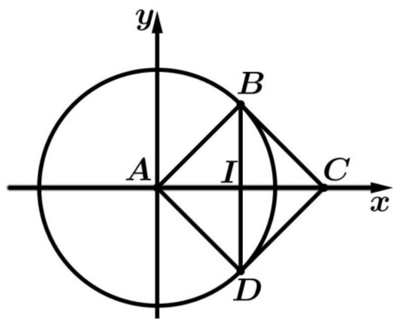
Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{40\pi}{3}$.

Câu 18: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn (*hình vẽ bên dưới*). Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó.



A. $\dfrac{(16+24\sqrt{2})\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{(16+12\sqrt{2})\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{(28+16\sqrt{2})\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{(12+5\sqrt{2})\pi}{3}$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên trái BD quanh trục đối xứng của nó là

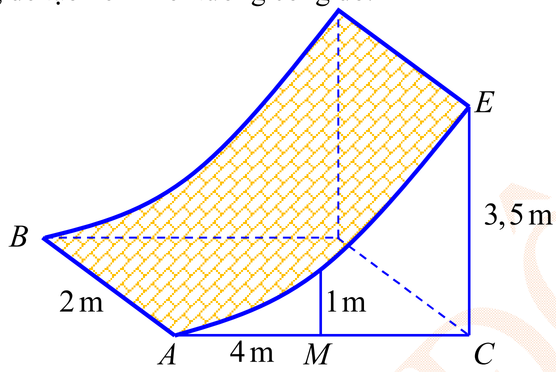
$$V_1 = \pi\int\limits_{-2}^{\sqrt{2}} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{(16+10\sqrt{2})\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên phải BD quanh trục đối xứng của nó là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.(\sqrt{2})^2.\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

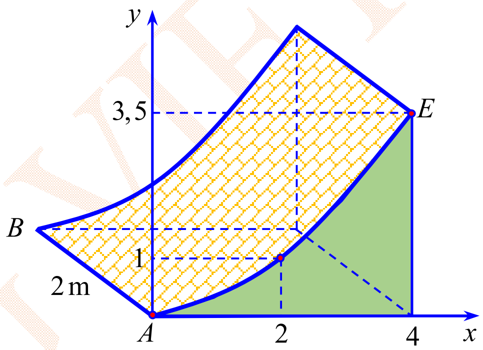
Thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{\left(16+12\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Câu 19: Chướng ngại vật “tường cong” trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4\,\text{m}$, $CE = 3,5\,\text{m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao $1\,\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



A. $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ sao cho $A \equiv O$

$\Rightarrow$ cạnh cong AE nằm trên parabol $(P): y = ax^2 + bx$ đi qua các điểm $(2;1)$ và $\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$ nên $(P): y = \dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{1}{8}x$

Khi đó diện tích tam giác cong ACE có diện tích $S = \int_0^4 \left(\dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x = 5\,\text{m}^2$.

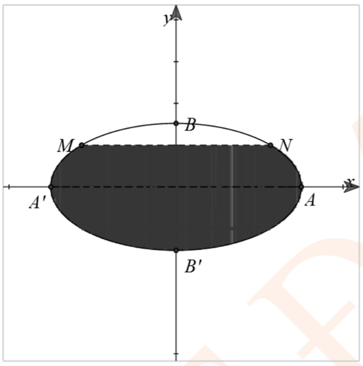
Vậy thể tích khối bê tông cần sử dụng là $V = 5.2 = 10\,\text{m}^3$.

Câu 20: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Thùng đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V=1,52\text{m}^3$. **B.** $V=1,31\text{m}^3$. **C.** $V=1,27\text{m}^3$. **D.** $V=1,19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{25}}=1$ ta có $y=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\dfrac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

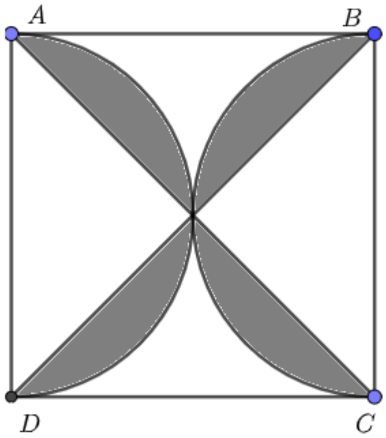
Đổi cận: Khi $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\dfrac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

Câu 21: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD,BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



A. $V=7,18\,cm^2$. **B.** $V=57,38\,cm^2$. **C.** $V=28,69\,cm^2$. **D.** $V=14,36\,cm^2$

Lời giải

Đặt hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là đỉnh D, hai tia Ox,Oy tương ứng là là các tia DC,DA.

Phương trình đường tròn đường kính AD là $x^2+\left(y-2\right)^2=4$.

Phương trình đường tròn đường kính BC là $\left(x-4\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$.

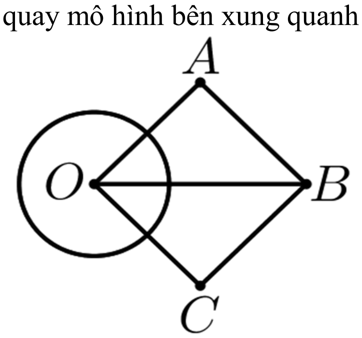
Phương trình $AC:x+y-4=0$, $BD:x-y=0$.

Thể tích cánh quạt đỉnh D quay quanh DC là $V_1=\pi\int_0^2 x^2dx-\pi\int_0^2\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx$.

Thể tích cánh quạt đỉnh A quay quanh DC là $V_2=\pi\int_0^2\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^2\left(4-x\right)^2dx$.

Thể tích cần tìm là $V=2\left(V_1+V_2\right)=28,69\ cm^2$.

Câu 22: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.

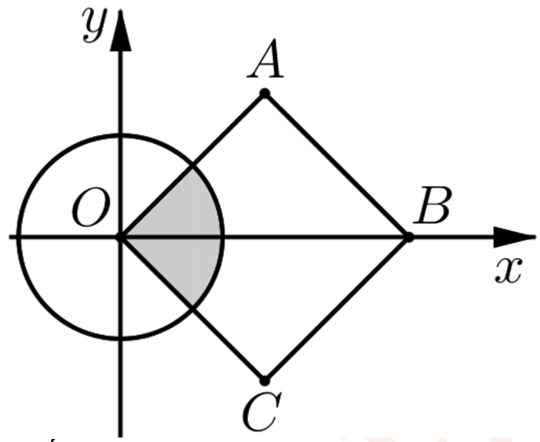


A. $V=\dfrac{8\left(3+4\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{8\left(2+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

C. $V=\dfrac{8\left(3+5\sqrt{2}\right)\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{32\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O, tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC (như hình vẽ).

Khi đó đường tròn $\left(O\right)$ có phương trình $x^2+y^2=4$ và đường thẳng OA có phương trình $y=x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn $\left(C\right)$ là: $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}x^2dx+\pi.\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(4-x^2\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\left(16-10\sqrt{2}\right)\pi}{3}=\frac{\left(16-8\sqrt{2}\right)\pi}{3}.$$

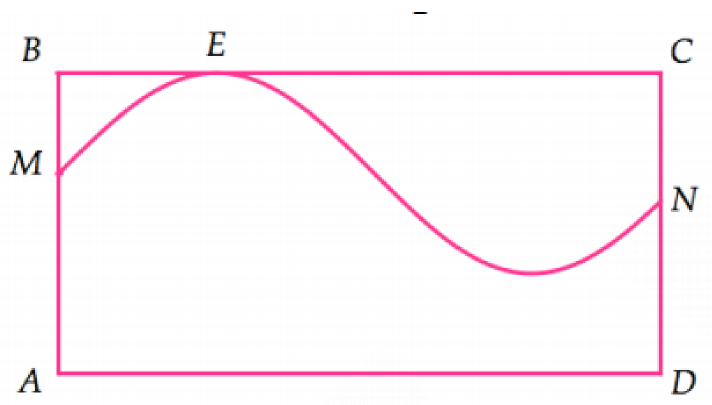
Thể tích khối tròn xoay khi quay $\left(O\right)$ quanh Ox là khối cầu có $V_2=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là (tổng của hai khối nón)

$$V_3=2\times\left[\frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2}\right]=\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính: $V=V_2+V_3-V_1=\dfrac{16+40\sqrt{2}}{3}\pi=\dfrac{8\pi\left(2+5\sqrt{2}\right)}{3}$.

Câu 23: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30\,cm, AD=\frac{55\pi}{3}\,cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM=20\,cm, CN=15\,cm$, $BE=5\pi\ cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (kết quả làm tròn đến hàng trăm).



A. $81788\,cm^3$. **B.** $87388\,cm^3$. **C.** $83788\,cm^3$. **D.** $7883\,cm^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox, B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình Sin cần tìm có dạng: $y = a\sin\left(\frac{x}{10}\right) + b$.

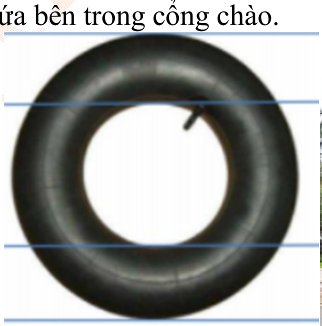
Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{10}.0\right) + b = 20 \\ a\sin\left(\frac{1}{10}.\frac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y = 10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20$.

Thể tích cần tìm là: $\pi\int_0^{\frac{55\pi}{3}} \left(10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20\right)^2 dx \simeq 83788\,cm^3$.

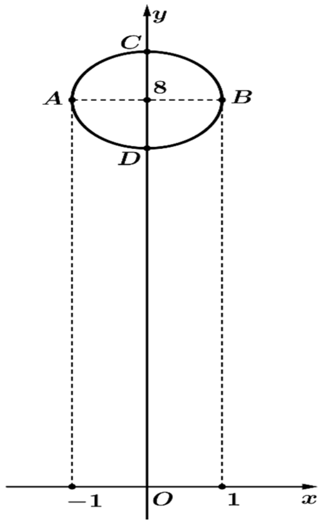
Câu 24: Trong đợt tổ chức HKPĐ cấp tỉnh lần thứ XIV, ban tổ chức thiết kế một cổng chào bằng phao chứa không khí ở bên trong, có hình dạng như một nửa cái Săm ô tô khi bơm căng (*tham khảo hình vẽ*). Cổng chào có chiều cao so với mặt sân là $9m$ (tính cả phần phao chứa không khí), phần chân của cổng chào tiếp xúc với mặt sân theo một đường tròn có đường kính là $2m$ và bề rộng của cổng chào là $18m$ (tính cả phần phao chứa không khí). Bỏ qua độ dày của lớp vỏ cổng chào, mặt sân coi là bằng phẳng. Tính thể tích không khí chứa bên trong cổng chào.



A. $9\pi^2\left(m^3\right)$. **B.** $18\pi^2\left(m^3\right)$. **C.** $8\pi^2\left(m^3\right)$. **D.** $16\pi^2\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ



Xét đường tròn $(C): x^2+(y-8)^2=1$.

Khi đó cung $\overset{\frown}{ACB}$ có phương trình $y=8+\sqrt{1-x^2}$ và cung cung $\overset{\frown}{ADB}$ có phương trình $y=8-\sqrt{1-x^2}$.

Ta có thể tích V của không khí chứa trong cổng chào chính bằng một nửa thể tích của vật tròn xoay khi cho đường tròn (C) quay quanh trục Ox sinh ra.

Ta có

$$V=\frac{1}{2}\left(\pi\int_{-1}^{1}\left(8+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(8-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\right)=\frac{1}{2}\pi\int_{-1}^{1}32\sqrt{1-x^2}dx=32\pi\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

(do tính chất của tích phân hàm số chẵn trên cận đối xứng).

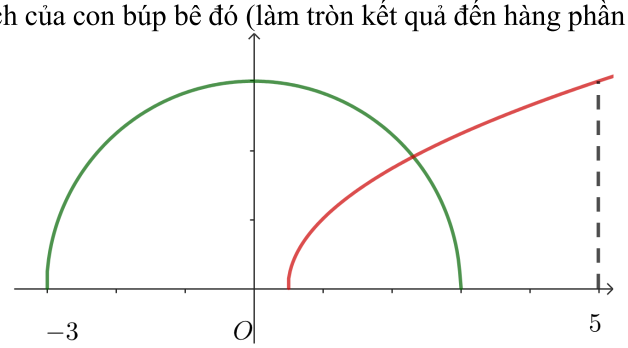
Đặt $x=\sin t$, ta có $dx=\cos t.dt$ và $x=0\to t=0;\ x=1\to t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $V=32\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t.dt=32\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t.dt=32\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.dt=16\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t).dt$

$$=16\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=16\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=8\pi^2\left(m^3\right).$$

Vậy $V=8\pi^2\left(m^3\right)$.

Câu 25: Một con búp bê cầu mưa có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục Ox. Miền (R) được giới hạn bởi nửa đường tròn và một phần của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x-1}\,(1\le x\le 5)$ như trong hình vẽ. Tính thể tích của con búp bê đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười



A. $51,7\ cm^3$. **B.** $162,3\ cm^3$. **C.** $62,6\ cm^3$. **D.** $157,1\ cm^3$.

Lời giải

Ta có phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$

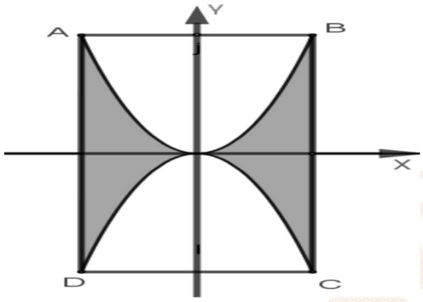
Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$9 - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{11}\,(L) \\ x = -1 + \sqrt{11}\,(TM) \end{array}\right.$$

Thể tích của vật thể là:

$$V = \pi \int_{-3}^{-1+\sqrt{11}} \left(9 - x^2\right)dx + \pi \int_{-1+\sqrt{11}}^{5} (2x-1)dx \approx 162,3\left(cm^3\right)$$

Câu 26: Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.Cho $AB = 4dm; BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Lời giải

Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2;4), B(2;4), C(2;-4), D(-2;-4)$.

A, B thuộc Parabol có phương trình là: $y = x^2$

C, D thuộc Parabol có phương trình là: $y = -x^2$

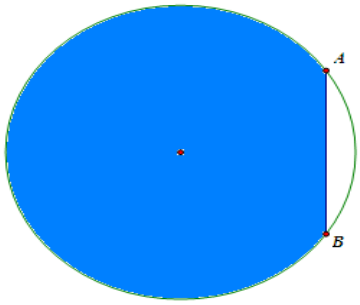
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{32}{3} \quad (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 \quad (dm^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{64}{3} \quad (dm^2)$

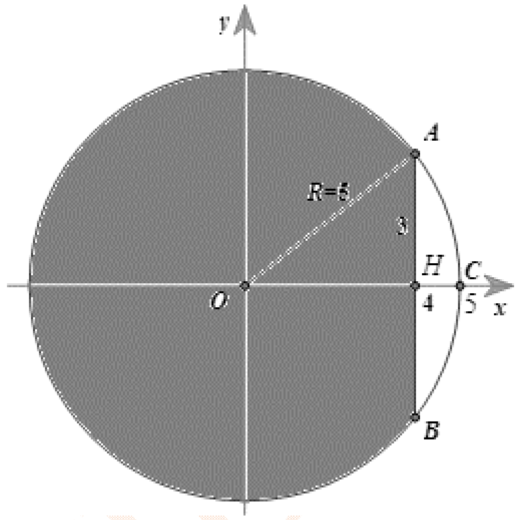
Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\dfrac{32}{3}.5000 + \dfrac{64}{3}.2500\right).1000 \approx 106666667đ$

Câu 27: Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB = 6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



A. 3722 nghìn đồng. **B.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **D.** 3723 nghìn đồng.

Lời giải



Diện tích miếng đất là $S_1 = \pi R^2 = 25\pi$ (m^2).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2 + y^2 = 25$.

$R = 5, AH = 3 \Rightarrow OH = 4$.

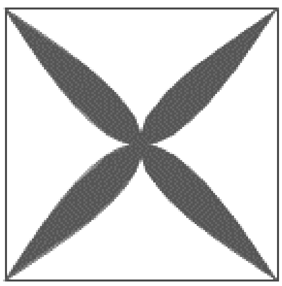
$\Rightarrow$ Phương trình của cung tròn nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ là $y = \sqrt{25 - x^2}$, với $4 \le x \le 5$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trống là $S_2 = 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x$ (m^2).

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng cây là $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow$ Số tiền thu được là $T = 100S = 100\left(25\pi - 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x\right) \approx 7445$ (nghìn đồng).

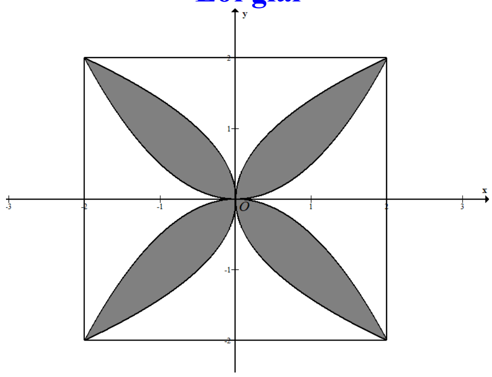
Câu 28: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $40\mathrm{cm}$. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải



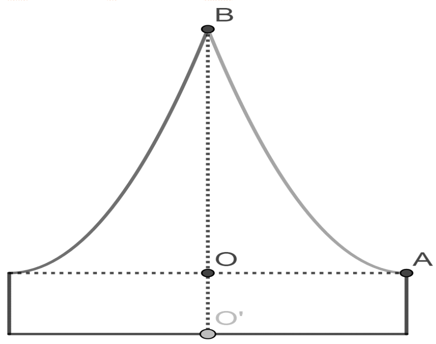
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=-\dfrac{x^2}{2}$, $x=-\dfrac{y^2}{2}$, $x=\dfrac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

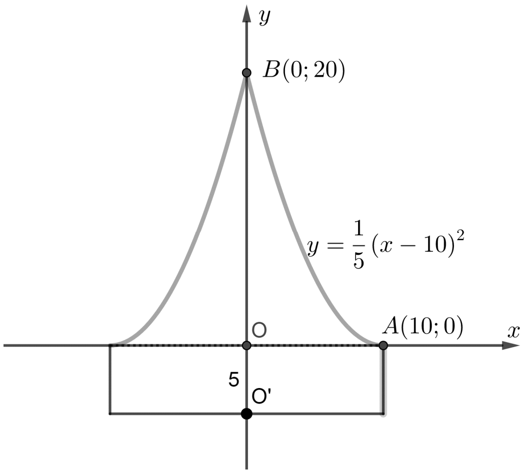
$$\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right)=\frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Câu 29: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

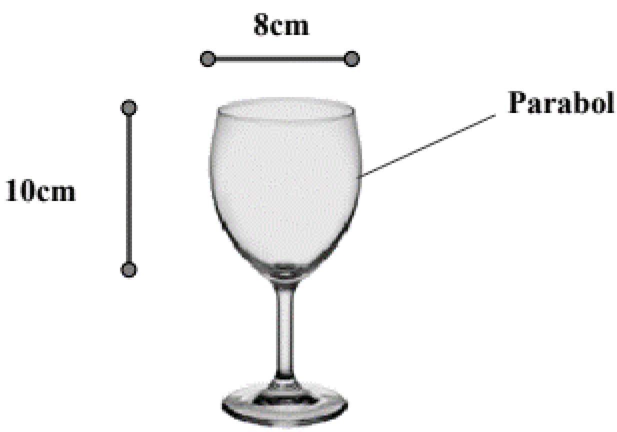
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi\int\limits_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi \left(\text{cm}^3\right)$.

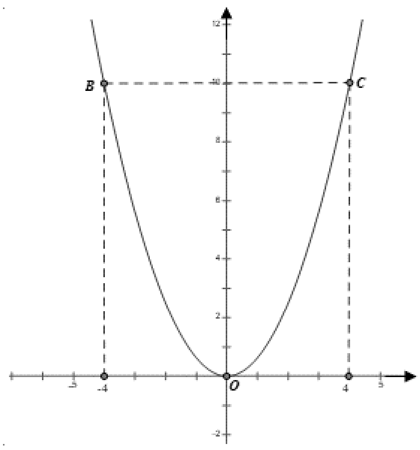
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 30: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân).



A. $V = 320\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 1005,31\,\text{cm}^3$. **C.** $V = 251,33\,\text{cm}^3$. **D.** $V = 502,65\,\text{cm}^3$.

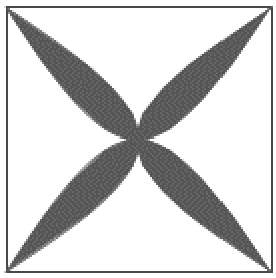
Lời giải



Parabol có phương trình $y=\frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V=\pi\int\limits_0^{10}\left(\frac{8}{5}y\right).dy \approx 251,33$.

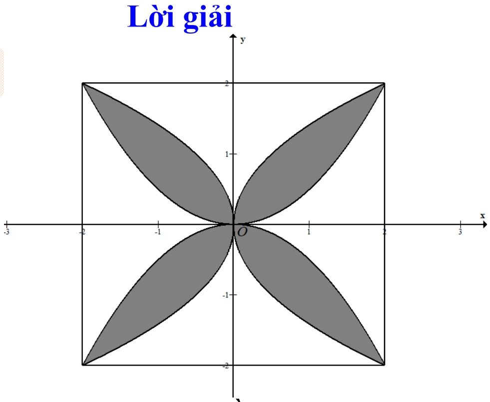
Câu 31: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải



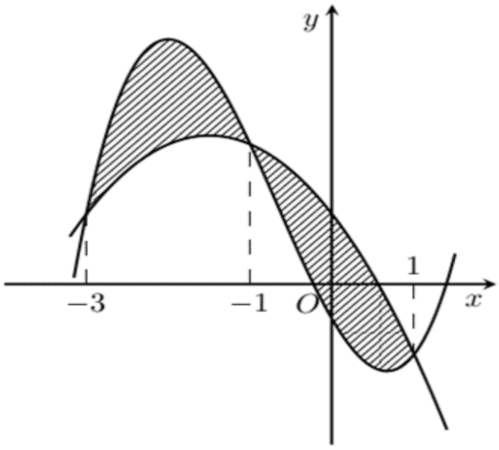
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm=1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\frac{x^2}{2}$, $y=-\frac{x^2}{2}$, $x=-\frac{y^2}{2}$, $x=\frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right)=\frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Cách 1:

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_{-3}^{-1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x.$$

Trong đó phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm -3; -1; 1 nên

$$\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)=\frac{3}{2}\\ -a+(b-d)-(c-e)=\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ (b-d)=\frac{3}{2}\\ (c-e)=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $S=\int_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4$.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$ là: $a(x+3)(x+1)(x-1)=0$.

Dựa vào các hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{1}{2}-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là:

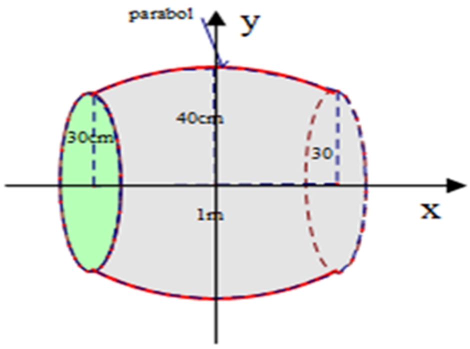
$$S=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)dx=2-(-2)=4.$$

Câu 33: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi(cm^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống gần với giá trị nào trong 4 giá trị sau?

A. $425,2$ (lít). **B.** $42,52$ (lít). **C.** $4,252$ (lít). **D.** $212,5$ (lít).

Lời giải

Ta có chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Vì thiết diện vuông góc với trục cách đều 2 đáy là một hình tròn và cách đều 2 đáy có diện tích là $1600\pi(cm^2)$ nên ta có bán kính $r^2\pi=1600\pi(cm^2)\Rightarrow r=40(cm)$.

Lại có Parabol $P: y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(0;40)$ và qua các điểm $A(-50;30)$, $B(50;30)$

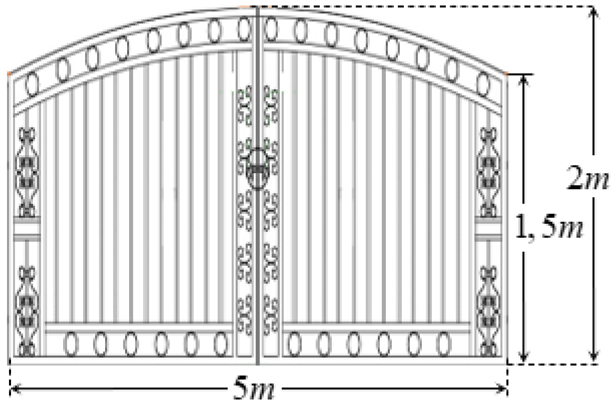
nên ta có hpt: $\begin{cases}c=40\\2500a+50b=-10\\2500a-50b=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{250}\\b=0\\c=40\end{cases}$

Vậy Parabol có dạng $P: y=-\frac{1}{250}x^2+40$

Nên thể tích của cái trống là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi parabol $P: y=-\frac{1}{250}x^2+40$ quay quanh trục ox và các đường $x=-50; x=50$

$$V=\pi\int_{-50}^{50}(-\frac{1}{250}x^2+40)^2dx=\frac{406000}{3}\pi\,(cm^3)\approx 425,2\,(dm^3)=425,2(lít)$$

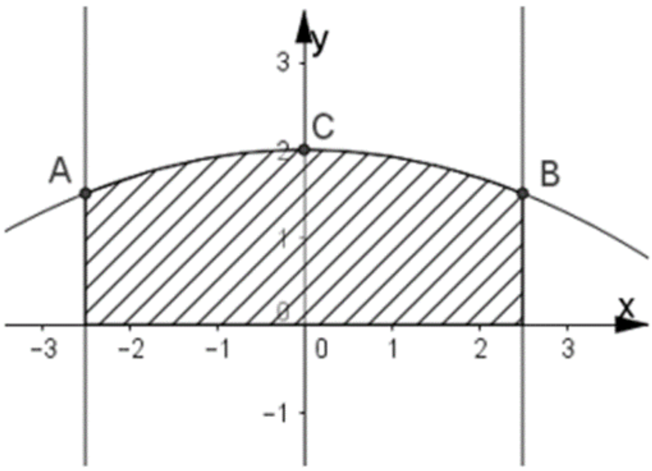
Câu 34: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1 (m2) của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).



A. 6.520.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.417.000 đồng. **D.** 6.620.000 đồng.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó $A(-2,5;\ 1,5)$, $B(2,5;\ 1,5)$, $C(0;\ 2)$.



Giả sử đường cong trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$

Do Parabol đi qua các điểm đó $A(-2,5;\ 1,5)$, $B(2,5;\ 1,5)$, $C(0;\ 2)$. nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(-2,5)^2 a - 2,5b + c = 1,5\\(2,5)^2 a + 2,5b + c = 1,5\\c = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{2}{25}\\b = 0\\c = 2\end{cases}$$

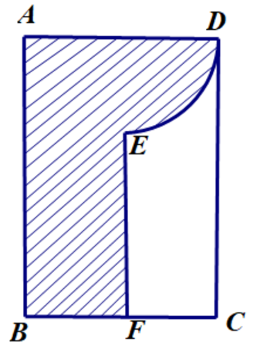
Khi đó phương trình Parabol là: $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số: $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5;\ x = 2,5$.

Ta có : $S = \int\limits_{-2,5}^{2,5}\left(-\dfrac{2}{25}x^2 + 2\right)dx = \left(-\dfrac{2}{25}\dfrac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \dfrac{55}{6}$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S.700000 = \dfrac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000$ (đồng)

Câu 35: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



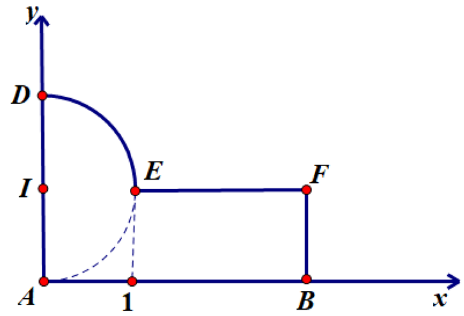
Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

A. $16,4cm^3$. **B.** $16,5cm^3$. **C.** $5,2cm^3$. **D.** $3,8cm^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox; D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



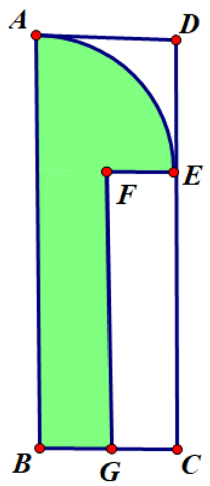
Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx+\pi\int_1^3 1^2dx\approx 16,5(cm^3).$$

Câu 36: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=20mm$, $AD=6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$

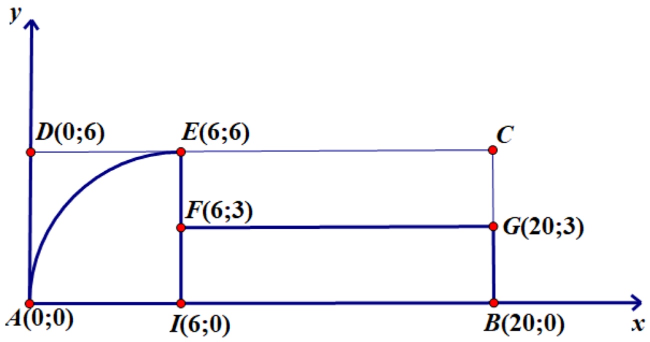


Thể tích của đinh tán là (quy tròn đến hàng phần mười)

A. $270mm^3$. **B.** $848,2mm^3$. **C.** $220,8mm^3$. **D.** $584,3mm^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy có $A \equiv O$; $B(20;0); D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I\left(6;0\right);E\left(6;6\right);F\left(6;3\right);G\left(20;3\right)$.

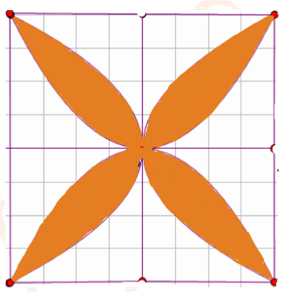
+ Đường tròn tâm $I\left(6;0\right)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $\left(x-6\right)^2+y^2=36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y=\sqrt{36-(x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y=3$.

Vậy thể tích của đinh tán là: $V=\pi\int\limits_0^6\left[36-\left(x-6\right)^2\right]dx+\pi\int\limits_6^{20}3^2\,dx\approx 848,2\left(mm^3\right)$

Câu 37: Một viên gạch hoa hình vuông có cạnh bằng $80cm$. Người ta thiết kế sử dụng 4 đường parabol cùng chung đỉnh tại tâm của viên gạch và đi qua hai đỉnh kề nhau của viên gạch để tạo thành bông hoa như hình vẽ.



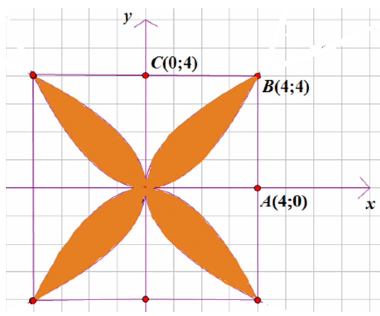
Diện tích của bông hoa (phần tô đậm trong hình vẽ) là

A. $\frac{64}{3}dm^2$. **B.** $\frac{16}{3}dm^2$. **C.** $16dm^3$. **D.** $64dm^3$.

Lời giải

Ta có: $80cm=8dm$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có: $A\left(4;0\right);B\left(4;4\right);C\left(0;4\right)$.

Các cánh hoa được tạo thành bởi 4 đường parabol có phương trình là:

$y=\frac{x^2}{4};y=-\frac{x^2}{4};x=\frac{y^2}{4};x=-\frac{y^2}{4}$.

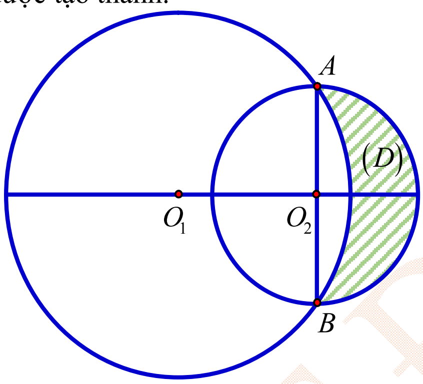
Diện tích của cánh hoa nằm trong góc phần tư thứ nhất được giới hạn bởi các đường: $y=\frac{x^2}{4}$

$y=2\sqrt{x}$; $x=0;x=4$, nên diện tích một cánh hoa bằng:

$S=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{16}{3}\left(dm^2\right)$.

Vậy diện tích bông hoa là: $4S=\frac{64}{3}\left(dm^2\right)$.

Câu 38: Cho hai đường tròn $\left(O_1;5\right)$ và $\left(O_2;3\right)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $\left(O_2\right)$. Gọi $\left(D\right)$ là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn **(ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ)**. Quay $\left(D\right)$ quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V=\frac{14\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{68\pi}{3}$.

C. $V=\frac{40\pi}{3}$. **D.** $V=36\pi$.

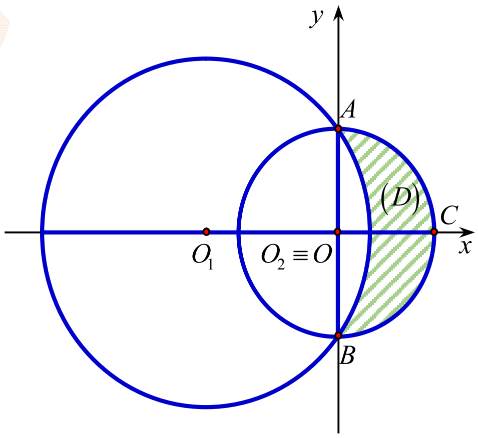
Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2\equiv O,\ O_2C\equiv Ox,\ O_2A\equiv Oy$.

Đoạn $O_1O_2=\sqrt{O_1A^2-O_2A^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4\Rightarrow\left(O_1\right):\left(x+4\right)^2+y^2=25$.

Kí hiệu $\left(H_1\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $\left(O_1\right):\left(x+4\right)^2+y^2=25,\ Oy:x=0,\ x\ge 0$.

Kí hiệu $\left(H_2\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $\left(O_2\right):x^2+y^2=9,\ Oy:x=0,\ x\ge 0$.



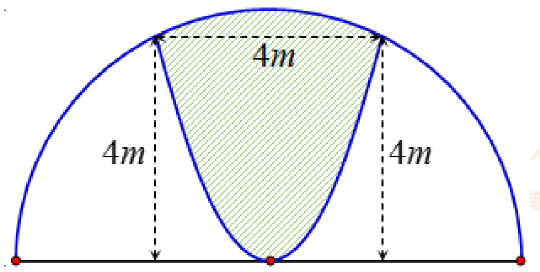
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình $\left(H_2\right)$ xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình $\left(H_1\right)$ xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi.3^3=18\pi$.

Lại có $V_1=\pi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left[25-(x+4)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\left[25x-\dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=\dfrac{14\pi}{3}$.

Do đó $V=V_2-V_1=18\pi-\dfrac{14\pi}{3}=\dfrac{40\pi}{3}$.

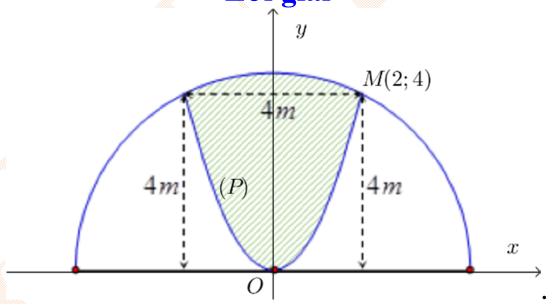
Câu 39: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.



Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 2.388.000 (đồng). **B.** 3.895.000 **(đồng)**.
C. 1.194.000 (đồng). **D.** 1.948.000 (đồng).

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là.

$y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2\Rightarrow a=1$.

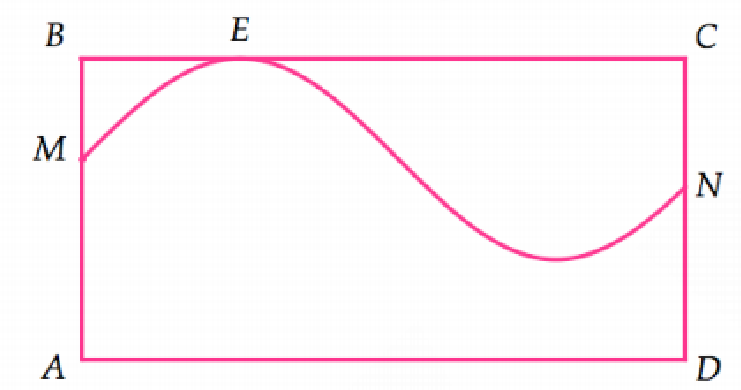
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu).

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx\cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{co}=\dfrac{1}{2}S_{hinhtron}-S_1\approx 19,47592654$.

Vậy số tiền cần có là $S_{co}\times 100000\approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

Câu 40: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30\,cm, AD=\dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM=20\,cm$, $CN=15\,cm$, $BE=5\pi\ cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD



(kết quả làm tròn đến hàng trăm).

A. $81788\,cm^3$.
B. $87388\,cm^3$
C. $83788\,cm^3$
D. $7883\,cm^3$

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox, B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình sin cần tìm có dạng: $y = a\sin\left(\dfrac{x}{10}\right) + b$.

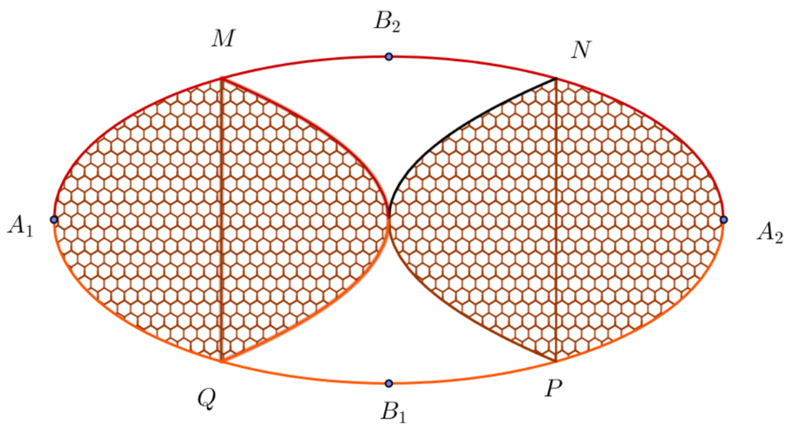
Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20)$, $N\left(\dfrac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a\sin\left(\dfrac{1}{10}.0\right) + b = 20 \\ a\sin\left(\dfrac{1}{10}.\dfrac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y = 10\sin\left(\dfrac{x}{10}\right) + 20$.

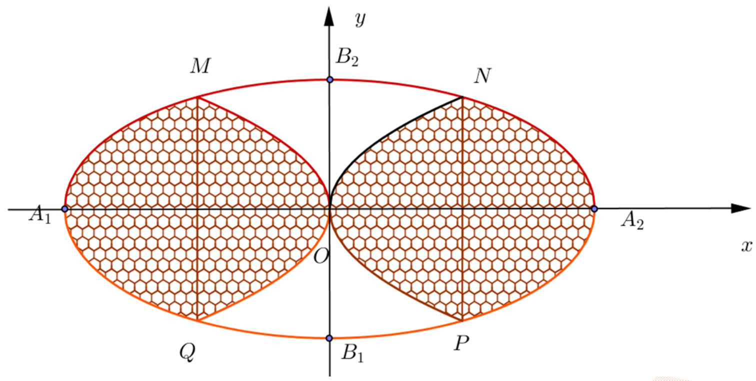
Thể tích cần tìm là: $\pi\displaystyle\int_0^{\frac{55\pi}{3}} \left(10\sin\left(\dfrac{x}{10}\right) + 20\right)^2 \mathrm{d}x \simeq 83788\,cm^3$.

Câu 41: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 4$ m?



A. 4.889.000 đồng. **B.** 5.675.000 đồng.
C. 3.526.000 đồng. **D.** 7.120.000 đồng.

Lời giải



Giả sử phương trình elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi \ \ (m^2)$.

Ta có: $MN = 4 \Rightarrow \begin{cases} M = (P) \cap (E) \\ N = (P) \cap (E) \end{cases} \Rightarrow N(2; y_0)$. Do $N \in (E) \Rightarrow N\left(2; \sqrt{3}\right)$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x = \frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}$

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 4\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \left(m^2\right)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi - 4\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

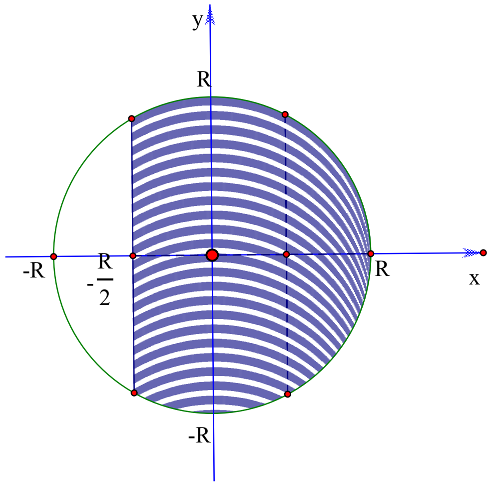
$T = 600.000 \times \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} + 50.000 \times 4\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \approx 4.889.000$ đồng.

Câu 42: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60^0. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng.

A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

C. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải



$\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120^0\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}$.

Chọn hệ trục như hình vẽ bên $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là

$x^2+y^2=R^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

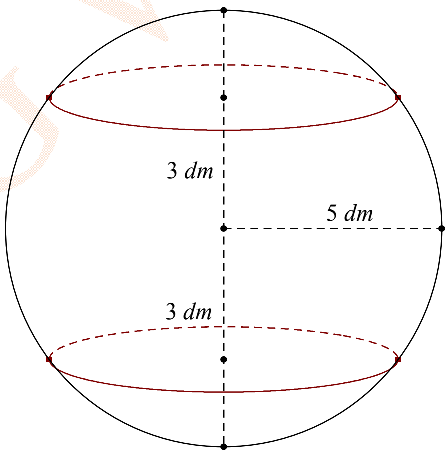
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t\Rightarrow S=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\dfrac{S}{\cos 60^0}=2S=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 43: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính $5\ \mathrm{dm}$ bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu $3\ \mathrm{dm}$. Tính thể tích của chiếc lu.



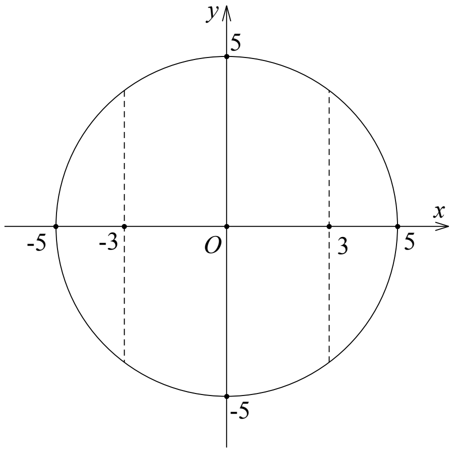
A. $41\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

B. $132\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$

C. $43\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$

D. $\dfrac{100}{3}\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$

Lời giải



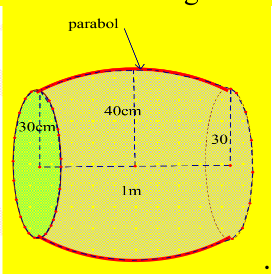
Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox, đường ngang là Oy.

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2+y^2=25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y=\sqrt{25-x^2}$, trục Ox, đường thẳng $x=-3, x=3$ quay quanh Ox.

$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(25-x^2\right)dx=\pi\left(25x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}=132\pi\left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 44: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

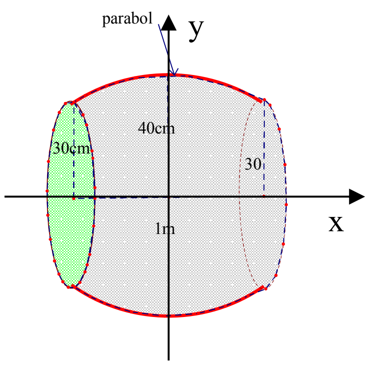


A. $425,2$ (lít). **B.** 425162 (lít).

C. $212,6$ (lít). **D.** 212581 (lít).

Lời giải

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, nên.

$r^2\pi=1600\pi \Rightarrow r=40cm$.

Ta có: Parabol có đỉnh $I(0;40)$ và qua $A(50;30)$.

Nên có phương trình $y=-\frac{1}{250}x^2+40$.

Thể tích của trống là.

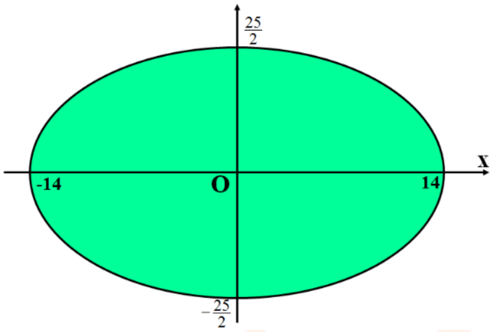
$V=\pi\int_{-50}^{50}\left(-\frac{1}{250}x^2+40\right)^2dx=\pi.\frac{406000}{3}cm^3\approx 425,2dm^3=425,2$ (lít).

Câu 45: Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 180000 đồng. **B.** 183000 đồng.

C. 185000 đồng. **D.** 190000 đồng..

Lời giải



Đường elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$ có phương trình $\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}$.

Do đó thể tích quả dưa là $V=\pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\text{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)\text{d}x$

$=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\frac{56}{3}=\frac{8750\pi}{3}\text{cm}^3$.

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 183259$ đồng.

Câu 49: **(Đề TK BGD 2024)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2-3x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^3+3x^2+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(1;4\right)$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

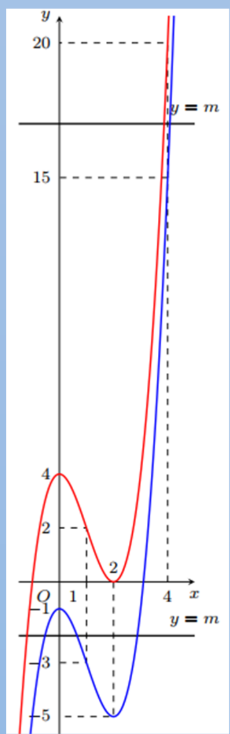
Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1.\end{array}\right.$

Mặt khác $g'\left(x\right)=\left(-3x^2+6x\right)f'\left(-x^3+3x^2+m\right)$ suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\in\left(1;4\right)\\f'\left(-x^3+3x^2+m\right)=0.\end{array}\right.$

Lại có $f'\left(-x^3+3x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^3+3x^2+m=4\\-x^3+3x^2+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=x^3-3x^2+4\\m=x^3-3x^2-1.\end{array}\right.$

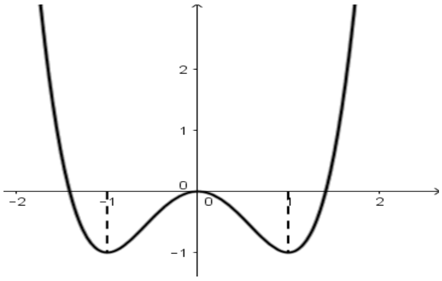
Vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^3-3x^2+4$ và $y=x^3-3x^2-1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'\left(-x^3+3x^2+m\right)=0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $\left(1;4\right)$ suy ra $\left[\begin{array}{l}-3\le m\le 0\\15\le m<20\end{array}\right.$. Vậy có tất cả 9 giá trị.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 49

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1;4)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

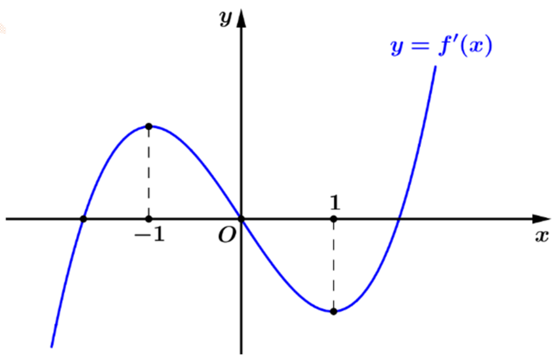
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+x-6$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;4)$. Tính tổng các phần tử của S.

A. 198. **B.** 190. **C.** 280. **D.** 210.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx-12$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

A. 2024. **B.** 2030. **C.** 2010. **D.** 2020.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

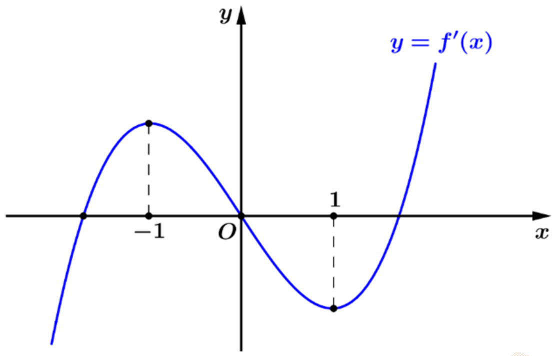


A. 2. **B.** 12. **C.** Vô số. **D.** 10.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx-12$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

A. 2024. **B.** 2030. **C.** 2010. **D.** 2020.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 12. **C.** Vô số. **D.** 10.

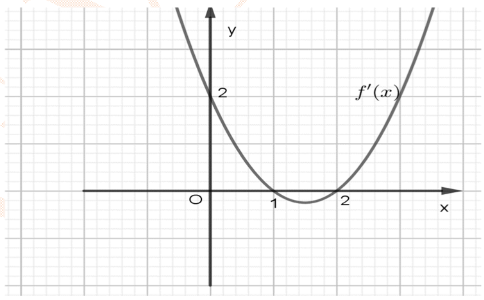
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(+\infty;1)$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f\left(3-2x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x-8, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f\left(-x^3+12x+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(0;5)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2-5x-6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^3+3x+m\right)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $\left(0;3\right)$.

A. 119. **B.** 120. **C.** 121. **D.** 122.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

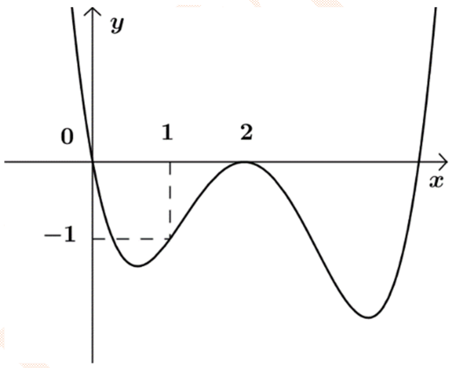
Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-9\right)\left(x-5\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g\left(x\right)=f\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2\left(x-4\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15: Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-100;100\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-3x+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. 102. **B.** 105. **C.** 103. **D.** 100.

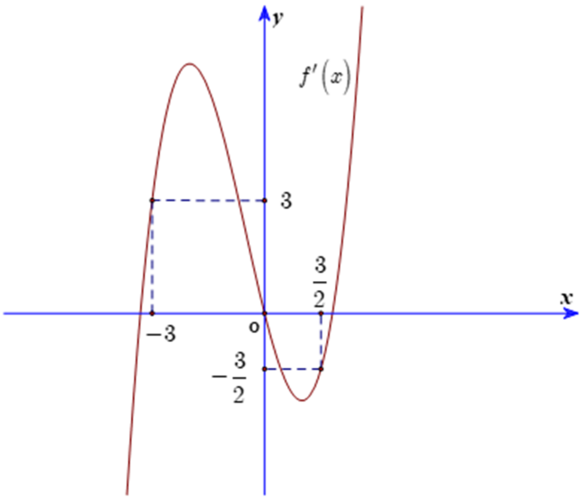
Câu 16: Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+2x-3$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** $\frac{17}{2}$.

Câu 17: Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $\log\frac{x+1}{2y+1}=4y^4+4y^3-x^2y^2-2y^2x$. Khi biểu thức $4y-x^2$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|$ giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$ là

A. 2. **B.** $\frac{39}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{29}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-6)=42$ và bảng xét dấu đạo hàm như

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

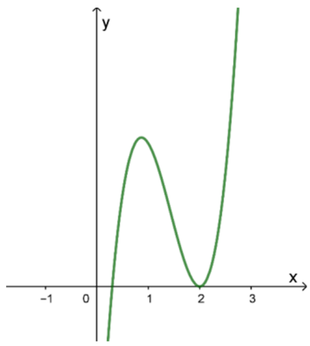
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{mx^2+1}}$ có tiệm cận ngang.

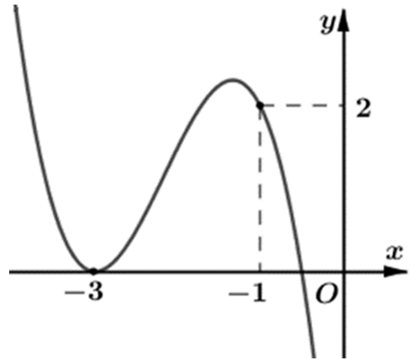
A. $m\le 0$ **B.** $m=1$ hoặc $m=4$. **C.** $m\ge 0$ **D.** $m>0$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x+1}}{\left(x^4-5x^2+4\right).f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

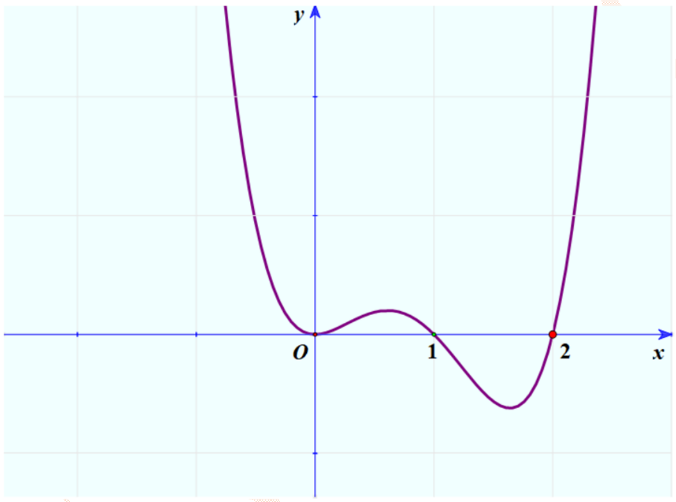
Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{f^2\left(x\right)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f^{'}(x) = x^2-2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị thuộc khoảng $\left(1;4\right)$?

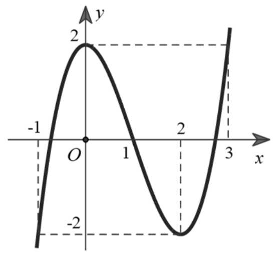
A. 44. **B.** 47. **C.** 33. **D.** 39.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f^{'}(x) = (x-1)^2\left(x^2-3x\right)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(x^2-4x+m\right)$ có 5 điểm cực trị thuộc khoảng $\left(1;4\right)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** vô số. **D.** 5.

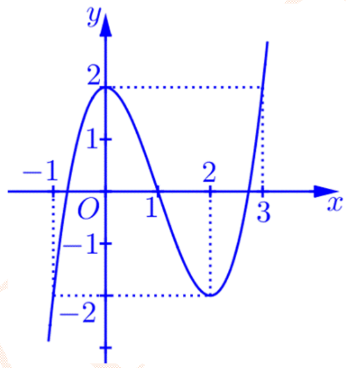
Câu 26: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị

$y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2022$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

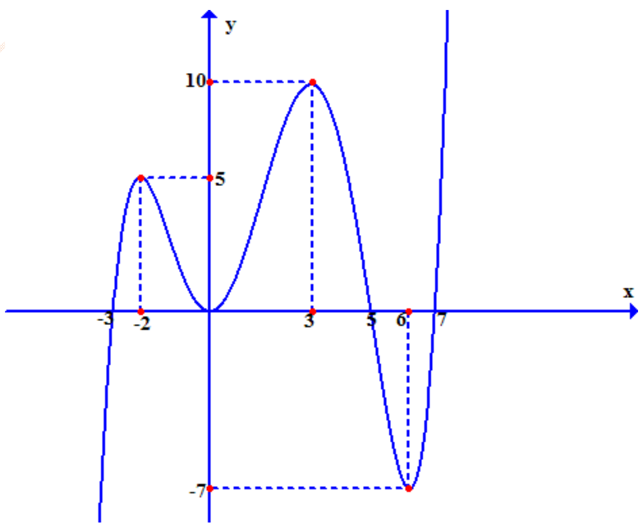
Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-8;-4)$. **B.** $(-10;-8)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 28: Cho Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f(2x^3-6x+1)+3=m$ có 7 nghiệm phân biệt.



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9

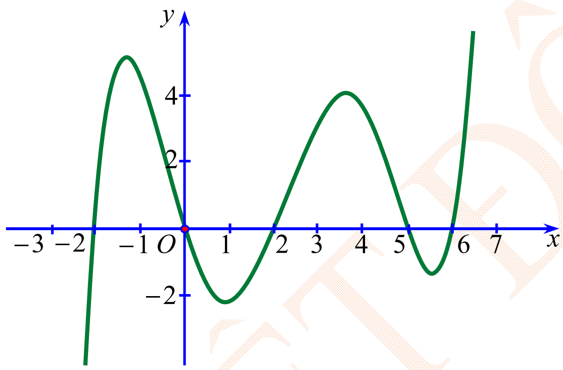
Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^4 - 8x^2\right| + m\right) - 2 = 0$ có đúng 12 nghiệm.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 30: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m - 15x}\left(m + 3 - 15x\right)$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2010. **B.** 2011. **C.** 4048. **D.** 2024.

Câu 31: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(5\right) = 3$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



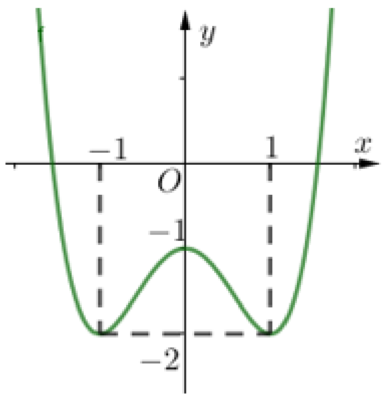
Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right) = 4$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x) + m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2023; 2024]$ sao cho phương trình $f\left(\dfrac{1}{\ln x - 2}\right) = m$ có đúng hai nghiệm.

A. 2027. **B.** 2026. **C.** 2025. **D.** 2024.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=3$. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x-1\right)+m$. Khi $\max\limits_{[0;2]} g\left(x\right)=-10$ thì giá trị của tham số m bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 13.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-4x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị.

A. 83 **B.** 81 **C.** 80. **D.** 84

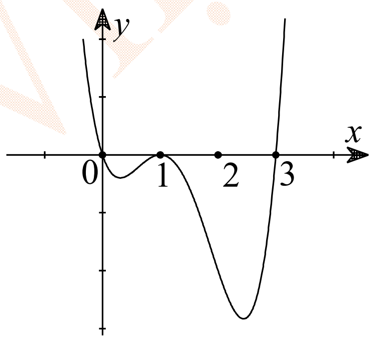
Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-3\right)\left(x^2+1\right)$ với $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x\right)-mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-x\right)\left(x^2-4x+3\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 40: Cho hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

A. 21 **B.** 15 **C.** 7 **D.** 14

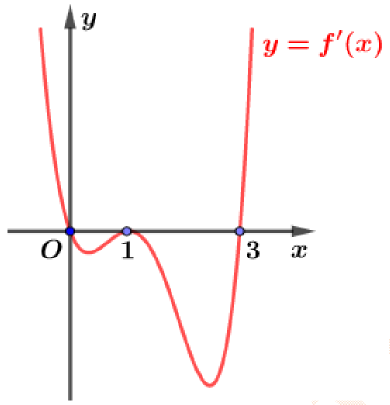
Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(x^2+3x-4\right)$. Gọi S là tập các số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



A. Vô số. **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-3x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f(-x^4+2x^2-m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;3)$?

A. 62. **B.** 60. **C.** 61. **D.** 64.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết tham số $m\in(a;b)$ thì hàm số hàm số $g(x)=f\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)$ đạt nhiều cực trị nhất là c cực trị. Tính tổng $a+b+c$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

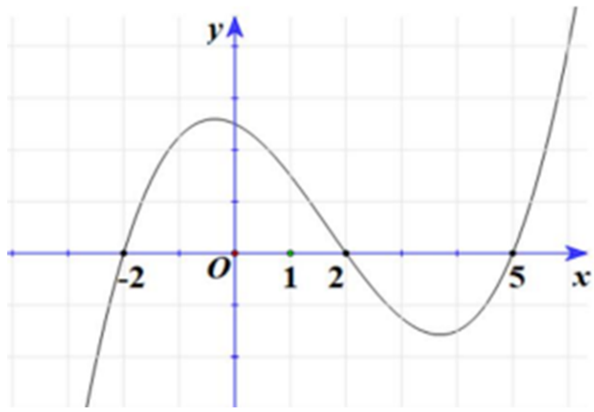
Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)\ \ x^3+x, =x\ \ \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f(x^4+2x^3-mx^2)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;2)$?

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx-2m-1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2024 để hàm số $y=f(x^2+1)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 2026. **C.** 2024. **D.** 2025.

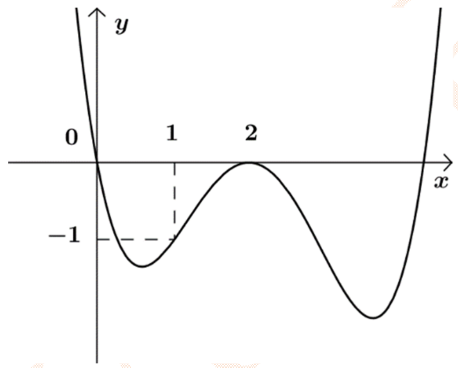
Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2026. **B.** 2022. **C.** 2024. **D.** 2020 .

Câu 49: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

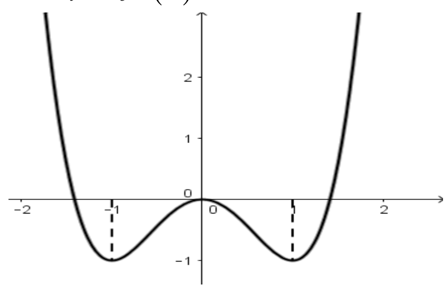


Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

A. 2025. **B.** 2. **C.** 2027. **D.** 2024.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1;4)$?

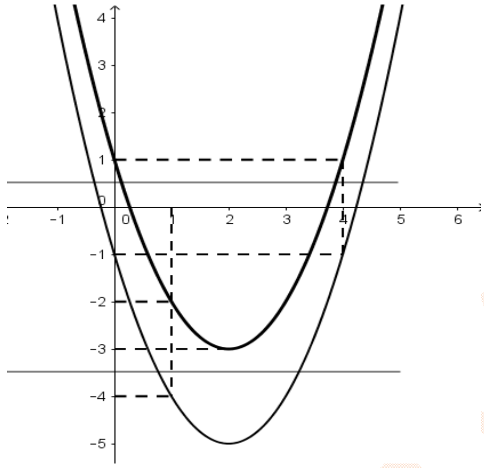
A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2(x-2).f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-2).f'(x^2-4x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(1;4) \\ x^2-4x+m=1 \\ x^2-4x+m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x-1=-m \\ x^2-4x+1=-m \end{array}\right..$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^2-4x-1$ và $y=x^2-4x+1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'(x^2-4x+m)=0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1;4)$

suy ra: $\left[\begin{array}{l} -4\le -m\le -3 \\ -1\le -m<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le m\le 4 \\ -1<m\le 1 \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 giá trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

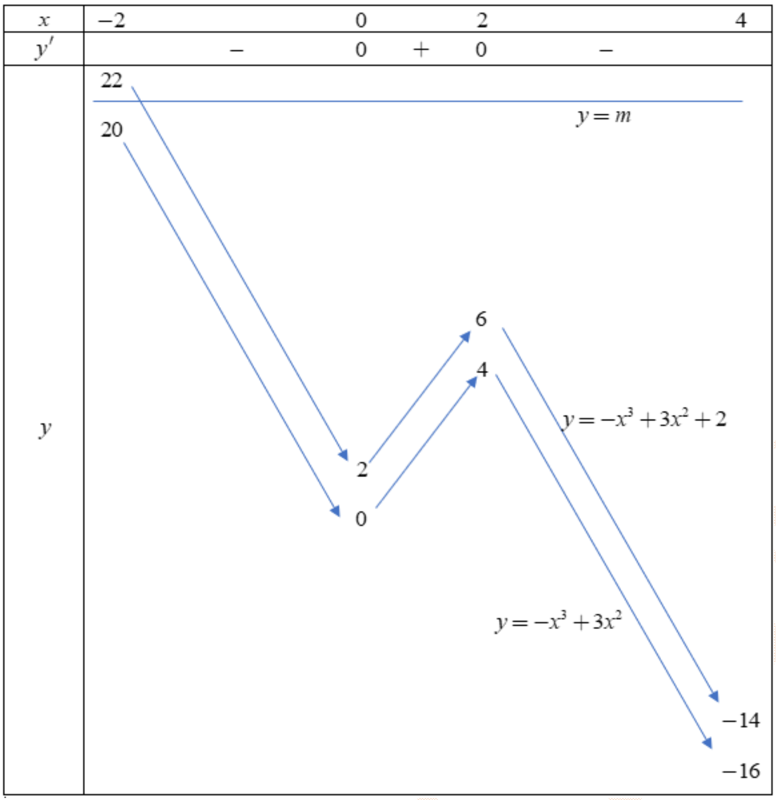
Lời giải

Ta có

$$g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x^2+m).$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x=0 \\ f'(x^3-3x^2+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x^3-3x^2+m=0 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ -x^3+3x^2=m \\ -x^3+3x^2+2=m \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của các hàm số $y=-x^3+3x^2$, $y=-x^3+3x^2+2$ trên khoảng $(-2;4)$ như bảng sau



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có đúng ba điểm cực trị khi chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} 20 \le m < 22 \\ -16 < m \le -14 \end{array}\right.$$

Vì m là số nguyên nên $m = -15, -14,\ 20,\ 21$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + x - 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 - 9x + m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;4)$. Tính tổng các phần tử của S.

A. 198. **B.** 190. **C.** 280. **D.** 210.

Lời giải

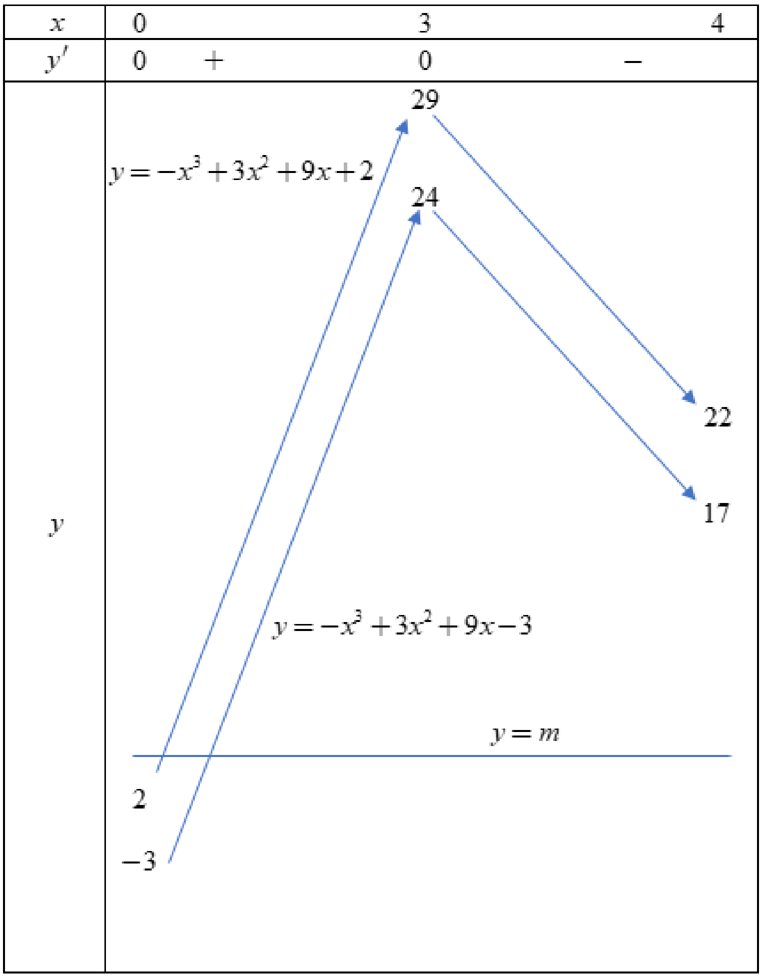
Ta có

$$g'(x) = (3x^2 - 6x - 9) f'(x^3 - 3x^2 - 9x + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ f'(x^3 - 3x^2 - 9x + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (l) \\ x = 3 \\ x^3 - 3x^2 - 9x + m = 2 \\ x^3 - 3x^2 - 9x + m = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ -x^3 + 3x^2 + 9x + 2 = m \\ -x^3 + 3x^2 + 9x - 3 = m \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của các hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+2$, $y=-x^3+3x^2+9x-3$ trên khoảng $(0;4)$ như bảng sau



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có đúng ba điểm cực trị khi chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}24 \le m < 29\\ 2 < m \le 17\end{array}\right.$$

Vì m là số nguyên nên $m=3,\ 4,\ ...,\ 17,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán bằng 280.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx-12$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

A. 2024. **B.** 2030. **C.** 2010. **D.** 2020.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)\Leftrightarrow f(|x|)$ đồng biến trên $(-5;-2)$

Do đó $y=f(x)$ nghịch biến trên $(2;5)$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x+m\le 0,\forall x\in(2;5)\Leftrightarrow m\le -x^2+2x,\forall x\in(2;5)$.

Xét $g(x)=-x^2+2x$ trên khoảng $(2;5)$

Ta có $g'(x) = -2x + 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

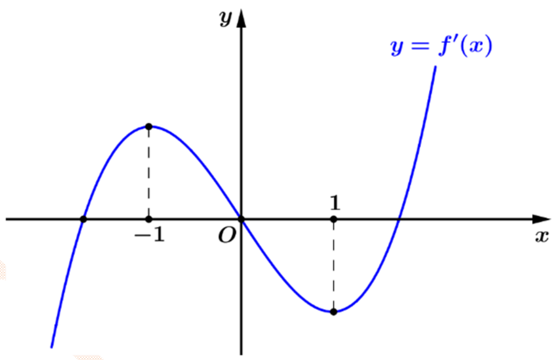
Bảng biến thiên

x	2 $\qquad$ 5
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$ -15

$m \le -x^2 + 2x, \forall x \in (2;5) \Leftrightarrow m \le -15$

Do $m \in [-2024;2024]$ nên có 2010 giá trị nguyên của m .

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = \left|4f(\sin x) + \cos 2x - \frac{a}{4}\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 12. **C.** Vô số. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $g(x) = \left|4f(\sin x) + \cos 2x - \frac{a}{4}\right| \Rightarrow g(x) = \sqrt{\left[4f(\sin x) + \cos 2x - \frac{a}{4}\right]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\left[4\cos x.f'(\sin x) - 2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x) + \cos 2x - \frac{a}{4}\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x) + \cos 2x - \frac{a}{4}\right]^2}}.$$

Ta có $4\cos x.f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x\left[f'(\sin x) - \sin x\right]$.

Với $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0, \sin x \in (0;1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-\dfrac{a}{4}\geq 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\geq\dfrac{a}{4},\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\geq\dfrac{a}{4}\Leftrightarrow 16f(t)+4-8t^2\geq a,\forall t\in(0;1)$ (*).

Xét $h(t)=16f(t)+4-8t^2\Rightarrow h'(t)=16f'(t)-16t=16\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow a\leq h(1)=16f(1)+4-8.1^2=12$. Vậy có 12 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+mx-12$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

A. 2024. **B.** 2030. **C.** 2010. **D.** 2020.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(|x-2|)$ đồng biến trên $(-3;0)\Leftrightarrow f(|x|)$ đồng biến trên $(-5;-2)$

Do đó $y=f(x)$ nghịch biến trên $(2;5)$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(2;5)\Leftrightarrow m\leq -x^2+2x,\forall x\in(2;5)$.

Xét $g(x)=-x^2+2x$ trên khoảng $(2;5)$

Ta có $g'(x)=-2x+2\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

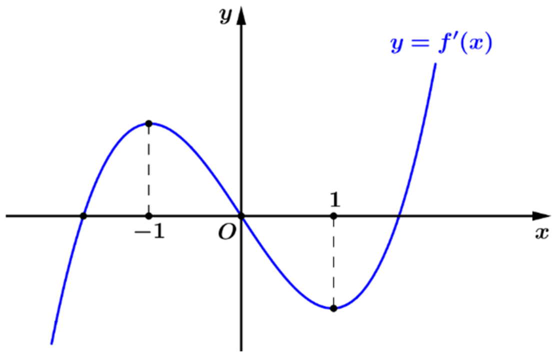
Bảng biến thiên

x	2		5
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-15

$m\leq -x^2+2x,\forall x\in(2;5)\Leftrightarrow m\leq -15$

Do $m\in[-2024;2024]$ nên có 2010 giá trị nguyên của m.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-\dfrac{a}{4}\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 12. **C.** Vô số. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right| \Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\right]^2}}.$$

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0, \sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-\frac{a}{4}\ge 0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\ge\frac{a}{4}, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\ge\frac{a}{4}\Leftrightarrow 16f(t)+4-8t^2\ge a, \forall t\in(0;1)$ (*).

Xét $h(t)=16f(t)+4-8t^2\Rightarrow h'(t)=16f'(t)-16t=16\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*)$\Leftrightarrow a\le h(1)=16f(1)+4-8.1^2=12$. Vậy có 12 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Hàm số $y=f(x^2-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(+\infty;1)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Ta có $y'=\left[f\left(x^2-x\right)\right]'=\left(2x-1\right)f'\left(x^2-x\right)$.

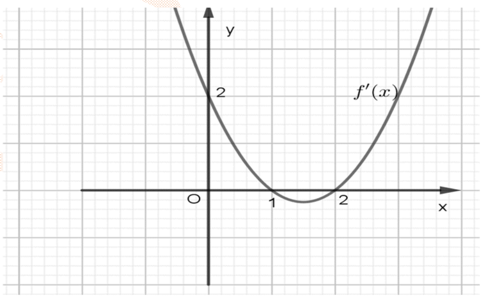
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x^2-x=-1\\x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'\left(x^2-x\right)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$\left(2x-1\right)f'\left(x^2-x\right)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f\left(3-2x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(3-2x^2\right)$ có $y'=-4x.f'\left(3-2x^2\right)$

Để hàm số đồng biến thì: $y'>0\Leftrightarrow-4xf'\left(3-2x^2\right)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'\left(3-2x^2\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'\left(3-2x^2\right)>0\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ 1<3-2x^2<2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}3-2x^2<1\\ 3-2x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1\\ x<-1\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<0\end{array}\right.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x-8, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f\left(-x^3+12x+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(0;5)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

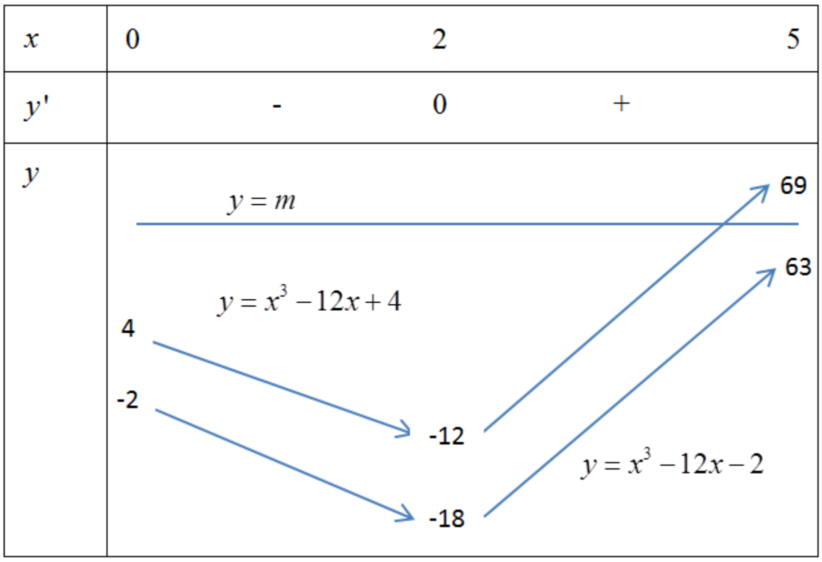
Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2\end{array}\right.$$

$$g'(x)=\left(-3x^2+12\right).f'\left(-x^3+12x+m\right).$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3x^2+12=0\\ -x^3+12x+m=4\\ -x^3+12x+m=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=2 & \text{(N)}\\ x=-2 & \text{(L)}\\ x^3-12x+4=m & \\ x^3-12x-2=m & \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của các hàm số $y=x^3-12x+4$, $y=x^3-12x-2$ trên khoảng $(0;5)$:



m thỏa bài toán khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có đúng hai nghiệm bậc lẻ trên khoảng $(0;5)$.

Do đó $63 \le m < 69$.

Các giá trị nguyên của m cần tìm là $63,64,65,66,67,68$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-5x-6, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f(-x^3+3x+m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;3)$.

A. 119. **B.** 120. **C.** 121. **D.** 122.

Lời giải

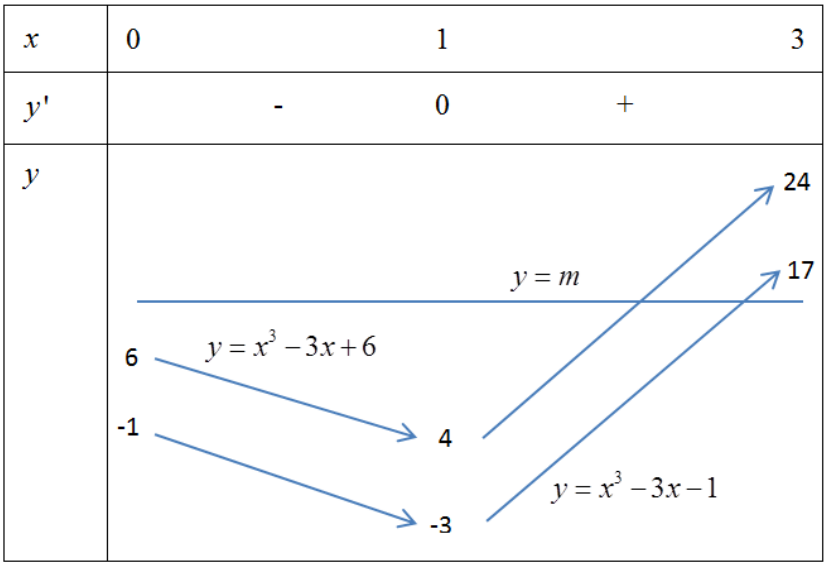
Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

$$g'(x)=(-3x^2+3).f'(-x^3+3x+m).$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x^2+3=0 \\ -x^3+3x+m=6 \\ -x^3+3x+m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \text{(N)} \\ x=-1 & \text{(L)} \\ x^3-3x+6=m & \\ x^3-3x-1=m & \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của các hàm số $y=x^3-3x+6$, $y=x^3-3x-1$ trên khoảng $(0;3)$:



m thỏa bài toán khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có đúng ba nghiệm bậc lẻ trên khoảng $(0;3)$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} 6 \le m < 17 \\ -3 < m < -1 \end{array}\right.$.

Các giá trị nguyên của m cần tìm là $-2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa bài toán là 119.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x^2-8x+m)$

$f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=(2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x+m-1=0 & (1) \\ x^2-8x+m=0 & (2) \\ x^2-8x+m-2=0 & (3) \end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-1)^2 \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_2 = 16-m>0 \\ \Delta_3 = 16-m+2>0 \\ 16-32+m \ne 0 \\ 16-32+m-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m \ne 16 \\ m \ne 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16.$$

Vì m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f'(x)=(x^2-9)(x-5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x)=f\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$

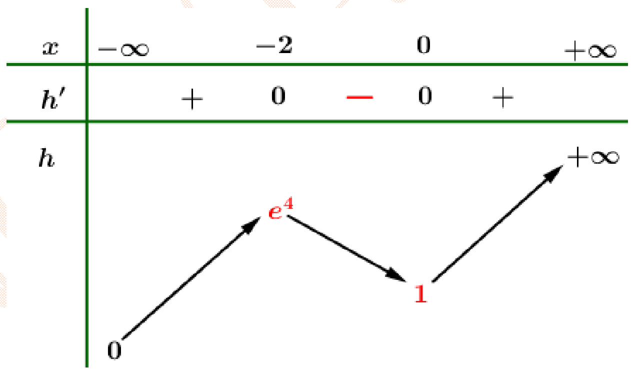
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (3x^2+6x)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ e^{x^3+3x^2}-m=-3 \\ e^{x^3+3x^2}-m=3 \\ e^{x^3+3x^2}-m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ e^{x^3+3x^2}=m-3,(1) \\ e^{x^3+3x^2}=m+3,(2) \\ e^{x^3+3x^2}=m+5,(3) \end{array}\right. .$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình $(1),(2),(3)$ là 5.

Xét hàm số $h(x)=e^{x^3+3x^2}$ có $h'(x)=(3x^2+6x)e^{x^3+3x^2}$.

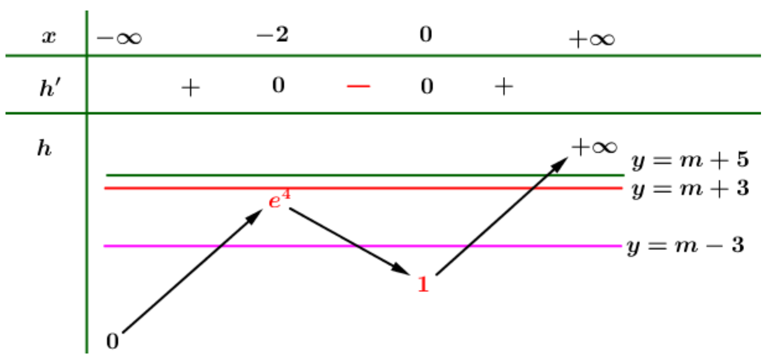
Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Khi đó có 3 trường hợp sau:

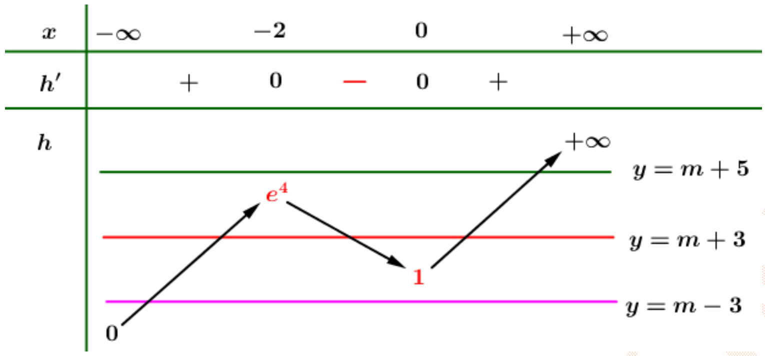
Trường hợp 1:



Khi đó: $\begin{cases} m+3\ge e^4 \\ 1<m-3<e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge e^4-3\approx 51,6 \\ 4<m<e^4+3\approx 57,6 \end{cases}$

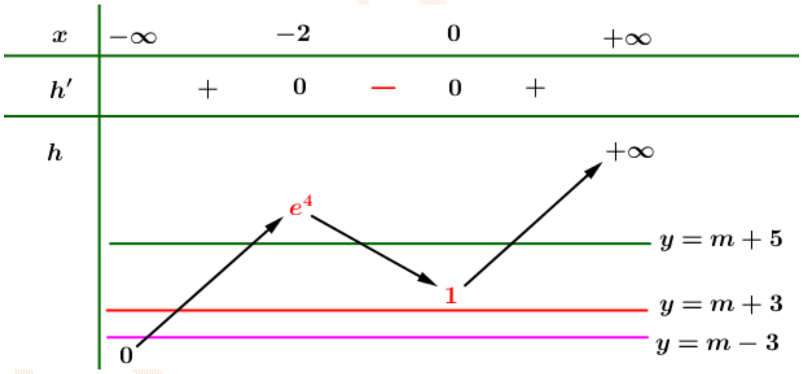
Do m nguyên nên $m\in\{52;53;54;55;56;57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó: $\begin{cases} m+5\ge e^4 \\ 1<m+3<e^4 \\ 0<m-3\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>e^4-5\approx 49,6 \\ -2<m<e^4-3 \\ 3<m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Trường hợp 3:



Khi đó: $\begin{cases} 1<m+5<e^4 \\ m+3\le 1 \\ m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<e^4-5\approx 49,6 \\ m\le -2 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x(x-1)^2(x-4); f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$ ($x=0, x=4$ là nghiệm đơn; $x=1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x)=2x.f'(x^2+m); g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x^2=-m & (1) \\ x^2=1-m & (2) \\ x^2=4-m & (3) \end{array}\right.$

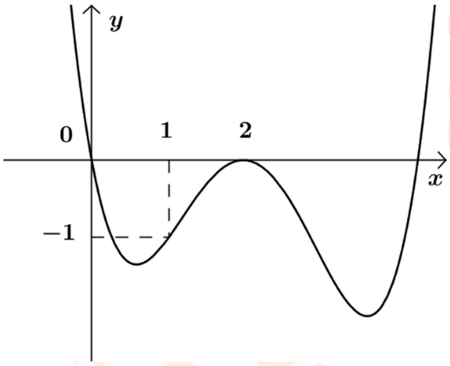
Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình $(1),(3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m<4-m$.

Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m\le 0 \\ 4-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<4$.

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{0;1;2,3\}$.Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-100;100]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-3x+m)$ có 5 điểm cực trị.

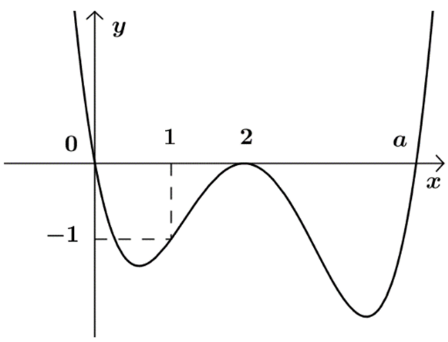
A. 102. **B.** 105. **C.** 103. **D.** 100.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'(x^2-3x+m)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1) \\ f'(x^2-3x+m)=0 & (2) \end{array}\right.$.

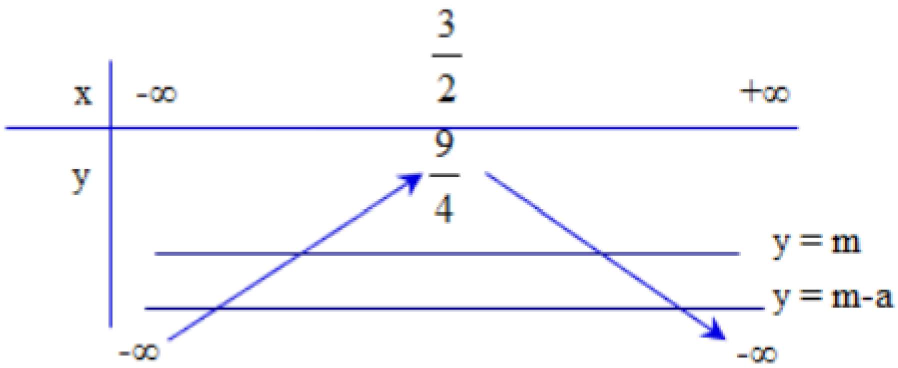
Ta có: $(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.



Và $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0 \\ x^2-3x+m=2 \\ x^2-3x+m=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+3x\ (1) \\ m-2=-x^2+3x\ (2) \\ m-a=-x^2+3x\ (3) \end{array}\right.$.

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có bảng biến thiên như sau



Do $a>2 \Rightarrow m>m-a$, nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt, tức là mỗi phương trình (1) và (3) có hai nghiệm đơn phân biệt khác $\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow m<\frac{9}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-100;100] \Rightarrow m \in \{-100;-99;......;2\}$. Vậy có 103 giá trị nguyên của $m \in [-100;100]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 16: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+2x-3$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** $\frac{17}{2}$.

Lời giải

- Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2$

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$. Ta được: $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 2^t-t-1 \le 0$

- Xét $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

$f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2=1 \Leftrightarrow t=\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \approx 0,52$

BBT:

t	$-\infty$		0		$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$			0			$+$	
$f(t)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào BBT ta thấy $f(t)\le 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 1$

Suy ra: $0\le x^2+y^2-2x+1\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2\ge 0\\ y^2\le 2x-x^2\end{cases} \Leftrightarrow y^2\le 2x-x^2$

$\Rightarrow 2x-x^2\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le 2$.

Ta có: $P=2x^2+y^2+2x-3\le 2x^2+2x-x^2+2x-3$

$=x^2+4x-3$

- Xét $f(x)=x^2+4x-3,\ x\in[0;2]$.

Có $f'(x)=2x+4>0,\forall x\in[0;2]$ $\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow f(x)\le f(2)=9$

Suy ra: $P\le 9$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}y=2x-x^2\\ x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$.

Vậy $MaxP=9$.

Câu 17: Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $\log\dfrac{x+1}{2y+1}=4y^4+4y^3-x^2y^2-2y^2x$. Khi biểu thức $4y-x^2$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

*) Ta có:

$\log\dfrac{x+1}{2y+1}=4y^4+4y^3-x^2y^2-2y^2x \Leftrightarrow \log\dfrac{xy+y}{2y^2+y}=\left(4y^4+4y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2y^2x+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(2y^2+y\right)=\left(2y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)+(xy+y)^2=\log\left(2y^2+y\right)+\left(2y^2+y\right)^2$ (1)

- Xét hàm số $f(t)=\log t+t^2$ với $t\in(0;+\infty)$.

Có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0;\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

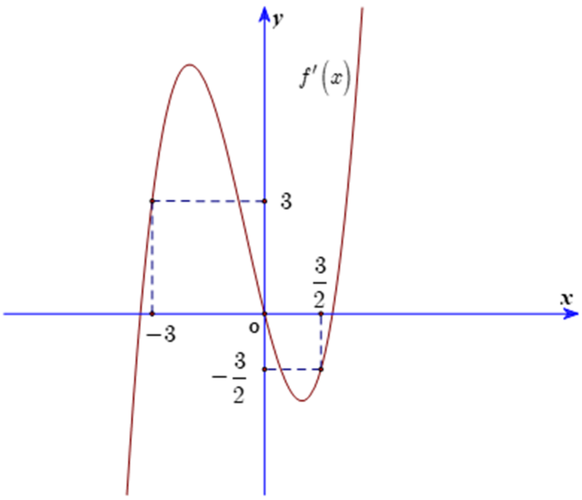
Nên $(1)\Leftrightarrow f(xy+y)=f\left(2y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y=2y^2+y\Leftrightarrow x=2y$.

*) Với $x=2y$ thì $4y-x^2=4y-4y^2=1-(2y-1)^2\le 1$.

$\Rightarrow 4y-x^2$ đạt GTLN khi $y=\dfrac{1}{2}$ $(x=1)$

Khi đó: $3x+2y=4$.

Câu 18: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|$ giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2;\dfrac{3}{2}\right]$ là

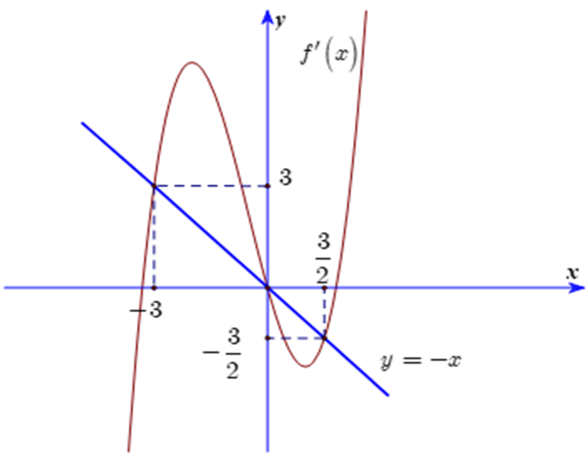
A. 2. **B.** $\dfrac{39}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{29}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+2x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm đa thức và $h(0)=4f(0)+2.0=0$

Khi đó $h'(x)=4f'(x)+4x\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$, ta có

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-3;0;\dfrac{3}{2}\right\}$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ như sau

x	$-\infty$				-3				0				$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\left\|h(x)\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$			0	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2;\dfrac{3}{2}\right]$ là $\dfrac{29}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-6)=42$ và bảng xét dấu đạo hàm như

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $y=g(x)=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$

$g'(x)=\left(-12x^3+24x\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x^5+24x^3-96x$

$=-12x\left(x^2-2\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x\left(x^2-2\right)\left(x^2+4\right)$

$=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)\right]$.

Vì $-3x^4+12x^2-15=-3\left(x^2-2\right)^2-3\le -3$

$\Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)<0 \Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)<0$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\min\limits_{[-1;1]} g\left(x\right)=g\left(-1\right)=g\left(1\right)=f\left(-6\right)-40=2$.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{mx^2+1}}$ có tiệm cận ngang.

A. $m\le 0$ **B.** $m=1$ hoặc $m=4$. **C.** $m\ge 0$ **D.** $m>0$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2+1>0$

+ **TH1:** $m=0$. Ta có: $y=\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0$ nên đồ thị hàm số có TCN: $y=0$

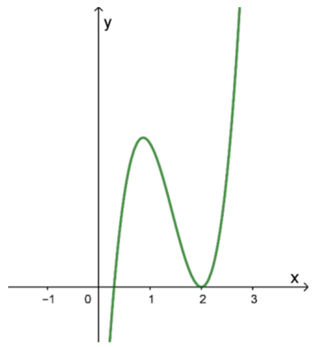
+ **TH2:** $m>0$. Suy ra: $mx^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{\sqrt{a+\dfrac{1}{x^2}}}=0$ nên đồ thị hàm số có TCN: $y=0$

+ **TH3:** $m<0$. Suy ra: $-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}<x<\sqrt{-\dfrac{1}{m}}$. Do đó: TXĐ: $D=\left(-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy $m\ge 0$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x+1}}{\left(x^4-5x^2+4\right).f\left(x\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

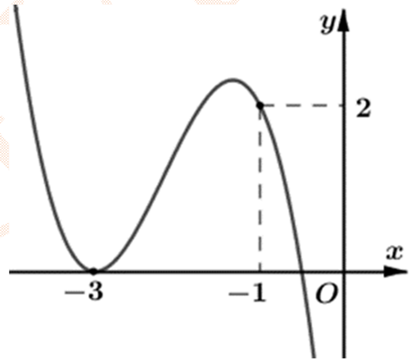
Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_0 \in (0;1)$, có hệ số $a > 0$ và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2. Từ đó suy ra $f(x) = a(x - x_0)(x-2)^2$.

Suy ra $g(x) = \dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x+1}}{(x^4-5x^2+4).f(x)} = \dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x+1}}{(x^4-5x^2+4).a(x-x_0)(x-2)^2}$ xác định trên $D = \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{x_0,1,2\}$ và $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{a(x+1)(x+2)(x-2)^2(x-x_0)}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to x_0^{+/-}} g(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^{+/-}} g(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ hữu hạn nên hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = x_0$ và $x = 2$.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -1 \end{array}\right.$.

Nhận xét: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

$$x\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right..$$

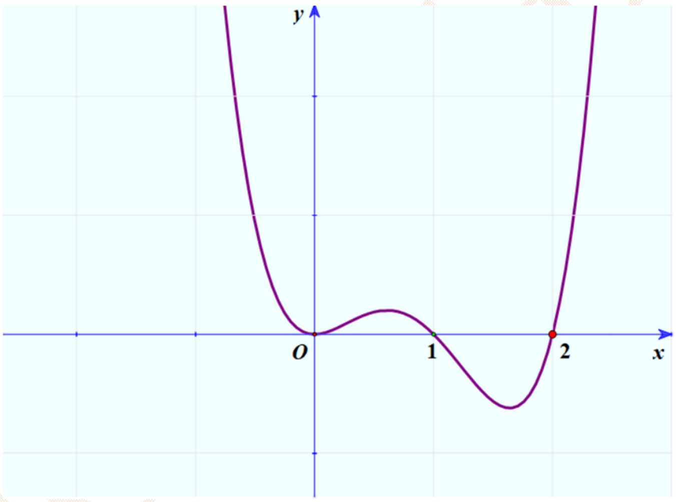
Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có:

+ Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=x_1\in(0;-1) \end{array}\right.$ (trong đó $x=-3$ là nghiệm bội hai).

+ Phương trình $f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=x_2<-1 \\ x=x_3<-3 \end{array}\right..$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bốn đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=0$; $x=-3$; $x=x_2$ và $x=x_3$.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+x\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -1 \end{array}\right..$

Nhận xét: Dựa vào đồ thị ta có: $f(x)=ax^2(x-1)(x-2)$. Nên $\lim\limits_{x\to\mp\infty} y=0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

Mặt khác: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (trong đó $x=0$ là nghiệm bội hai).

$$f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\,(-1<x_1<0) \\ x=x_2\,(2<x_2<3) \end{array}\right..$$

$$2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Từ đó suy ra đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng là: $x=x_2$, $x=-1$ và $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang và ba đường tiệm cận đứng.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2-2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị thuộc khoảng $(1;4)$?

A. 44. **B.** 47. **C.** 33. **D.** 39.

Lời giải

Có $f'(x)=x^2-2x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Từ $g(x)=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ suy ra $g(x)'=\left(4x^3-36x\right)f'\left(x^4-18x^2+m\right)$,

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, x=\pm 3 \\ x^4-18x^2+m=0 \\ x^4-18x^2+m=2 \end{array}\right.$$

Xét $\left[\begin{array}{ll} x^4-18x^2=-m & (2) \\ x^4-18x^2=-m+2 & (3) \end{array}\right.$

Đặt $h(x)=x^4-18x^2$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0	1		3		4	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0		$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	↘	-81	↗	0	-17 ↘		-81	↗	-32	$+\infty$

Để $g'(x)=0$ có 7 cực trị thì:

Phương trình (2) có 2 nghiệm đơn phân biệt khác $0;\pm 3$ khi và chỉ khi

$-81<-m\le -32 \Leftrightarrow 32\le m<81 \Rightarrow m\in\{32;34...;80\}$

Phương trình (3) có 2 nghiệm đơn phân biệt khi và chỉ khi

$-81<-m+2\le -32 \Leftrightarrow 34\le m<83 \Rightarrow m\in\{34;34...;82\}$

Vậy $m\in\{34;35...;80\}$

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-3x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$ có 5 điểm cực trị thuộc khoảng $(1;4)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** vô số. **D.** 5.

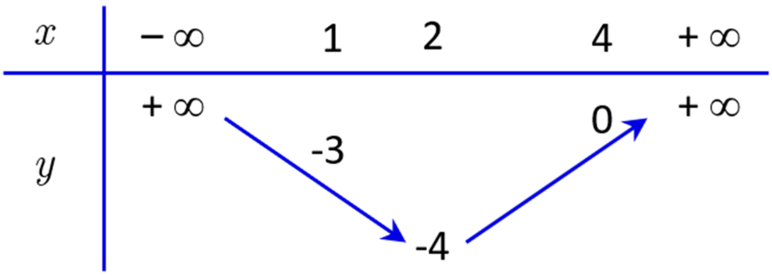
Lời giải

Ta có $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-3x\right)=(x-1)^2.x(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=3\end{array}\right.$

Từ $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$ suy ra $g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\f'\left(x^2-4x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+m=0\\x^2-4x+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2&\\x^2-4x=-m&(1)\\x^2-4x=-m+3&(2)\end{array}\right.$$

Đặt $h(x)=x^2-4x$, có bảng biến thiên như sau:



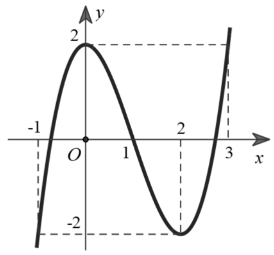
Để hàm số đã chọn có 5 điểm cực trị khi và chỉ phương trình (1); (2) có 2 nghiệm khác 2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4<-m\le-3\\-4<-m+3\le-3\\-m\ne-4\\-m+3\ne-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le m<4\\6\le m<7\end{cases}\Leftrightarrow m\in\phi$$

Vậy $m\in\phi$

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị

$y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2022$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

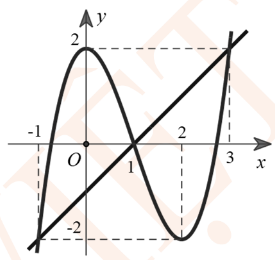
Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-m)=x-m-1$

Đặt $x-m=t \Rightarrow f'(t)=t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và và đường thẳng $y=t-1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

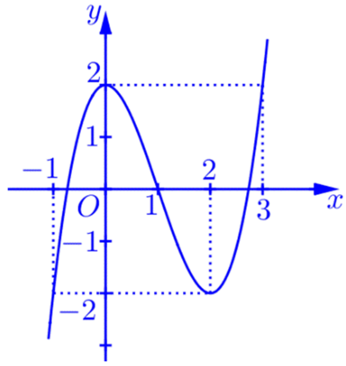
Hay $\left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x-m<1 \\ x-m>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1<x<m+1 \\ x>m+3 \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ thì $\left[\begin{array}{l} m-1\le 2<3\le m+1 \\ m+3\le 2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le m\le 3 \\ m\le -1 \end{array}\right.$

Vì m là các số nguyên dương nên $S=\{2;3\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $2+3=5$.

Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có $f\left(5\right)>8$ và $f\left(1\right)=0.$ Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-8;-4\right)$. **B.** $\left(-10;-8\right)$. **C.** $\left(4;+\infty\right)$. **D.** $\left(2;4\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x^2}{8}$

Ta có $h'\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x}{4}=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\left(f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{x}{2}\right)=0$ (3)

Đặt $1-\dfrac{x}{2}=t\Rightarrow\dfrac{x}{2}=1-t$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow f'\left(t\right)-\left(t-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=0\\x=4\end{array}\right.$

Ta có $h(0)=f\left(1\right)-0=f\left(1\right)=0$; suy ra $h(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=0\\x=b(a<0<b)\end{array}\right.$

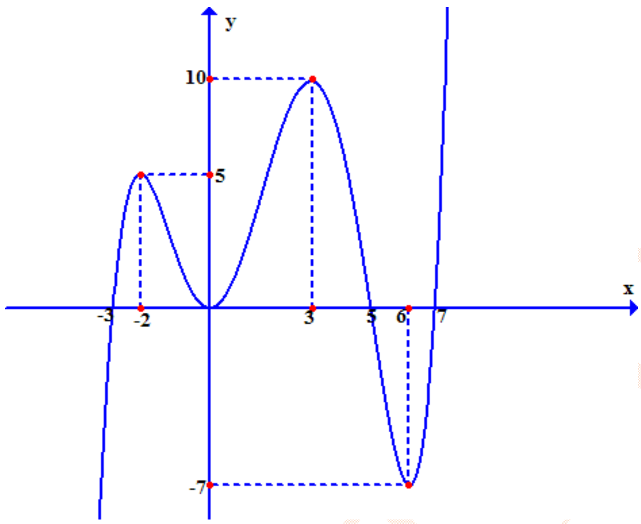
Ta có bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	a		-4		0		4	b	$+\infty$
y'		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$			$h(-4)$		0		$h(4)$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0		$g(-4)$		0		$g(4)$	0	$+\infty$

Ta có $h(-8)=f\left(1-\frac{-8}{2}\right)-\frac{(-8)^2}{8}=f(5)-8>0$, vì $f(5)>8$, suy ra $-8<a$.

Từ đó ta có hàm số nghịch biến trên $(-10;-8)$.

Câu 28: Cho Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(2x^3-6x+1\right)+3=m$ có 7 nghiệm phân biệt.



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9

Lời giải

Đặt $t=2x^3-6x+1$.

$\Rightarrow t'=6x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
t'	$+$ 0 $-$ 0 $+$
t	5 $+\infty$ $-\infty$ -3

Dựa vào bảng biến thiên :

Ứng với mỗi giá trị $t<-3 \vee t>5 \Rightarrow$ có 1 nghiệm của x .

Với $t=-3 \vee t=5 \Rightarrow$ có 2 nghiệm của x .

Với $-3<t<5 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của x .

Phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2f(t)+3=m \Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt $-3<t<5$ và một nghiệm $t>5$

$\Leftrightarrow 5<\frac{m-3}{2}<10 \Leftrightarrow 13<m<23 \Rightarrow$ có 9 giá trị của m.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)-2=0$ có đúng 12 nghiệm.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Xét phương trình $y = x^3 - 3x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

$$f\left(\left|x^4 - 8x^2\right| + m\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^4 - 8x^2\right| + m = 0 \\ \left|x^4 - 8x^2\right| + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^4 - 8x^2\right| = -m \\ \left|x^4 - 8x^2\right| = 3 - m \end{array}\right..$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ -2 0 2 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$
$g(x)$	$+\infty$ $+\infty$ 0 -16 -16
$\left\|g(x)\right\|$	$+\infty$ $+\infty$ 16 16 0 0 0

Để phương trình đã cho có đúng 12 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3 - m < 16 \\ 0 < -m < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 < m < 3 \\ -16 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -13 < m < 0$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của m

Câu 30: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2010. **B.** 2011. **C.** 4048. **D.** 2024.

Lời giải

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3\sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m - 15x \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 15x$ $(*)$.

Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \ne 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \dfrac{1}{x^3} = \sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{m - 15x}\right)^3 + 3\sqrt{m - 15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{m-15x}\ (2)$.

+ Trường hợp 1: $x<0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}<0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm.

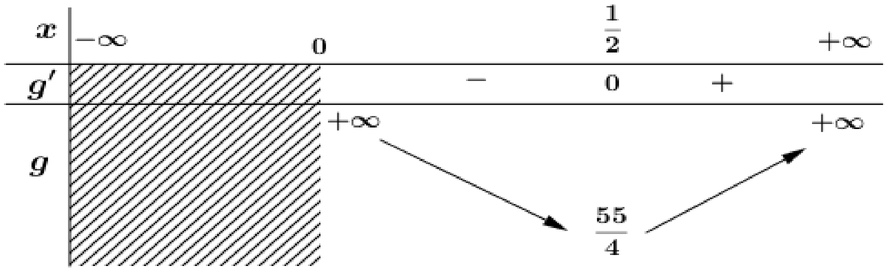
+ Trường hợp 2: $x>0$. Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ x+\dfrac{1}{x}>0 \end{cases}$ nên

$(2) \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=m-15x \Leftrightarrow m=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

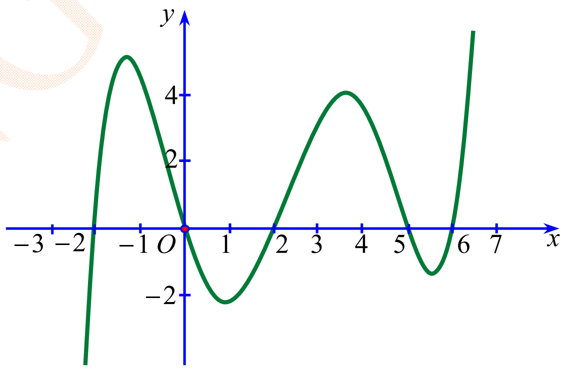


Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>\dfrac{55}{4}$ (thỏa $m>0$).

Kết hợp với m nguyên và $m\in[-2024;2024]$ suy ra $m\in\{14;15;.....;2024\}$.

Khi đó S có $2024-14+1=2011$ phần tử.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(5)=3$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=4$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=0; x=0; x=2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=0; x=2; x=5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$

$S_1 = -\int_0^2 f'(x)dx = f(0) - f(2)$; $S_2 = \int_2^5 f'(x)dx = f(5) - f(2)$;

$S_3 = -\int_5^6 f'(x)dx = f(5) - f(6)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(5) > f(0)}$

và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(6) > f(0)}$

Khi đó ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình $f(x) = 4$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{f(x)+m} = u \Rightarrow f(x) + m = u^3 \Rightarrow \begin{cases} f(u) = x^3 - m \\ f(x) = u^3 - m \end{cases}$

$\Rightarrow f(u) - f(x) = x^3 - u^3 \Leftrightarrow f(u) + u^3 = f(x) + x^3$

Xét hàm $g(x) = f(x) + x^3 = x^5 + 3x^3 - 4m + x^3 = x^5 + 4x^3 - 4m$ có $g'(x) = 5x^4 + 12x^2 > 0, \forall x \in [1;2]$

Do đó $y = g(x)$ đồng biến trên $[1;2]$.

$\Rightarrow f(u) + u^3 = f(x) + x^3 \Leftrightarrow u = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow f(x) + m = x^3$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m + m = x^3 \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$

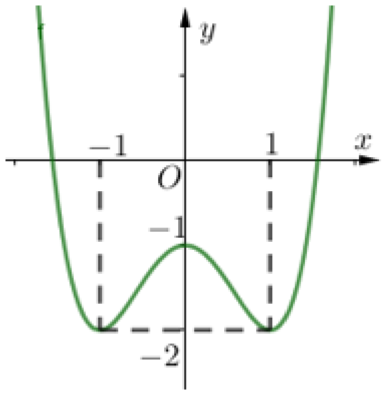
Xét hàm $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên $[1;2]$ có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0, \forall x \in [1;2]$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $[1;2] \Rightarrow h(1) \le h(x) \le h(2) \Rightarrow 3 \le h(x) \le 48$.

Phương trình $h(x) = 3m$ có nghiệm thuộc $[1;2] \Rightarrow 3 \le 3m \le 48 \Rightarrow 1 \le m \le 16$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2023;2024]$ sao cho phương trình $f\left(\frac{1}{\ln x-2}\right)=m$ có đúng hai nghiệm.

A. 2027. **B.** 2026. **C.** 2025. **D.** 2024.

Lời giải

Xét $u(x)=\frac{1}{\ln x-2}$

Tập xác định $D=(0;+\infty)\backslash\{e^2\}$

Ta có $u'(x)=-\frac{1}{x(\ln x-2)^2}<0,\forall x\in(0;+\infty)\backslash\{e^2\}$

Bảng biến thiên

x	0	e^2	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	||	$-$
$u(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\ln x-2}\right)$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	0		e^2			$+\infty$
$u(x)$	0	-1	$-\infty$	$+\infty$	1	0
$f(u(x))$	-1 ↘	-2 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘	-2 ↗	-1

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f\left(\dfrac{1}{\ln x-2}\right)=m$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $m=-2$ hay $m\geq -1$

Vậy có 2027 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=f(2x-1)+m$. Khi $\max\limits_{[0;2]} g(x)=-10$ thì giá trị của tham số m bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 13.

Lời giải

Đặt $u=2x-1\Rightarrow g(x)=f(u)+m$.

$x\in[0;2]\Rightarrow u\in[-1;3]$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max\limits_{[0;1]} g(x)=\max\limits_{[-1;3]}\left(f(u)+m\right)=\max\limits_{[-1;3]} f(u)+m=3+m$.

Để $\max\limits_{[0;2]} g(x)=-10\Leftrightarrow m=-13$. Chọn A.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-4x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-2x\right)\Rightarrow\ g'(x)=(2x-4)\left(x^2-4x+m+1\right)^2\left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-4x+m-2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ \left(x^2-4x+m+1\right)^2=0 & (1)\\ x^2-4x+m=0 & (2)\\ x^2-4x+m-2=0 & (3)\end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-4x+m+1\right)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ 4-m+2>0 \\ 4-8+m \neq 0 \\ 4-8+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m<6 \\ m \neq 4 \\ m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow m<4.$$

m nguyên dương và $m<6$ nên có 5 giá trị m cần tìm. Chọn D.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị.

A. 83 **B.** 81 **C.** 80. **D.** 84

Lời giải

Ta có:

$y'=(4x^3-36x).f'(x^4-18x^2+m)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^4-18x^2+m)=0 \\ 4x^3-36x=0 \end{array}\right..$$

Với

+) $4x^3-36x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$ có 3 nghiệm đơn.

+) $f'(x^4-18x^2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2+m=0 \\ x^4-18x^2+m=82 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2=-m \\ x^4-18x^2=-m+82 \end{array}\right..$

Xét hàm số: $g(x)=x^4-18x^2$ có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right..$

Ta có BBT của hàm số $g(x)=x^4-18x^2$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
g'(x)		—	0	+	0	—	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	-81	↗	0	↘	-81	↗	$+\infty$

Để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị thì $y=f'(x^4-18x^2+m)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt khác 0, ± 3.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m \le -81 \\ -81 < -m + 82 < 0 \end{cases} \\ -m + 82 > -m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 82 < m < 163 \\ m \le 0 \end{array}\right.$$

Mà $m \in N^*$ nên $m \in \{83, 84, ..., 161, 162\}$. Nên có 80 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

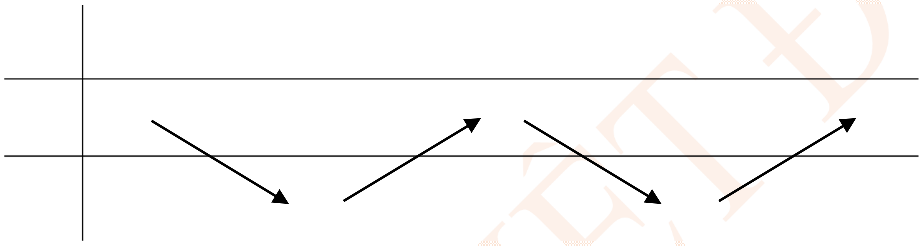
Lời giải

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = m$

YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt

Đặt $g(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

BBT



Vậy $-4 < m < -3$, mà m nguyên nên không có m nào.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ ($x = 0, x = 3$ là nghiệm đơn; $x = 1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2 + m); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 1 - m & (2) \\ x^2 = 3 - m & (3) \end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình $(1), (3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$.

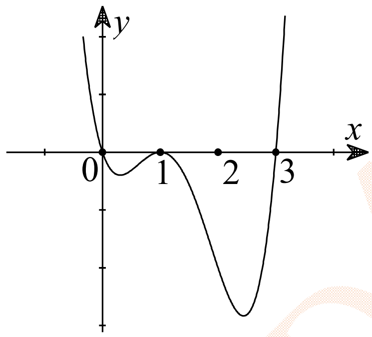
Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 0 \\ 3-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Do hàm số $y=f(x^2+m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$y=f(x^2+m) \Rightarrow y'=2xf'\left(x^2+m\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \\ x^2=1-m \\ x^2=3-m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x=1$ nên các nghiệm của pt $x^2=1-m$ (nếu có) không làm $f'\left(x^2+m\right)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \\ x^2=3-m \end{array}\right.$.

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \le 0 \\ 3-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của thoả mãn.

Câu 40: Cho hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

A. 21 **B.** 15 **C.** 7 **D.** 14

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-6$	↗	$m-1$	↘	$m-33$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<6$ mà $m\in Z \Rightarrow m\in\{2,3,4,5\}$

Tổng các giá trị nguyên của m là 14.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2+3x-4\right)$. Gọi S là tập các số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{array}\right.$.

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$

$g'(x)=(2x-4)\,f'(x^2-4x+m)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ \left(x^2-4x+m-2\right)^2=0 & \\ h_1(x)=x^2-4x+m-1=0 & (1) \\ h_2(x)=x^2-4x+m+4=0 & (2) \end{array}\right..$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình và có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h_2(2) \neq 0 \\ \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 5 \\ \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \leq m < 5.$$

Mà $m \in [-10;10]$ do đó $m \in \{0;1;2;3;4\}$ có 5 phần tử.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x).f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right..$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

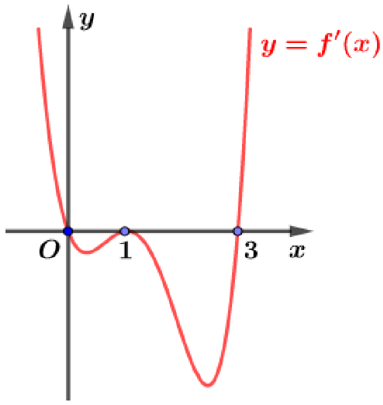
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$0 < m-2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



A. Vô số. **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$y' = 2x.f'(x^2+m)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \\ x^2+m=1 \\ x^2=-m+3 \end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1. Do đó hoặc phương trình $x^2+m=1$ vô nghiệm hoặc nghiệm của phương trình $x^2+m=1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y'=0$.

Nếu $\begin{cases} -m \neq 0 \\ -m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $x=0$ là nghiệm đơn của phương trình $y'=0$.

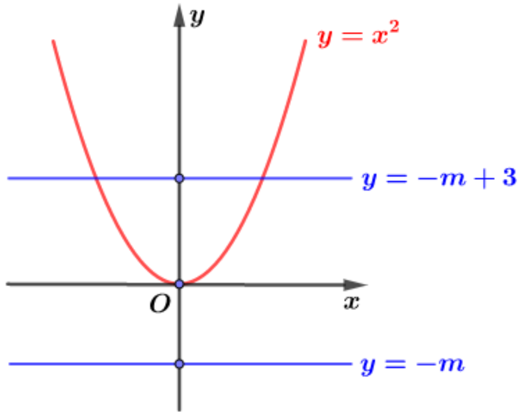
Nếu $\left[\begin{array}{l} -m=0 \\ -m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ thì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y'=0$.

Suy ra $x=0$ là một điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$, $\forall m$.

Xét các phương trình: $x^2=-m$ (1) và $x^2=-m+3$ (2).

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung; $-m < -m+3, \forall m$

Minh họa đồ thị



Xét $-m > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_3; x_4. Khi đó y' đổi dấu 5 lần qua các nghiệm x_1; x_2; x_3; x_4 và 0 nên hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 5 điểm cực trị.

Xét $-m + 3 \le 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm; phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 1 điểm cực trị.

Xét $\begin{cases} -m \le 0 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$; phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, để hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 3 điểm cực trị thì $0 \le m < 3$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x) = f\left(-x^4 + 2x^2 - m\right)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;3)$?

A. 62. **B.** 60. **C.** 61. **D.** 64.

Lời giải

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

*) Xét trên $(0;3)$

$$g'(x) = \left(-4x^3 + 4x\right) f'\left(-x^4 + 2x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0;3) \\ x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \\ f'\left(-x^4 + 2x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ f'\left(-x^4+2x^2-m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ -x^4+2x^2-m=1 \\ -x^4+2x^2-m=2 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=-x^4+2x^2-m$ trên $(0;3)$

$h'(x)=-4x^3+4x$, $h'(x)=-4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \end{array}\right.$ trên $(0;3)$ chỉ lấy nghiệm $x=1$

x	0		1		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-m$	$\nearrow$	$1-m$	$\searrow$	$-63-m$
				$y=2$	
				$y=1$	

Để hàm số $g(x)$ có 3 cực trị điều kiện $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bậc lẻ khi đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-m\le 2 \\ -m<1<1-m \end{cases} \\ \begin{cases} -63-m<1 \\ 2\le -m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1\le m \\ -1<m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -64<m \\ m\le -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ -64<m\le -2 \end{array}\right.$$

Do m nguyên nên $m\in\{-63;-62;...;-2\}$ có 62 giá trị thoả mãn bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tham số $m\in(a;b)$ thì hàm số hàm số $g(x)=f\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)$ đạt nhiều cực trị nhất là c cực trị. Tính tổng $a+b+c$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 6 . **D.** 11.

Lời giải

$f'(x)=x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ trong đó $x=0$ là nghiệm bậc hai không cho được cực trị

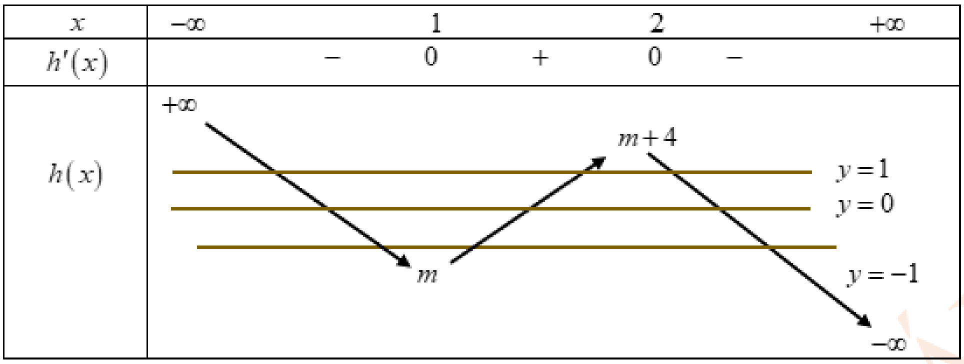
$$g'(x)=\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)' f'\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)=\frac{\left(-x^3+3x^2+m\right).\left(-x^3+3x^2+m\right)'}{\left|-x^3+3x^2+m\right|}f'\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)$$

$$=\frac{\left(-x^3+3x^2+m\right).\left(-3x^2+6x\right)}{\left|-x^3+3x^2+m\right|}f'\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)$$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(-x^3+3x^2+m\right).\left(-3x^2+6x\right)}{\left|-x^3+3x^2+m\right|}f'\left(\left|-x^3+3x^2+m\right|\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3+3x^2+m\neq 0 \\ -3x^2+6x=0 \\ \left|-x^3+3x^2+m\right|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3+3x^2+m\neq 0 \\ x=0;x=2 \\ -x^3+3x^2+m=\pm 1 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2+m$; $h'(x)=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ lập được bảng biến thiên



Để có nhiều cực trị nhất thì $g'(x)$ phải có nhiều nghiệm và điểm làm $g'(x)$ không xác định nhất. Dựa bảng biến thiên ta có $m<-1<1<m+4\Leftrightarrow -3<m<-1\Rightarrow m\in(-3;-1)$

Khi đó $a=-3$; $b=-1$; $c=11$ có $a+b+c=7$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)\quad x^3+x, =x\quad \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x)=f\left(x^4+2x^3-mx^2\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;2)$?

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

$f'(x)=x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

*) Xét trên $(-1;2)$

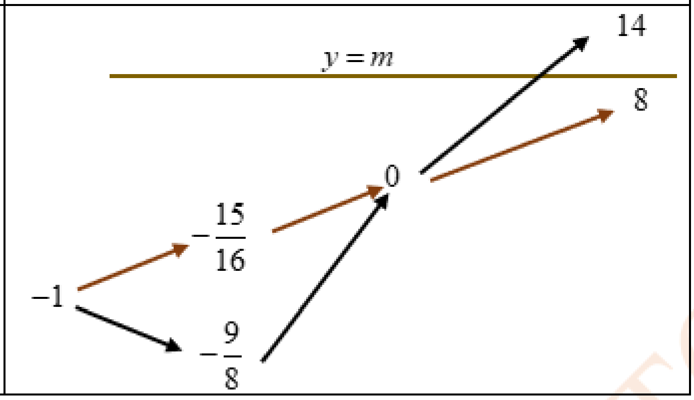
$$g'(x)=\left(4x^3+6x^2-2mx\right)f'\left(x^4+2x^3-mx^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(-1;2) \\ 4x^2+6x-2m=0 \\ x^4+2x^3-mx^2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(-1;2) \\ 2x^2+3x=m\ \ (1) \\ {}^2+2\quad =m\quad (2)\quad x\qquad x \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=2x^2+3x$; $k(x)=x^2+2x$ trên $(-1;2)$ có $h'(x)=4x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$; $k'(x)=2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$ lập bảng biến thiên của cả hai hàm $h(x);k(x)$ trên cùng một hình ta được kết quả như sau:

x	-1		$-\frac{3}{4}$		0		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$k'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	

$h(x)$; $k(x)$



Để hàm số $g(x)$ có 2 cực trị điều kiện $g'(x)=0$ có 2 nghiệm bậc lẻ mà $g'(x)$ đã có nghiệm $x=0$ nên tổng hai phương trình $(1);(2)$ có thêm một nghiệm khác 0, dựa vào bảng biến thiên trên ta có

$\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 8\le m<14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 8\le m<14 \end{array}\right.$ mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;8;9;10;11;12;13\}$ có 7 giá trị

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx-2m-1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2024 để hàm số $y=f(x^2+1)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 2026. **C.** 2024. **D.** 2025.

Lời giải

Ta có: $y'=\left(f\left(x^2+1\right)\right)'=2x.f'\left(x^2+1\right)=2x.\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2\right)^2\left[\left(x^2+1\right)^2+2m\left(x^2+1\right)-2m-1\right]$

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left(x^2+1\right)^2+2m\left(x^2+1\right)-2m-1=0 \xrightarrow{t=x^2+1\ (t\ge1)} t^2+2mt-2m-1=0\ \ (1) \end{array}\right.$.

Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x=0$ là 1 cực trị của hàm số.

Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm

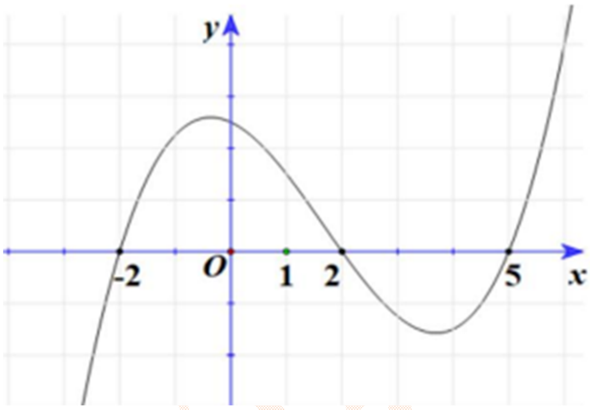
$t_1;t_2\le1\Leftrightarrow\begin{cases} t_1-1\le0 \\ t_2-1\le0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta' = m^2+2m+1\le 0\\ \begin{cases}\Delta' = m^2+2m+1>0\\ (t_1-1)+(t_2-1)\le 0\\ (t_1-1)(t_2-1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ \begin{cases}m\ne -1\\ t_1+t_2\le 2\\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ \begin{cases}m\ne -1\\ -2m\le 2\\ -2m-1-(-2m)+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ \begin{cases}m\ne -1\\ m\ge -1\\ 0\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m>-1\end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge -1$$

Vậy tập hợp các giá trị m thỏa đề là $S=\{-1;0;1;...;2024\}$ nên có 2026 giá trị m.

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2026. **B.** 2022. **C.** 2024. **D.** 2020.

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=2\\ x=5\end{array}\right.$$

$$y'=\frac{(2x+1)(x^2+x-2)}{\left|x^2+x-2\right|}f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$$

Điểm đặc biệt: $y'=0$ hoặc y' không xác định $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\\ f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)=0 \quad (1)\end{array}\right.$

Ta thấy $x=-\frac{1}{2};x=1;x=-2$ là các nghiệm đơn của y'.

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|-m=-2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|=m-2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+5 \end{array}\right.$$

Ta có BBT của hàm số $t=\left|x^2+x-2\right|$ như sau:

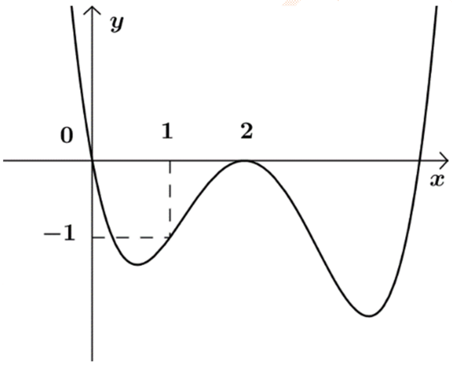
x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\left(\left\|x^2+x-2\right\|\right)'$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$\left\|x^2+x-2\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình (1) không có nghiệm đơn.

Dựa vào BBT trên, phương trình (1) không có nghiệm đơn $\Leftrightarrow m+5\le 0 \Leftrightarrow m\le -5$

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2024;2024] \Rightarrow m\in\{-2024;-2023;......-5\}$. Vậy tập S có 2020 phần tử.

Câu 49: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

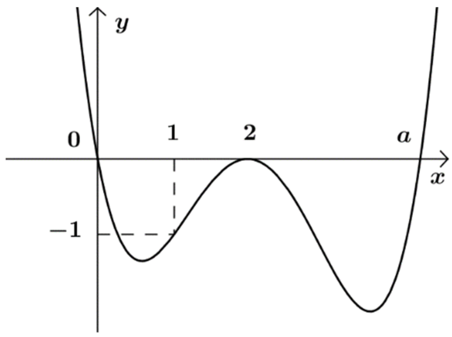
A. 2025. **B.** 2. **<u>C.</u>** 2027. **D.** 2024.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'\left(x^2-3x+m\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1) \\ f'\left(x^2-3x+m\right)=0 & (2) \end{array}\right..$$

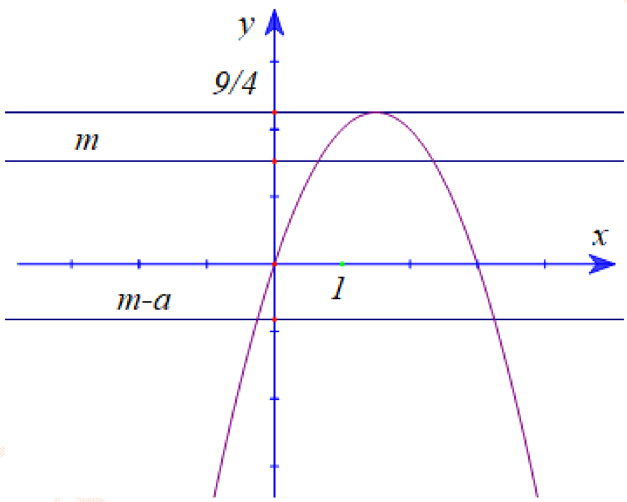
Ta có: $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.



Và $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\\x^2-3x+m=2\\x^2-3x+m=a,\ a>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-x^2+3x\\m-2=-x^2+3x\\m-a=-x^2+3x\end{array}\right.$.

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a>2$, suy ra $m<\frac{9}{4}$ .phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<\frac{9}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z},\ m\in[-2024;2024]\Rightarrow m\in\{-2024;-2023;......;2\}$. Vậy tập S có 2027 phần tử.

--------HẾT------

Câu 50: **(Đề TK BGD 2024)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(2;3;0)$, độ dài đường sinh bằng 5 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z-1=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q):x-4y+z+4=0$ và M là một điểm di động trên (C). Hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

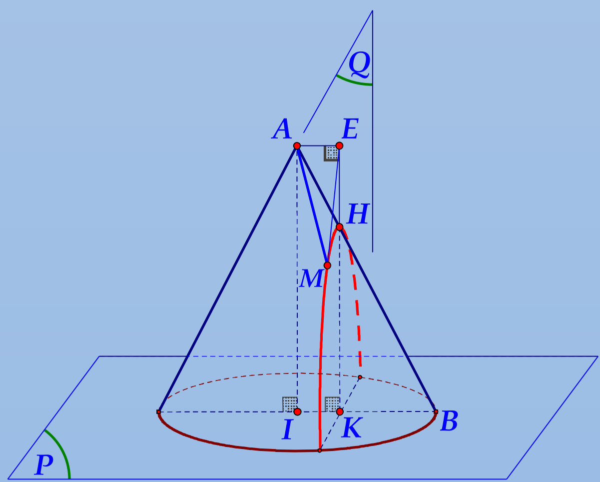
Chọn A

Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

Theo đề bài ta có $l=5$ và $h=d\left(A,(P)\right)=2$. Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{21}$.

Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=(2;1;2)\\ \overrightarrow{n_Q}=(1;-4;1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\Rightarrow (P)\perp(Q)$.

Khi đó giao tuyến (C) là một parabol có đỉnh H (như hình vẽ).



Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên (Q).

Và $d\left(A,(Q)\right)=AE=\sqrt{2}\,(=IK)$ do $IA\,//\,(Q)$. Ta có: $AM=\sqrt{AE^2+EM^2}=\sqrt{2+EM^2}$

Đồng thời $EM\ge EH$. Do đó $AM_{\min}\Leftrightarrow AM=AH$ hay $M\equiv H$.

Vì $IA\,//\,HK\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{IK}{IB}(Thales)\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}.5=\frac{5\sqrt{42}}{21}\approx 1,54\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO CÂU 50

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và

(P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;3), I(1;2;-4)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-10=0$. Điểm M di động sao cho độ dài $MI=5$ và N thuộc mặt phẳng (P) sao cho diện tích tam giác AIN bằng $18\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN nằm trong khoảng nào?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(19;20)$. **D.** $(11;12)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;3;-5)$, $B(1;1;-5)$, $C(4;3;-1)$ và mặt cầu (S_m): $x^2+y^2+z^2+(m-2)x+4y+(m-2)z-3=0$ (m là tham số thực). Gọi (T) là tập hợp các điểm cố định mà mặt cầu (S_m) luôn đi qua với mọi số thực m và M là một điểm di động trên (T) sao cho thể tích tứ diện $MABC$ đạt giá trị lớn nhất $V_{\max}$. Giá trị $V_{\max}$ bằng

A. $V_{\max}=\sqrt{7}+8$. **B.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+10$. **C.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+5$. **D.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+8$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right), B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A,B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Đặt M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-2), B(-1;3;2), I(9;0;0)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài IC. Giá trị M^2+m^2 bằng

A. 322. **B.** 268. **C.** 266. **D.** 324.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (α) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α)) có thể tích lớn nhất, biết rằng mặt phẳng $(\alpha): 2x-by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=-16$. **B.** $S=20$. **C.** $S=-22$. **D.** $S=-14$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R=1$. Xét điểm M thay đổi trên (P). Khối nón (N) có đỉnh là I và đường tròn đáy là đường tròn đi qua tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;3), B(-2;-1;1)$. Gọi $(S_1),(S_2)$ lần lượt là hai mặt cầu thay đổi luôn tiếp xúc với đường thẳng AB lần lượt tại các điểm A,B, đồng thời tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $M(a;b;c)$. Khi khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2024=0$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 5 **C.** 3 **D.** 2

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(1;4;0)$, độ dài đường sinh bằng $\sqrt{19}$ và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-3=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q): x-2(m+1)y+mz+2m+1=0$ và M là một điểm di động trên (C). Khi khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất thì giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R=1$. Xét điểm M thay đổi trên (P). Khối nón (N) có đỉnh là I và đường tròn đáy là đường tròn đi qua tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là $x+ay+bz+c=0$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 13: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3$. Xét khối trụ (T) có trục song song với trục Ox và có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S). Khi (T) có thể tích lớn nhất, giả sử phương trình các mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của (T) là $x+by+cz+d=0$ và $x+by+cz+d'=0$ $(d>d')$. Giá trị của $2d-d'$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho hình nón (N) có đỉnh $S(4;5;-3)$, bán kính đáy 12 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y-2z+28=0$. Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Câu 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=\frac{7}{3}$. **D.** $T=-\frac{7}{3}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$ và điểm $A(0;1;9)$. Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $(5;5;0)$. **B.** $(6;4;0)$. **C.** $(4;6;0)$. **D.** $(3;4;0)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt cầu (S) luôn qua A, B, C và đồng thời cắt ba tia Ox, Oy, Oz tại ba điểm phân biệt M, N, P. Gọi H là trực tâm của tam giác MNP. Tìm giá trị nhỏ nhất của HI với $I(4;2;2)$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 7.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh $O(0;0;0)$, độ dài đường sinh bằng $\sqrt{5}$ và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): z+2=0$. Mặt phẳng $(Q): x-3y=0$ cắt đường tròn đáy tại hai điểm A,B. Mặt phẳng $(R): 3z+2=0$ cắt đường sinh OB tại điểm K. Hỏi độ dài đường ngắn nhất chạy trên bề mặt của hình nón $(\mathcal{N})$ nối từ A đến K nằm trong khoảng nào?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

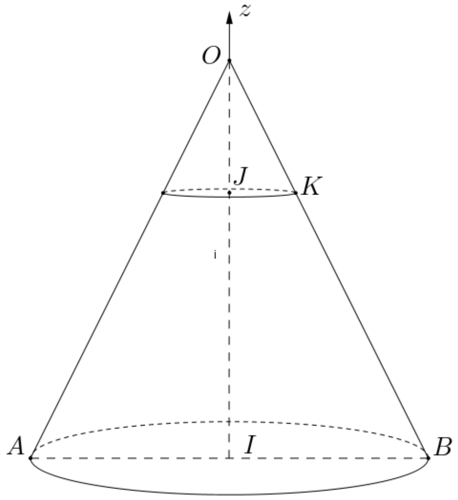
Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

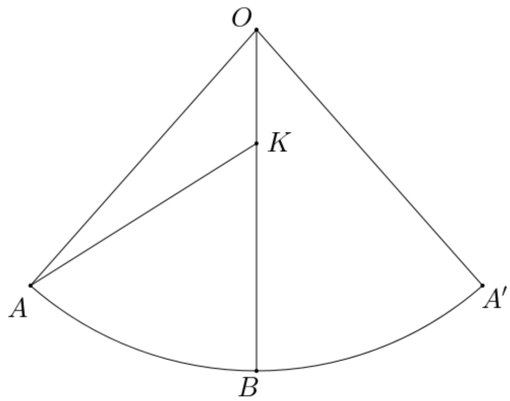
Theo đề bài ta có $l=\sqrt{5}$ và $h=d(O,(P))=2$. Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=1$.

Tâm I của đường tròn đáy là hình chiếu của O lên (P), suy ra $I(0;0;-2)$.

Dễ thấy O, I đều nằm trên (Q) nên (Q) đi qua trục của nón, cắt nón tạo thành thiết diện là tam giác AOB với AB là một đường kính của đường tròn đáy.

Mặt khác, $d(O,R)=\frac{2}{3}$ và hình chiếu của O lên (R) là $J\left(0;0;-\frac{2}{3}\right)$ nằm giữa O và I nên điểm K sẽ nằm giữa đoạn OB thỏa mãn $\frac{OK}{OB}=\frac{OJ}{OI}=\frac{1}{3}$ (hình vẽ bên trái)





+ Khai triển hình nón dọc theo đường sinh OA (trải ra mặt phẳng)

+ Ta được hình quạt $OABA'$ (hình bên phải)

+ Trong các điều kiện của bài toán đường ngắn nhất trên mặt nón trở thành đoạn thẳng AK

+ Trong tam giác OAK ta có: $AK^2 = AO^2 + OK^2 - 2AO.OK.\cos\alpha$, với $OA=\sqrt{5}, OK=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Tính độ dài cung $AA'=2\pi$ nên độ dài $\overset{\frown}{AB}=\pi$; từ đó tính góc SAB qua độ dài cung AB; $\widehat{AOB}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. Từ đó suy ra $AK=\sqrt{5+\frac{5}{9}-2.\frac{5}{3}\cos\frac{\pi}{\sqrt{5}}}\approx 2,237$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4), B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$ và N là điểm di động luôn cách d một khoảng là 1 đơn vị và cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng không quá 3 đơn vị. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của MN bằng

A. $3\sqrt{11}+1$. **B.** $\sqrt{58}+1$. **C.** $3\sqrt{10}+1$. **D.** 11.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+7=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2+2y-6z+7=0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN=2$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. $\sqrt{18+2\sqrt{10}}$. **B.** $\sqrt{18-4\sqrt{10}}$. **C.** $18-2\sqrt{10}$. **D.** $18+2\sqrt{10}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+10=0$ song song với nhau. Biết $A(1;2;1)$ là điểm nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Biết rằng khi (S) thay đổi thì tâm của nó luôn nằm trên một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA=2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): 2x-y+2z-3=0$, $(Q): 2x-y+2z+7=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng này. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với cả (P) và (Q). Biết khi (S) thay đổi thì tâm I của nó luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Bán kính hình tròn giới hạn bởi (C) là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+4=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của hình tròn giao tuyến khi đó là

A. $S=6\pi$. **B.** $S=19\pi$. **C.** $S=\dfrac{9}{2}\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oyz). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$. **B.** $\left(1;\dfrac{21}{5};\dfrac{28}{5}\right)$. **C.** $(0;-4;3)$. **D.** $(0;-7;14)$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a;-2;2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;1;a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m;n;p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)}=\dfrac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 225. **B.** 250. **C.** 256. **D.** 252.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;4;-1)$, $B(0;0;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z+1=0$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và (N) là hình nón có đỉnh A và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α); gọi (T) là hình trụ nội tiếp hình nón (N) và (β) là mặt phẳng chứa một trong hai đáy của hình trụ ((β) khác (α)). Khi thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất thì (β) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(1;1;\frac{1}{6}\right)$. **B.** $N(4;1;1)$. **C.** $P\left(\frac{10}{3};1;1\right)$. **D.** $Q(4;-1;-1)$.

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-1;2)$, $B(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P): z-2=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích lớn nhất. Khi đó giá trị a nằm trong khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{29}$. **B.** 27. **C.** $\sqrt{724}$. **D.** $5\sqrt{30}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(1;4;0)$, độ dài đường sinh bằng 6 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-3=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q): x-4y+z+3=0$ và M là một điểm di động trên (C). Hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a;-2;2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;1;a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m;n;p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)}=\frac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 250. **B.** 256. **C.** 252. **D.** 225.

Câu 33: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2): (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=\frac{7}{3}$. **D.** $T=-\frac{7}{3}$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$ **B.** $T=5$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Câu 35: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0)$, $B(0;-3;0)$. Mặt cầu (S) nhận AB là đường kính. Hình trụ (H) là hình trụ có trục thuộc trục tung, nội tiếp với mặt cầu và có thể tích lớn nhất. Khi đó mặt phẳng chứa đáy của hình trụ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(\sqrt{3};0;0)$. **B.** $(\sqrt{3};\sqrt{3};0)$. **C.** $(\sqrt{3};2;1)$. **D.** $(\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, $I(3;2;-2)$ là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn (C) ((C) là giao của (S) và (P)) có thể tích lớn nhất. Biết (C) có bán kính $r=\frac{2\sqrt{10}}{3}$, viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=40$. **B.** $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=5$.

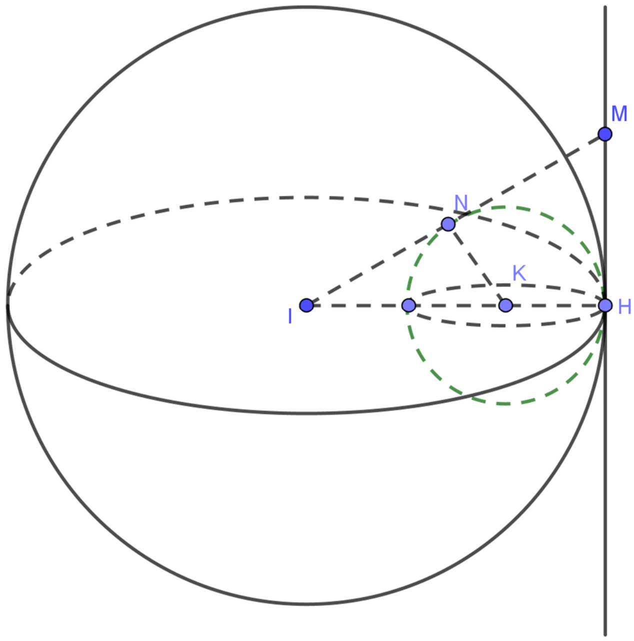
C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\sqrt{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2): (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. 1.   **B.** -1.   **C.** 4.   **D.** -4.

Lời giải



Ta có mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1=4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2=1$.

Có $IK=3$, suy ra $IK=R_1-R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H.

Suy ra $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{IK}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$.

Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vectơ $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến.

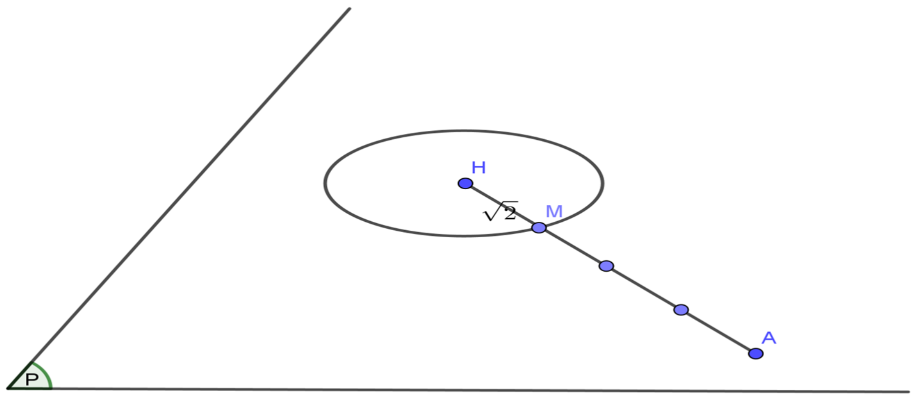
Suy ra ra phương trình mặt phẳng (P) là $x-2y-2z-6=0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2), tiếp điểm tương ứng là N.

Ta có ΔIKN và ΔIMH đồng dạng suy ra $\frac{IN}{IH}=\frac{NK}{HM}$ $(*)$.

Với $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$ nên

$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}$



Mặt khác ta lại có $A \in (P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{2}$ nên AM ngắn nhất bằng $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ khi điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

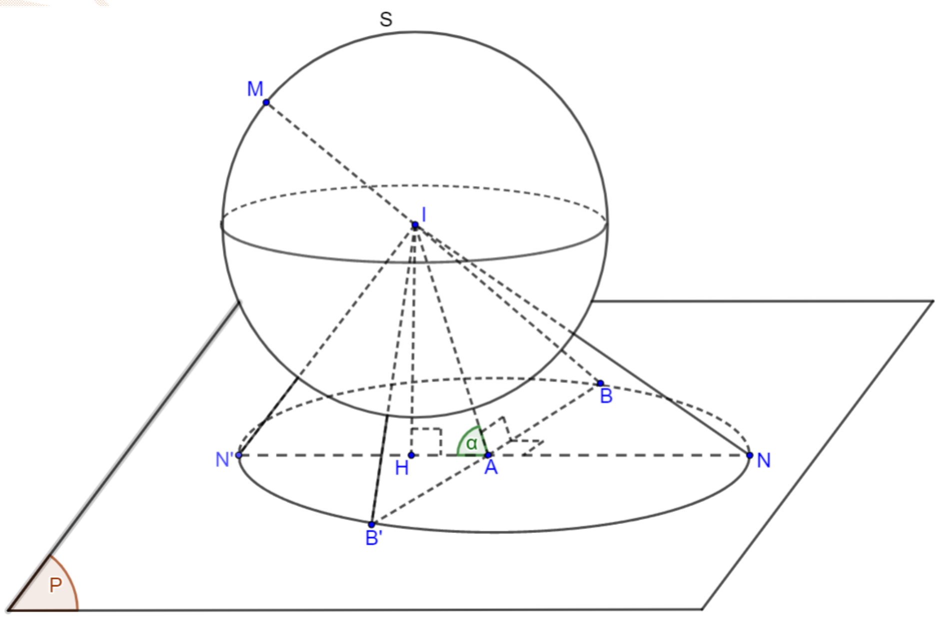
$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;3), I(1;2;-4)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$. Điểm M di động sao cho độ dài $MI = 5$ và N thuộc mặt phẳng (P) sao cho diện tích tam giác AIN bằng $18\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN nằm trong khoảng nào?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(19;20)$. **D.** $(11;12)$.

Lời giải



Ta có $MI=5$ nên M thuộc mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R=5$.

$$d\left(I,(P)\right)=\frac{\left|2.1-1.2+2.(-4)-10\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=6>R.$$

Ta thấy $A\in(P)$ có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ và $\overrightarrow{IA}=(1;-2;7)$.

$$IA=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(3+4)^2}=3\sqrt{6}.$$

$$\sin\alpha=\sin\left(IA,(P)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{n_P}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|}=\frac{\left|2.1+1.2+2.7\right|}{3\sqrt{6}.3}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích ΔIAN:

$$S_{\Delta IAN}=\frac{1}{2}.IA.AN.\sin\left(\widehat{IAN}\right)=18\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.3\sqrt{6}.AN.\sin\left(\widehat{IAN}\right)=18\sqrt{2}\Rightarrow AN.\sin\left(\widehat{IAN}\right)=4\sqrt{3}.$$

$$\sin\alpha\le\sin\left(\widehat{IAN}\right)\le\sin 90^\circ=1\Leftrightarrow\begin{cases}AN.\sin\left(\widehat{IAN}\right)\ge AN.\sin\alpha\\ AN.\sin\left(\widehat{IAN}\right)\le AN\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AN\le\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin\alpha}=6\sqrt{2}\\ AN\ge 4\sqrt{3}\end{cases}.$$

Gọi H là điểm hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2;-4)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên d có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$.

$$d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\\ z=-4+2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}),\ H\in d\Rightarrow H(1+2t;2-t;-4+2t).$$

Mà $H\in(P)\Rightarrow 2(1+2t)-(2-t)+2(-4+2t)-10=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow H(5;0;0)$.

Ta có $AH=\sqrt{(5-2)^2+3^2}=3\sqrt{2}$ và $IH=d\left(I;(P)\right)=6$.

Xét ΔHAN có $HN\le HA+AN\le 3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi H,A,N thẳng hàng và A nằm giữa H và N (1).

Xét ΔIHN vuông tại H có $IN=\sqrt{IH^2+HN^2}\le\sqrt{6^2+\left(9\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{22}$.

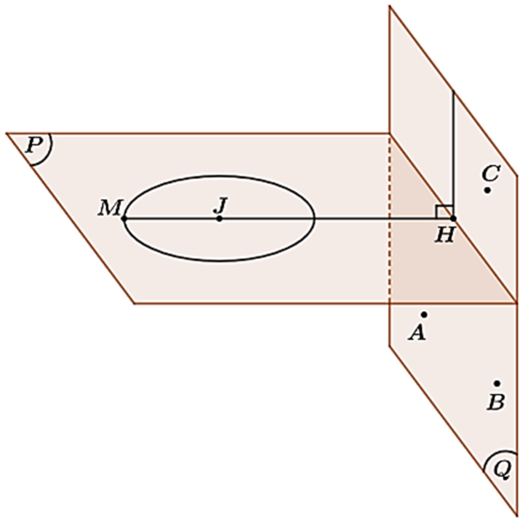
Xét ΔMIN có $MN\le MI+IN=R+IN=5+3\sqrt{22}$. Dấu "=" xảy ra khi M,I,N thẳng hàng và I nằm giữa M và N (2). Từ (1) và (2) suy ra $M,N\in(IHA)$.

Vậy giá trị lớn nhất của đoạn $MN=5+3\sqrt{22}\simeq 19,07$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;3;-5)$, $B(1;1;-5)$, $C(4;3;-1)$ và mặt cầu (S_m): $x^2+y^2+z^2+(m-2)x+4y+(m-2)z-3=0$ (m là tham số thực). Gọi (T) là tập hợp các điểm cố định mà mặt cầu (S_m) luôn đi qua với mọi số thực m và M là một điểm di động trên (T) sao cho thể tích tứ diện $MABC$ đạt giá trị lớn nhất $V_{\max}$. Giá trị $V_{\max}$ bằng

A. $V_{\max}=\sqrt{7}+8$.		**B.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+10$.		**C.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+5$.		**D.** $V_{\max}=2\sqrt{7}+8$.

Lời giải



Xét $M(x;y;z)$ là điểm mà (S_m) luôn đi qua với mọi số thực m khi đó ta có: $x^2+y^2+z^2+(m-2)x+4y+(m-2)z-3=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m(x+z)+x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=0\\x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0\end{cases}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng $(P):x+z=0$ và mặt cầu có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác $d(I,(P))=\dfrac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Vì vậy đường tròn (C) có bán kính là $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{7}$ và tâm $J(0;-2;0)$. Mặt phẳng (ABC)có phương trình là $2x+y-2z-13=0$. Dễ thấy (ABC) vuông góc với (P).

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)\\\overrightarrow{AC}=(4;0;4)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-4;8)\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.\sqrt{64+16+64}=6$.

Thể tích tứ diện $MABC$ là $V_{MABC}=\dfrac{1}{3}d(M,(ABC)).S_{ABC}=2d(M,(ABC))$.

Thể tích này lớn nhất khi và chỉ khi $d(M,(ABC))$ đạt giá trị lớn nhất.

Mà $d(M,(ABC))_{\max}=r+d(J,(ABC))=\sqrt{7}+\dfrac{|-2-13|}{3}=\sqrt{7}+5$.

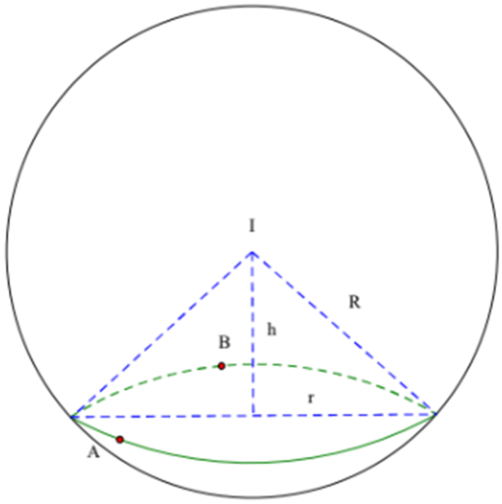
Vậy $V_{\max}=2\sqrt{7}+10$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$,

$(a,b,c,d \in \mathbb{Z}: d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A,B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3), R=\sqrt{6}$.

Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên A,B thuộc mặt cầu (S).

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3};\sqrt{3};0)=-\sqrt{3}(1;-1;0); M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của AB.

Gọi $\vec{m}=(1;-1;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}.\vec{m}$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $A,B \in (P)$ nên có $\begin{cases} M \in (P) \\ \vec{m}.\vec{n}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a+\frac{7}{2}b+3c+d=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-6a-3c \\ a=b \end{cases}$

Gọi $h=d(I,(P)),(C)=(P)\cap(S)$, r là bán kính đường tròn (C), $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N).

$S=\frac{1}{2}.h.2r=h.\sqrt{6-h^2} \le \frac{h^2+6-h^2}{2}=3$.

$Max\, S=3$ khi $h^2=6-h^2 \Rightarrow h=\sqrt{3}$.

$h=d(I,(P)) \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow a^2=c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=c \\ a=-c \end{array}\right.$.

Nếu $a=c$ thì $b=a;d=-9a$ và $(P):ax+ay+az-9a=0 \Leftrightarrow x+y+z-9=0$ (nhận).

Nếu $a=-c$ thì $b=a;d=-3a$ và $(P):ax+ay-az-3a=0 \Leftrightarrow x+y-z-3=0$ (loại).

Vậy $T=|a+b+c+d|=6$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Đặt M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1 : Giả sử (P) tiếp xúc với $(S_1),(S_2)$ lần lượt tại A,B.

Gọi $IJ\cap(P)=\{M\}$. Do $\dfrac{IA}{JB}=\dfrac{MI}{MJ}=2$ nên J là trung điểm của IM. Suy ra $M(2;1;9)$.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có $(P):a(x-2)+b(y-1)+c(z-9)=0$.

Và $\begin{cases} d(I;(P))=R_1 \\ d(J;(P))=R_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2=3c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=3 \quad (1)$.

Ta có $d(O;(P))=\dfrac{|2a+b+9c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2a+b+9c|}{2|c|}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2a}{c}+\dfrac{b}{c}+9\right|$.

Đặt $t=\dfrac{2a}{c}+\dfrac{b}{c} \Leftrightarrow \dfrac{b}{c}=t-\dfrac{2a}{c}$. Ta có $d(O;(P))=\dfrac{1}{2}|t+9|$.

Thay $\dfrac{b}{c}=t-\dfrac{2a}{c}$ vào (1) ta được $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(t-\dfrac{2a}{c}\right)^2=3 \Leftrightarrow 5\left(\dfrac{a}{c}\right)^2-4\dfrac{a}{c}t+t^2-3=0$.

Để phương trình có nghiệm với ẩn $\dfrac{a}{c}$ thì $4t^2-5t^2+15\geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{15}\leq t\leq\sqrt{15}$.

$\Leftrightarrow 0<9-\sqrt{15}\leq t+9\leq 9+\sqrt{15} \Rightarrow \dfrac{9-\sqrt{15}}{2}\leq d(O;(P))\leq\dfrac{9+\sqrt{15}}{2}$.

$\Rightarrow M=\dfrac{9+\sqrt{15}}{2}, m=\dfrac{9-\sqrt{15}}{2}$. Vậy $M+m=9$.

Cách 2 : Do $IJ=4>R_1+R_2$ nên 2 mặt cầu cắt nhau.

Giả sử IJ cắt (P) tại M ta có $\dfrac{MJ}{MI}=\dfrac{R_2}{R_1}=2 \Rightarrow J$ là trung điểm của MI.

Suy ra $M(2;1;9)$. Khi đó $(P):a(x-2)+b(y-1)+c(z-9)=0,\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$.

Mặt khác $d(I,(P))=4 \Leftrightarrow \dfrac{|8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=4 \Leftrightarrow \dfrac{2|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$.

Do $c\neq 0$ chọn $c=1 \Rightarrow a^2+b^2=3$.

Đặt $a=\sqrt{3}\sin t, b=\sqrt{3}\cos t$

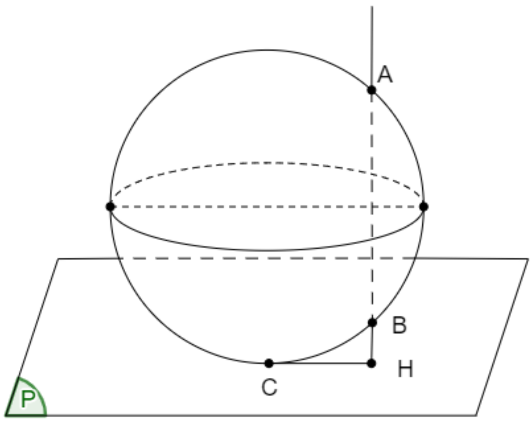
$\Rightarrow d\left(O,(P)\right)=\dfrac{|2a+b+9|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2a+b+9|}{2}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\sin t+\sqrt{3}\cos t+9\right|}{2}$.

Mặt khác $-\sqrt{12+3}\le 2\sqrt{3}\sin t+\sqrt{3}\cos t\le\sqrt{12+3}\Rightarrow\dfrac{9-\sqrt{15}}{2}\le d_0\le\dfrac{\sqrt{15}+9}{2}\Rightarrow M+m=9$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-2),B(-1;3;2),I(9;0;0)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài IC. Giá trị M^2+m^2 bằng

A. 322. **B.** 268. **C.** 266. **D.** 324.

Lời giải



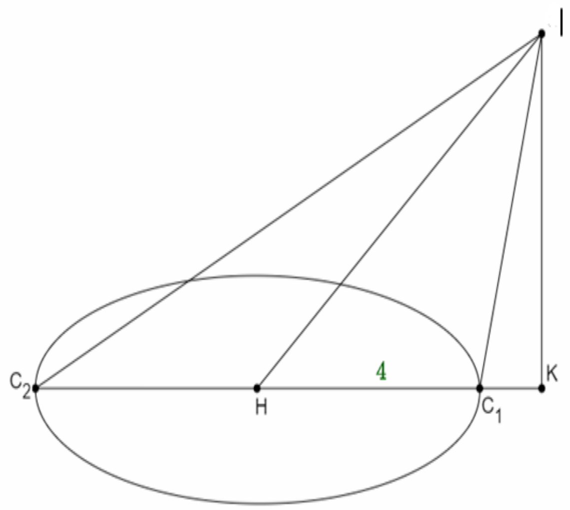
Đường thẳng AB qua A, có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;4)=-2(2;1;-2)$ có phương trình là: $\begin{cases}x=3+2t\\y=5+t\\z=-2-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Gọi $H=AB\cap(P)\Rightarrow H\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$. Suy ra $HA=8;HB=2$.

Khi đó $HC^2=HA.HB=8.2=16\Rightarrow HC=4$.

Vì $H\in(P)$ cố định và $C\in(P),HC=4$ nên C thuộc đường tròn $(H,4)$ thuộc (P).

Mặt khác, $d\left(I,(P)\right)=9$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên $(P)\Rightarrow IK=9$.



Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Ta có $\Delta:\begin{cases}x=9+2u\\y=u\\z=-2u\end{cases},u\in\mathbb{R}$.

Khi đó $K=\Delta\cap(P)\Rightarrow K(3;-3;6)\Rightarrow HK=8$.

Do đó, $M^2=IC_2^{\ 2}=IK^2+KC_2^{\ 2}=9^2+(8+4)^2=225$.

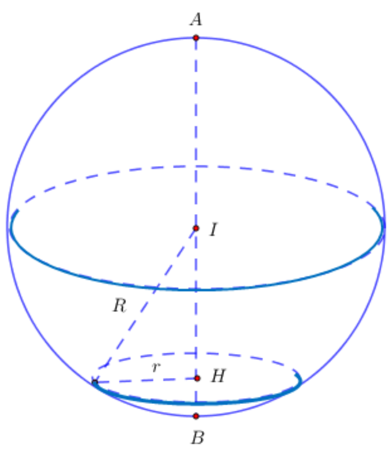
$m^2=IC_1^{\ 2}=IK^2+KC_1^{\ 2}=9^2+(8-4)^2=97$.

Vậy $M^2+m^2=322$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (α) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α)) có thể tích lớn nhất, biết rằng mặt phẳng $(\alpha):2x-by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=-16$. **B.** $S=20$. **C.** $S=-22$. **D.** $S=-14$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(4;3;4)$ là tâm của mặt cầu (S).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)\Rightarrow AB=6\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2}=3$ là bán kính của mặt cầu (S).

Vì thể tích của khối nón là lớn nhất nên ta chỉ cần xét trường hợp điểm H thuộc đoạn IB và khi đó hai điểm A và I nằm cùng phía với mp(α).

Đặt $IH=x\ (0\le x\le 3)$.

Gọi r là bán kính đường tròn tâm H $\Rightarrow r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{9-x^2}$.

Thể tích khối nón có đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H là:

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2.AH=\dfrac{1}{3}\pi.(3^2-x^2).(3+x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $V=\dfrac{1}{6}\pi(6-2x)(3+x)(3+x)\le\dfrac{1}{6}\pi\left(\dfrac{6+3+3}{3}\right)^3\Leftrightarrow V\le\dfrac{32\pi}{3}$.

Vậy thể tích khối nón lớn nhất bằng $\dfrac{32\pi}{3}$ khi $6-2x=3+x\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow IH=1$.

Cách 1: Mặt phẳng (α) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-b;c)$.

Vì (α) vuông góc với đoạn AB nên ta có $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{4}=-\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\c=1\end{cases}\Rightarrow(\alpha):2x+2y+z+d=0$.

Lại có $d(I;(\alpha))=1\Leftrightarrow\dfrac{|8+6+4+d|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=1\Leftrightarrow|18+d|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}18+d=3\\18+d=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-15\\d=-21\end{array}\right.$.

Mặt khác, A và I nằm cùng phía với mp(α) nên ta có $(9+d)(18+d)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d<-18\\d>-9\end{array}\right.$.

Do đó, nhận $d=-21$. Vậy $S=b+c+d=-2+1-21=-22$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}\Rightarrow H\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.\

Mặt phẳng (α) qua $H\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{13}{3}\right)$ và có VTPT: $\vec{n}=(2;2;1)\Rightarrow(\alpha):2x+2y+z-21=0$.

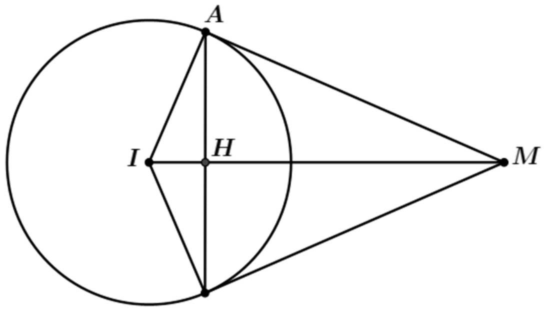
Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R=1$. Xét điểm M thay đổi trên (P). Khối nón (N) có đỉnh là I và đường tròn đáy là đường tròn đi qua tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 0.		**B.** 1.		**C.** 3.		**D.** -5.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ và bán kính $R=1$. Đặt $x=IM\Rightarrow x\ge d(I,(P))=\sqrt{3}$.

Gọi A là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi đó tiếp điểm A nằm trên đường tròn (C) có tâm H bán kính $r = HA$.



Ta có $AM = \sqrt{IM^2 - IA^2} = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow AH = \dfrac{AI.AM}{IM} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Khi đó:

$IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2-1}{x^2}} = \dfrac{1}{x}$.

Do đó $V_N = \dfrac{1}{3}\pi r^2 IH = g(x) = \dfrac{\pi}{3}.\dfrac{x^2-1}{x^2}.\dfrac{1}{x} \le \max\limits_{[\sqrt{3};+\infty)} g(x) = g(\sqrt{3}) = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

Dấu bằng đạt tại $x = \sqrt{3} \Leftrightarrow M(-1;0;1)$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Cách 1:

Suy ra $\begin{cases} A \in (S) \\ AM = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x + y + z - 2 = 0$ là mặt phẳng chứa các tiếp điểm.

Vậy $a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$.

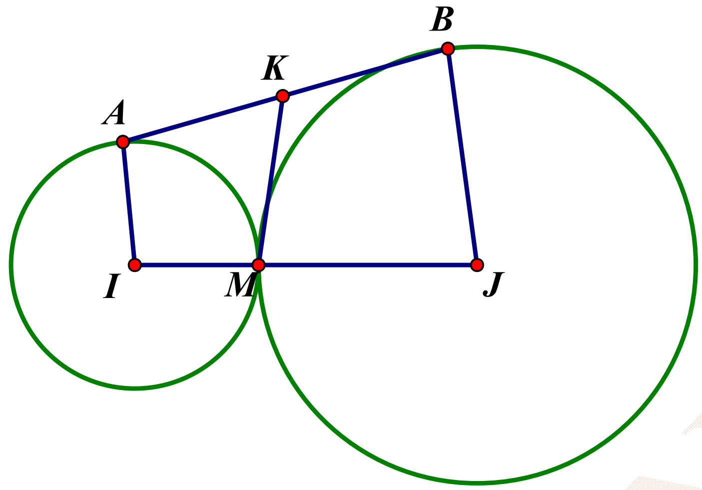
Cách 2: Tiếp diện tại $A(x_0;y_0;z_0) \in (S)$ có dạng: $xx_0 + (y-1)(y_0-1) + (z-2)(z_0-2) = 1$.

$M \in (S) \Leftrightarrow -1.x_0 + (0-1)(y_0-1) + (1-2)(z_0-2) = 1 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;3), B(-2;-1;1)$. Gọi $(S_1),(S_2)$ lần lượt là hai mặt cầu thay đổi luôn tiếp xúc với đường thẳng AB lần lượt tại các điểm A, B, đồng thời tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $M(a;b;c)$. Khi khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $T = a + b + c$ bằng

A. 4. **B.** 5 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải



Gọi (α) là tiếp diện chung của $(S_1),(S_2)$ tại M, $K = AB \cap (\alpha) \Rightarrow KA = KB = KM$, suy ra K là trung điểm của AB và M thuộc mặt cầu (S) đường kính AB. Ta có $K(0;1;2)$ và bán kính của mặt cầu (S) là $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Suy ra phương trình mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Gọi d là đường thẳng qua K và vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Với mọi điểm M thuộc mặt cầu (S) ta có:

$$d(M;(P)) \le d(K;(P)) + R = \frac{|2 - 4 + 2024|}{3} + 3 = 677.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} M = d \cap (S) \\ d(M,(P)) = 677 \end{cases}$.

Gọi $M(m;1+2m;2-2m)$ ta có hệ phương trình : $\begin{cases} m^2 + 4m^2 + 4m^2 = 9 \\ \dfrac{|m + 2 + 4m - 4 + 4m + 2024|}{3} = 677 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $M(1;3;0)$ nên $T = a + b + c = 4$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm $I(1;2;3); R = 3$

Ta có $d\left(I;(P)\right)=\frac{|2.1-2.2+3+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=\frac{4}{3}<R=3$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S)

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc (P) $\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t;(t\in\mathbb{R})\\ z=3+t\end{cases}$

Gọi A,B lần lượt là 2 giao điểm của d và (S), khi đó tọa độ A,B ứng với t là nghiệm phương trình $(1+2t-1)^2+(2-2t-2)^2+(3+t-3)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow A(3;0;4)\Rightarrow d\left(A;(P)\right)=\frac{|2.3-2.0+4+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{13}{3}$

Với $t=-1\Rightarrow B(-1;4;2)\Rightarrow d\left(B;(P)\right)=\frac{|2.(-1)-2.4+2+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}$

Với mọi điểm $M(a;b;c)\in(S)$ ta luôn có $d\left(B;(P)\right)\le d\left(M;(P)\right)\le d\left(A;(P)\right)$

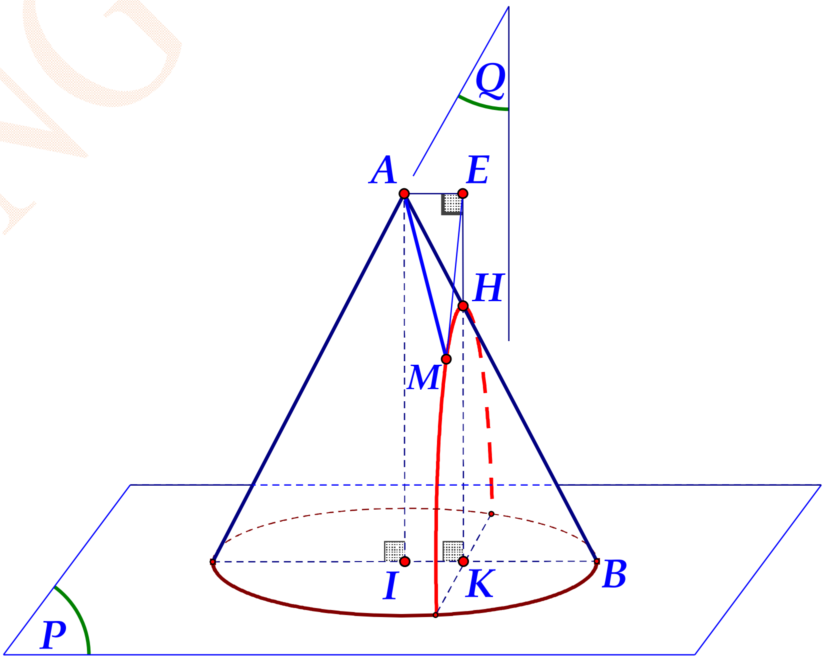
Vậy khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Vậy $a+b+c=7$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(1;4;0)$, độ dài đường sinh bằng $\sqrt{19}$ và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z-3=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q):x-2(m+1)y+mz+2m+1=0$ và M là một điểm di động trên (C). Khi khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất thì giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải



Ta có $x-2(m+1)y+mz+2m+1=0\Leftrightarrow m(-2y+z+2)+x-2y+1=0$.

Nhận thấy (Q) luôn đi qua điểm $C(3;2;2)$ với mọi m.

Hơn nữa $\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=(2;1;2)\\ \overrightarrow{n_Q}=(1;-2m-2;m)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\Rightarrow (P)\perp(Q),\forall m$.

Do đó (Q) luôn chứa đường thẳng qua C và vuông góc (P) là $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$.

Gọi hình chiếu của A lên Δ là $E(3+2t;2+t;2+2t)$.

Suy ra $\overrightarrow{AE}=(2t+2;t-2;2t+2)$.

Ta lại có $\overrightarrow{AE}.\vec{u}_\Delta=0$ với $\vec{u}_\Delta=(2;1;2)$ nên $2(2t+2)+(t-2)+2(2t+2)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow AE=2\sqrt{2}$.

Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

Theo đề $l=\sqrt{19}$ và $h=d\left(A,(P)\right)=1$. Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=3\sqrt{2}$.

Vì $d\left(A,(Q)\right)\le AE$ nên $d\left(A,(Q)\right)_{\max}=AE=2\sqrt{2}=\dfrac{2r}{3}$ khi và chỉ khi $AE\perp(Q)$.

(giả sử tâm của đáy là I và K là hình chiếu của I lên (Q); $IK=AE$)

Hơn nữa giao tuyến (C) là một parabol có đỉnh H.

Ta có: $AM=\sqrt{AE^2+EM^2}=\sqrt{8+EM^2}\ge\sqrt{8+EH^2}$

Do đó $AM_{\min}$ khi và chỉ khi $EM=EH$. Hay $M\equiv H$.

Nhận thấy $AEKI$ là hình chữ nhật nên ta có $\dfrac{BH}{BA}=\dfrac{BK}{BI}=1-\dfrac{IK}{IB}=1-\dfrac{AE}{r}=\dfrac{1}{3}$

Do đó $AH=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2}{3}l=\dfrac{2\sqrt{19}}{3}\approx 2,9$.

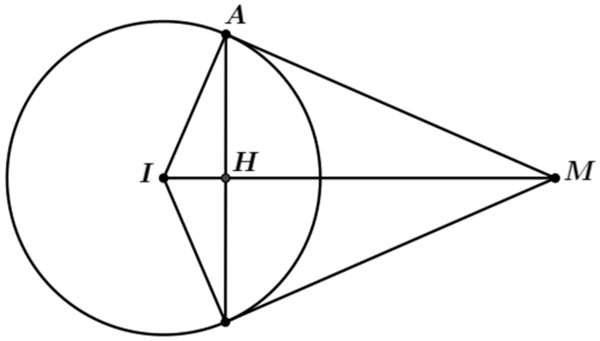
Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R=1$. Xét điểm M thay đổi trên (P). Khối nón (N) có đỉnh là I và đường tròn đáy là đường tròn đi qua tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là $x+ay+bz+c=0$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Vì mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$ và bán kính $R=1$. Đặt $x=IM\Rightarrow x\ge d\left(I,(P)\right)=\sqrt{3}$.

Gọi A là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S). Khi đó tiếp điểm A nằm trên đường tròn (C) có tâm H bán kính $r=HA$.



Ta có $AM=\sqrt{IM^2-IA^2}=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow AH=\dfrac{AI.AM}{IM}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Khi đó:

$IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{1-\dfrac{x^2-1}{x^2}}=\dfrac{1}{x}$.

Do đó $V_N=\dfrac{1}{3}\pi r^2 IH=g(x)=\dfrac{\pi}{3}.\dfrac{x^2-1}{x^2}.\dfrac{1}{x}\le\max\limits_{\left[\sqrt{3};+\infty\right)}g(x)=g\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Dấu bằng đạt tại $x=\sqrt{3}\Leftrightarrow M(-1;0;1)$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

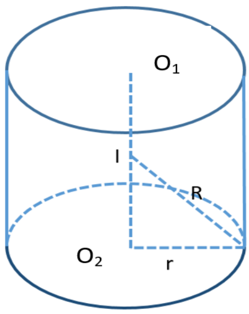
Suy ra $\begin{cases}A\in(S)\\AM=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1\\(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2\end{cases}\Rightarrow x+y+z-2=0$ là mặt phẳng chứa các tiếp điểm.

Vậy $a+b+c=1+1-2=0$.

Câu 13: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3$. Xét khối trụ (T) có trục song song với trục Ox và có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S). Khi (T) có thể tích lớn nhất, giả sử phương trình các mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của (T) là $x+by+cz+d=0$ và $x+by+cz+d'=0$ $(d>d')$. Giá trị của $2d-d'$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Giả sử khối trụ (T) có bán kính đáy r và chiều cao h ($0<r<R,0<h<2R$), ta có $R^2=\dfrac{h^2}{4}+r^2$.

Thể tích khối trụ (T) là $V=\pi r^2h=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi\left[R^2h-\frac{h^3}{4}\right]=\pi\left(3h-\frac{h^3}{4}\right)$,

Đặt $f(h)=\pi\left(3h-\frac{h^3}{4}\right)$, $\left(0<h<2\sqrt{3}\right)$, khi đó $f'(h)=\pi\left(3-\frac{3}{4}h^2\right)$, $f'(h)=0\Leftrightarrow h=2$.

Ta có bảng biến thiên

h	0		2		$2\sqrt{3}$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	$\nearrow$		4π		$\searrow$

Vậy khối trụ (T) có thể tích lớn nhất khi $h=2$.

Giả sử khối trụ có tâm hai đáy là O_1 và O_2 khi đó $O_1O_2=2$. Vì tâm mặt cầu là trung điểm O_1O_2 nên $IO_1=IO_2=1$. Theo giả thiết ta có $O_1O_2//Ox$ nên $\overrightarrow{IO_1}=\pm\vec{i}$, ta có thể giả sử $\overrightarrow{IO_1}=\vec{i}=(1;0;0)$ khi đó $\overrightarrow{IO_2}=-\vec{i}=(-1;0;0)$.

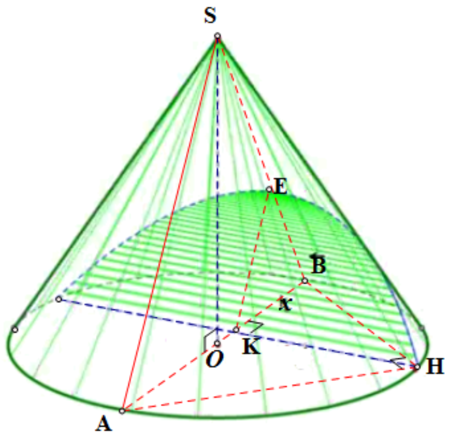
Mà $I(2;-1;3)$ nên $O_1=(3;-1;3)$ và $O_2=(1;-1;3)$.

Ta có hai mặt phẳng đáy của khối trụ có véctơ pháp tuyến $\vec{i}=(1;0;0)$ và lần lượt đi qua O_1 và O_2 nên có phương trình lần lượt là $x-3=0$ và $x-1=0$ do đó $2d-d'=2.(-1)-(-3)=1$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho hình nón (N) có đỉnh $S(4;5;-3)$, bán kính đáy 12 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y-2z+28=0$. Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Lời giải



Ta có chiều cao của hình nón là $SO=d(S,(P))=\frac{|4+2.5-2.(-3)+28|}{\sqrt{1^1+2^2+(-2)^2}}=16$

Đường sinh của hình nón là $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE//SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24-x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9}KH^2.KE^2 = \frac{16}{9}.x(24-x).\frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

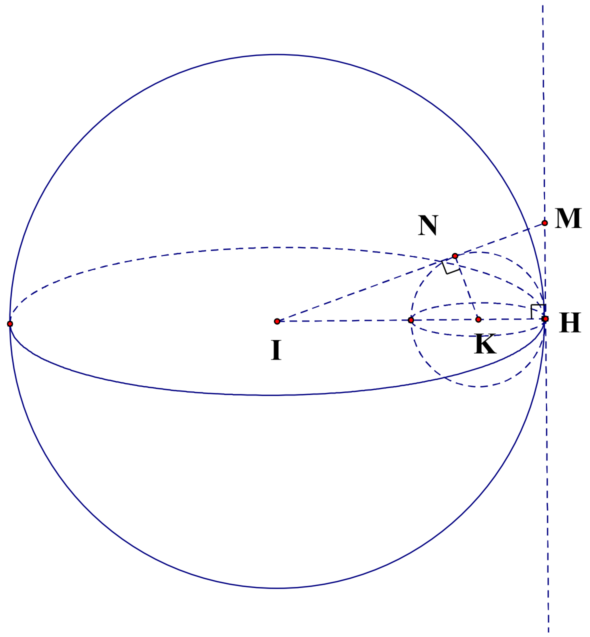
x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	34992	$\searrow$	

Suy ra thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 208\ cm^2$.

Câu 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$, $(S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

A. $T = 1$. **B.** $T = -1$. **C.** $T = \frac{7}{3}$. **D.** $T = -\frac{7}{3}$.

Lời giải



Ta có mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1=4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2=1$.

Có $IK=3$, suy ra $IK=R_1-R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H.

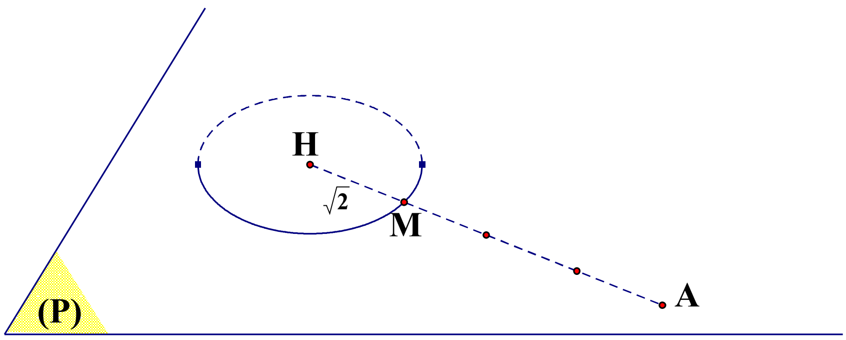
Suy ra $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{IK}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$.

Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vectơ $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến. Suy ra ra phương trình mặt phẳng (P) là $x-2y-2z-6=0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2), tiếp điểm tương ứng là N.

Ta có ΔIKN và ΔIMH đồng dạng suy ra $\frac{IN}{IH}=\frac{NK}{HM}$ $(*)$.

Với $NK=R_2=1; IH=4; IK=3; IN=\sqrt{IK^2-NK^2}=2\sqrt{2}$ nên $(*)\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{HM}\Leftrightarrow HM=\sqrt{2}$.



Mặt khác ta lại có $A \in (P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{2}$ nên AM ngắn nhất bằng $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ khi điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

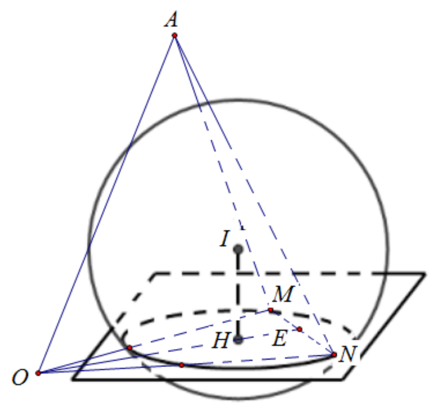
$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 25$ và điểm $A(0;1;9)$. Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M, N trên (C) sao cho $MN = 2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $(5; 5; 0)$.   **B.** $(6; 4; 0)$.   **C.** $(4; 6; 0)$.   **D.** $(3; 4; 0)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;4;4)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxy).

Ta có $H(3;4;0)$ và $IH = 4$.

Đường tròn (C) có tâm là $H(3;4;0)$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Xét đường tròn (C), gọi E là trung điểm của MN. Ta có

$$ME = EN = \frac{MN}{2} = \sqrt{5}$$

$$HE \perp MN$$

$$HE = \sqrt{r^2 - ME^2} = 2$$

Vì $OH = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 > r$ nên O nằm ngoài (C).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên MN.

Ta có $V_{OAMN} = \frac{1}{3} d\left(A;(Oxy)\right).S_{\Delta OMN} = \frac{1}{3}.9.\frac{1}{2} OK.MN = 3\sqrt{5}.OK$

Vì $OK \leq OE \leq OH + HE = 7$ nên $V_{OAMN} \leq 21\sqrt{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $K \equiv E$ và H thuộc đoạn thẳng OE.

Khi đó $\overrightarrow{OE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$.

MN đi qua điểm $E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$ và nhận $\vec{u} = \left[\vec{k};\overrightarrow{OH}\right] = (-4;3;0)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó MN có phương trình: $\begin{cases} x = \frac{21}{5} - 4t \\ y = \frac{28}{5} + 3t \\ z = 0 \end{cases}$.

Vậy MN đi qua điểm $(5;5;0)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt cầu (S) luôn qua A, B, C và đồng thời cắt ba tia Ox, Oy, Oz tại ba điểm phân biệt M, N, P. Gọi H là trực tâm của tam giác MNP. Tìm giá trị nhỏ nhất của HI với $I(4;2;2)$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$.

Gọi E là tâm mặt cầu (S), R là bán kính mặt cầu (S).

Gọi K là trung điểm AM, ta có : $EK \perp AM$.

Ta có : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}\right)\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}\right) = \left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}\right)\left(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{KM}\right) = OK^2 - KM^2$

$= OE^2 - KE^2 - KM^2 = OE^2 - R^2$

Chứng minh tương tự ta có: $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OB} = OE^2 - R^2$, $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC} = OE^2 - R^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC} \Rightarrow m.1 = n.2 = p.3$

Ta có : phương trình mặt phẳng $(MNP): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ hay $\frac{x}{m} + \frac{2y}{m} + \frac{3z}{m} = 1$

$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - m = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (MNP) là $\vec{n} = (1;2;3)$.

Vì tứ diện $OMNP$ có 3 cạnh từ O đôi một vuông góc nên $OH \perp (MNP)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(OH): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ (cố định).

Vậy HI nhỏ nhất khi H là hình chiếu của I lên OH

Khi đó :

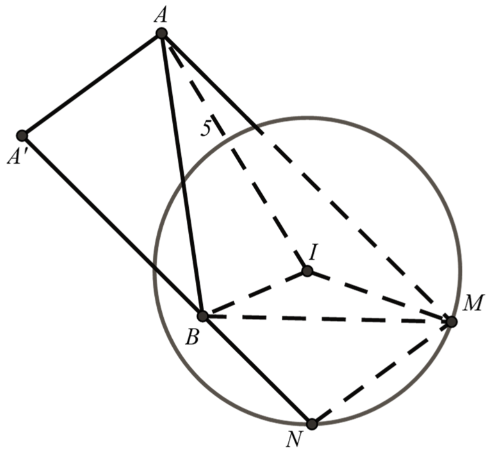
Phương trình mặt phẳng qua I và vuông góc OH là : $x + 2y + 3z - 14 = 0$,

$\Rightarrow H(1;2;3) \Rightarrow IH = \sqrt{10}$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 7.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;0;4)\Rightarrow IA=5$, $\overrightarrow{IB}=(0;2;2)\Rightarrow IB=2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4;2;4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1;4;2)$ nằm trong mặt cầu (S).

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;k;k),k>0$ do $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;4;4)$.

Gọi $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A'(4;6;8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$

Ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

$\overrightarrow{A'B}=(-3;-2;-6)$ suy ra $A'B=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$. Vậy $|AM-BN|_{\min}=A'B=7$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh $O(0;0;0)$, độ dài đường sinh bằng $\sqrt{5}$ và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P): z+2=0$. Mặt phẳng $(Q): x-3y=0$ cắt đường tròn đáy tại hai điểm A,B. Mặt phẳng $(R): 3z+2=0$ cắt đường sinh OB tại điểm K. Hỏi độ dài đường ngắn nhất chạy trên bề mặt của hình nón $(\mathcal{N})$ nối từ A đến K nằm trong khoảng nào?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

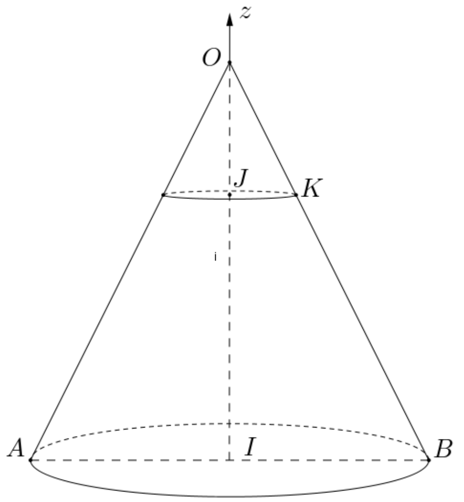
Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

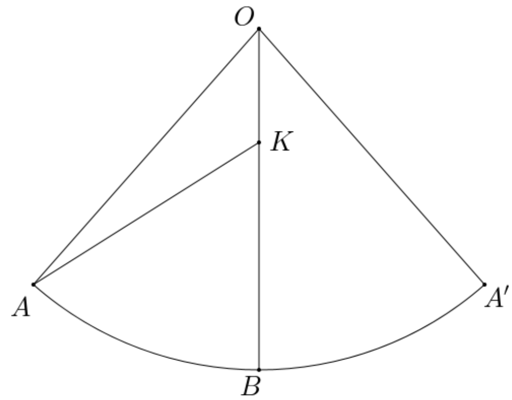
Theo đề bài ta có $l=\sqrt{5}$ và $h=d(O,(P))=2$. Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=1$.

Tâm I của đường tròn đáy là hình chiếu của O lên (P), suy ra $I(0;0;-2)$.

Dễ thấy O,I đều nằm trên (Q) nên (Q) đi qua trục của nón, cắt nón tạo thành thiết diện là tam giác AOB với AB là một đường kính của đường tròn đáy.

Mặt khác, $d(O,R)=\frac{2}{3}$ và hình chiếu của O lên (R) là $J\left(0;0;-\frac{2}{3}\right)$ nằm giữa O và I nên điểm K sẽ nằm giữa đoạn OB thỏa mãn $\frac{OK}{OB}=\frac{OJ}{OI}=\frac{1}{3}$ (hình vẽ bên trái)





+ Khai triển hình nón dọc theo đường sinh OA (trải ra mặt phẳng)

+ Ta được hình quạt $OABA'$ (hình bên phải)

+ Trong các điều kiện của bài toán đường ngắn nhất trên mặt nón trở thành đoạn thẳng AK

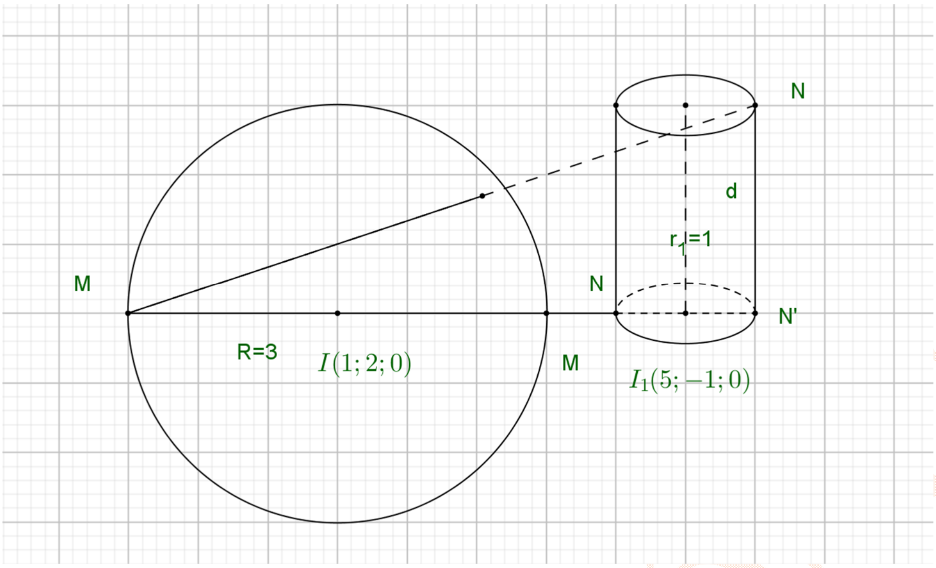
+ Trong tam giác OAK ta có: $AK^2 = AO^2 + OK^2 - 2AO.OK.cos\alpha$, với $OA = \sqrt{5}, OK = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Tính độ dài cung $AA' = 2\pi$ nên độ dài $\overset{\frown}{AB} = \pi$; từ đó tính góc SAB qua độ dài cung AB; $\widehat{AOB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$. Từ đó suy ra $AK = \sqrt{5 + \frac{5}{9} - 2.\frac{5}{3}\cos\frac{\pi}{\sqrt{5}}} \approx 2,237$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4), B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{AMB} = 90°$ và N là điểm di động luôn cách d một khoảng là 1 đơn vị và cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng không quá 3 đơn vị. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của MN bằng

A. $3\sqrt{11} + 1$. **B.** $\sqrt{58} + 1$. **C.** $3\sqrt{10} + 1$. **D.** 11.

Lời giải



Ta có $A(4;-2;4), B(-2;6;4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6;8;0) \Rightarrow AB = 10 \Rightarrow IM = 5$.

$\overrightarrow{II_1} = (4;-3;0) \Rightarrow II_1 = 5$.

Gọi I' là trung điểm của $AB \Rightarrow I'(1;2;4)$.

M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{AMB} = 90°$, khi đó M nằm trên đường tròn tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R = 3$.

Phương trình đường tròn $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \\ z = 0\end{cases}$.

N là điểm di động luôn cách d một khoảng là 1 đơn vị và cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng không quá 3 đơn vị thì điểm N nằm trên mặt trụ có bán kính $r_1 = 1$, chiều cao trụ không quá 3.

Khi đó MN nhỏ nhất khi $MN = II_1 - R - r_1 = 5 - 3 - 1 = 1$.

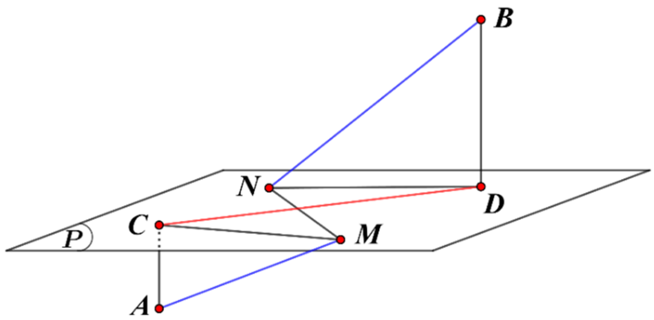
Khi đó MN lớn nhất khi $MN = \sqrt{(MN')^2 + (NN')^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $MN = 3\sqrt{10} + 1$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 7 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 7 = 0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. $\sqrt{18 + 2\sqrt{10}}$. **B.** $\sqrt{18 - 4\sqrt{10}}$. **C.** $18 - 2\sqrt{10}$. **D.** $18 + 2\sqrt{10}$.

Lời giải



Vì mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên từ hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 7 = 0\end{cases}$$

$\Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow (P)$ trùng với (Oyz).

Gọi C và D lần lượt là hình chiếu của A và B lên (P) hay (Oyz) suy ra $C(0;0;0)$ và

$D(0;1;3)$. Kết hợp giả thiết, ta tính được $AC=1$, $BD=1$, $CD=\sqrt{10}$, $AM=\sqrt{AC^2+CM^2}$; $BN=\sqrt{BD^2+DN^2}$.

Do đó: $AM+BN=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}\geq\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}$ (BĐT Bunhiacopxki).

Mặt khác: $CM+DN+MN\geq CD\Rightarrow CM+DN\geq CD-MN=\sqrt{10}-2$.

Suy ra $AM+BN\geq\sqrt{(1+1)^2+(CM+DN)^2}\geq\sqrt{4+\left(\sqrt{10}-2\right)^2}=\sqrt{18-4\sqrt{10}}$.

Vậy $AM+BN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{10-4\sqrt{10}}$, dấu "=" xảy ra khi C,M,N,D theo thứ tự thẳng hàng.

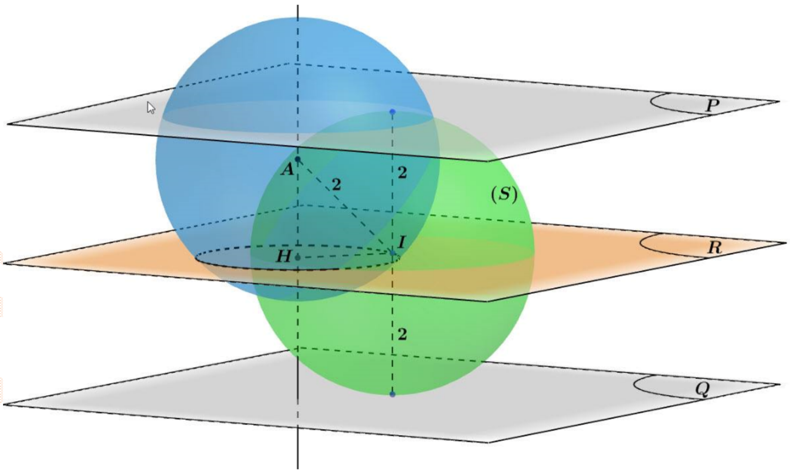
Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+10=0$ song song với nhau. Biết $A(1;2;1)$ là điểm nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Biết rằng khi (S) thay đổi thì tâm của nó luôn nằm trên một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Điểm $M(1;0;0)$ là 1 điểm thuộc (P).

Vì $(P)//(Q)$ nên $d((P),(Q))=d(M,(Q))=\dfrac{|2+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$.



Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm của (S). Vì (S) tiếp xúc với cả (P) và (Q) nên bán kính mặt cầu (S) là $R=\dfrac{d((P),(Q))}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

Do đó $IA=2$ nên I luôn thuộc mặt cầu (T) tâm A, bán kính 2.

Ngoài ra $d(I,(P))=d(I,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|2a-b-2c-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2a-b-2c+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$

$\Leftrightarrow|2a-b-2c-2|=|2a-b-2c+10|\Leftrightarrow 2a-b-2c-2=-(2a-b-2c+10)$

$\Leftrightarrow 2a-b-2c+4=0$. Do đó I luôn thuộc mặt phẳng $(R):2x-y-2z+4=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (R). Vì $A,(R)$ cố định nên H cố định.

Ta có: $AH = d\left(A,(R)\right) = \dfrac{|2.1-2-2.1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Mà $AH \perp (R) \Rightarrow AH \perp HI$, do đó ΔAHI vuông tại H nên

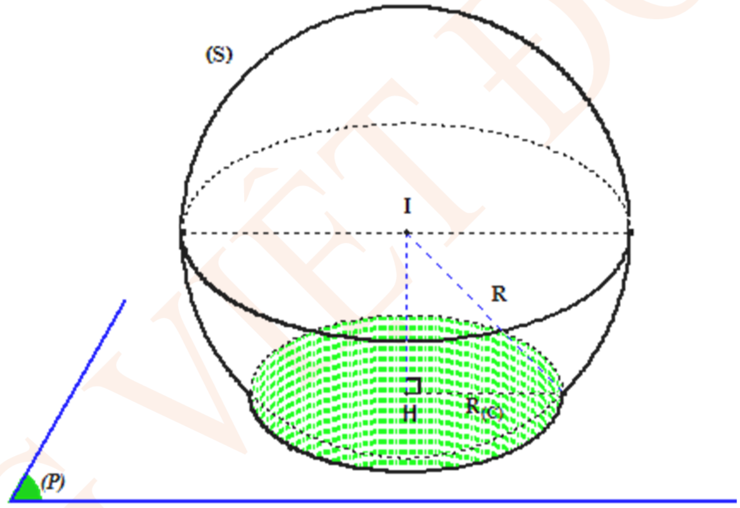
$HI = \sqrt{AI^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy I luôn thuộc đường tròn tâm H, nằm trên mặt phẳng (R), bán kính $r = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA=2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$.　　　**B.** $\sqrt{6}$.　　　**C.** $2\sqrt{2}$.　　　**D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$, suy ra mặt cầu có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc (S) sao cho $MA=2MB$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} M \in (S) \\ MA = 2MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-3)^2 = 4\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{2z}{3}-\dfrac{29}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ z-2=0 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ tâm $I(0;0;3)$ đến mặt phẳng (P): $z-2=0$ là:

$$d\left(I,(P)\right) = \frac{|3-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 1 < R.$$

Do đó đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

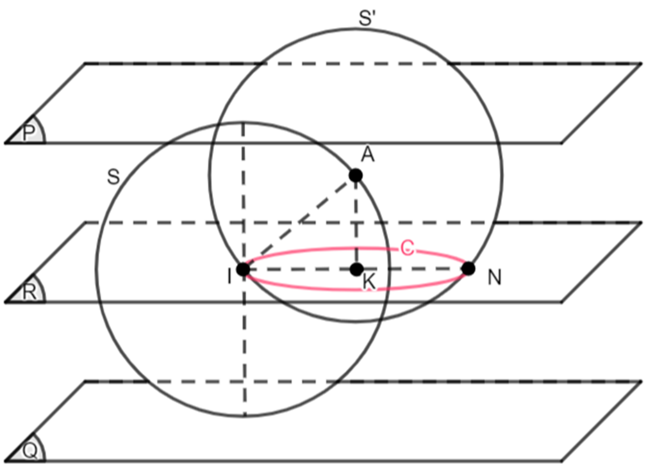
Đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)} = \sqrt{R^2 - d^2\left(I,(P)\right)} = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):2x-y+2z-3=0$, $(Q):2x-y+2z+7=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng này. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với cả (P) và (Q). Biết khi (S) thay đổi thì tâm I của nó luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Bán kính hình tròn giới hạn bởi (C) là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

.

Lời giải



Với $M(0;-3;0)\in(P)$ ta có bán kính mặt cầu (S) là

$$R=\frac{1}{2}.d\left((P),(Q)\right)=\frac{1}{2}.d\left(M,(Q)\right)=\frac{1}{2}.\frac{|7-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{5}{3}.$$

Vì (S) có tâm I và qua A nên $IA=R=\frac{5}{3}$ suy ra tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt cầu (S') có tâm A, bán kính $R=IA=\frac{5}{3}$.

(S) là mặt cầu tiếp xúc với cả (P) và (Q) nên tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (R) cách đều (P) và (Q). Với phương trình mặt phẳng (R): $2x-y+2z+2=0$.

Gọi K là hình chiếu của A trên (R) $\Rightarrow AK=d\left(A,(R)\right)=\frac{|2.(-1)-1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}$.

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S') và mặt phẳng (R) có tâm K và bán kính $r=KI=\sqrt{AI^2-AK^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng (α): $x+y-z+4=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của hình tròn giao tuyến khi đó là

A. $S=6\pi$. **B.** $S=19\pi$. **C.** $S=\frac{9}{2}\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (α) là: $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$.

Gọi $d\cap(\alpha)=M(t;1+t;2-t)$

$M\in(\alpha)\Rightarrow t+1+t-(2-t)+4=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow M(-1;0;3)$.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$.

Do $A,M\in(P)\Rightarrow\begin{cases} b+2c+d=0 \\ -a+3c+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=a-3c \\ b=-a+c \end{cases}$

$\Rightarrow(P):ax+(-a+c)y+cz+a-3c=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;2)$, $R=5$, khi đó

$$d(I;(P))=\frac{|3a-a+c+2c+a-3c|}{\sqrt{a^2+(-a+c)^2+c^2}}=\frac{3|a|}{\sqrt{2a^2+2c^2-2ac}}=k\ (0\le k<5).$$

Theo bài, (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất $\Rightarrow k$ lớn nhất.

TH1: $c=0\Rightarrow a\neq 0\Rightarrow k=\frac{3\sqrt{2}}{2}<5$.

TH2: $c\neq 0\Rightarrow 3|a|=k\sqrt{2a^2+2c^2-2ac}\Leftrightarrow(2k^2-9)a^2-2k^2ac+2k^2c^2=0$

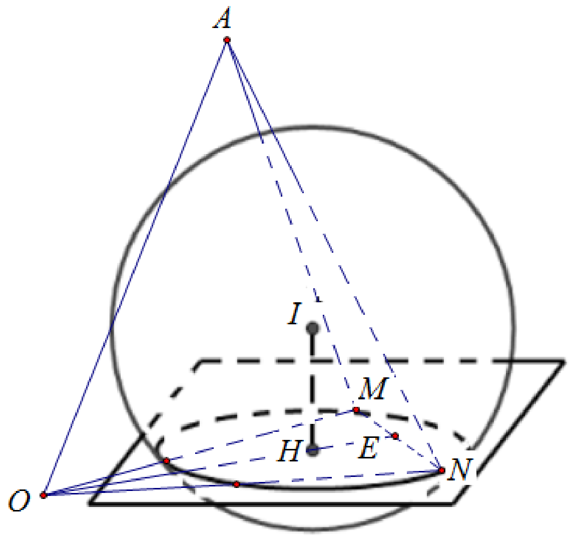
Ta có $\Delta'=-3k^4c^2+18k^2c^2\ge 0\Rightarrow 3k^2c^2(6-k^2)\ge 0\Rightarrow k^2\le 6\Rightarrow k\le\sqrt{6}<5$.

Do đó $k_{\max}=\sqrt{6}$, khi đó bán kính đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{5^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{19}\Rightarrow S=19\pi$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oyz). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$. **B.** $\left(1;\frac{21}{5};\frac{28}{5}\right)$. **C.** $(0;-4;3)$. **D.** $(0;-7;14)$.

Lời giải



Mặt cầu $(S): (x-4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$ có tâm $I(4;3;4)$ và bán kính $R=5$.

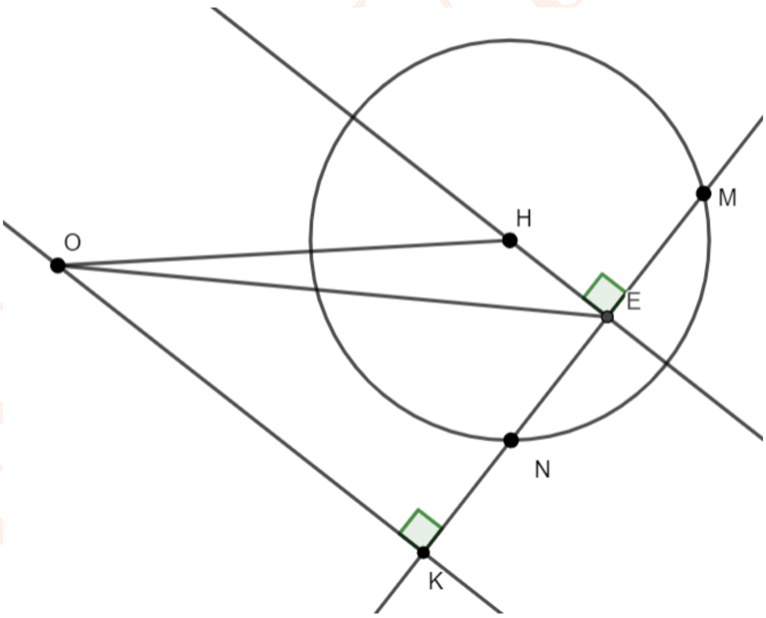
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(Oyz) \Rightarrow H(0;3;4) \Rightarrow IH=4$

Đường tròn (C) có tâm là $H(0;3;4)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{25-16}=3$.

Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $ME=\sqrt{5}$ và $HE \perp MN$.

$OH=5, HE=\sqrt{r^2-ME^2}=2$. Suy ra O nằm ngoài (C).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên MN.



$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d\left(A;(Oyz)\right).S_{\Delta OMN}=\frac{1}{3}.2.\frac{1}{2}OK.MN=\frac{2\sqrt{5}}{3}OK$

Ta có: $OK \le OE \le OH+HE=5+2=7$

$\Rightarrow V_{AOMN}=\frac{2\sqrt{5}}{3}OK \le \frac{2\sqrt{5}}{3}.7=\frac{14\sqrt{5}}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $K \equiv E$ và H nằm trong đoạn OE.

Khi đó: $\overrightarrow{OE} = \dfrac{7}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow E\left(0;\dfrac{21}{5};\dfrac{28}{5}\right)$.

MN đi qua điểm $E\left(0;\dfrac{21}{5};\dfrac{28}{5}\right)$ và nhận $\vec{u} = \left[\vec{i},\overrightarrow{OE}\right] = \left(0;-\dfrac{28}{5};\dfrac{21}{5}\right)$ làm một vectơ chỉ phương.

Chọn $\overrightarrow{u'} = (0;-4;3)$ làm VTCP của MN.

Do đó MN có phương trình: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{21}{5} - 4t \\ z = \dfrac{28}{5} + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

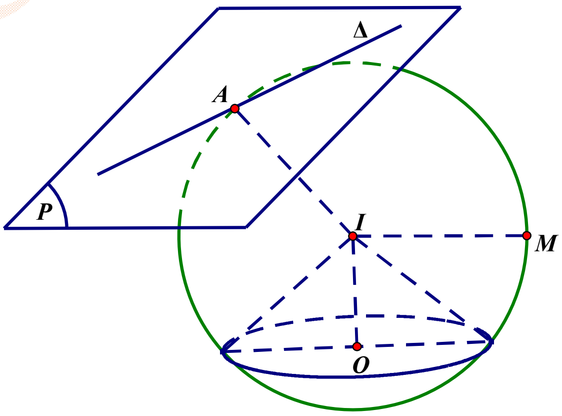
Vậy, MN đi qua điểm $(0;-7;14)$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a;-2;2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;1;a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m;n;p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)} = \dfrac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 225. **B.** 250. **C.** 256. **D.** 252.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết ta có phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1+3a+at \\ y = -2+t \\ z = 2+3a+(a+1)t \end{cases}$.

Ta có đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;-5;-1), \forall a \in \mathbb{R}$. $(t=-3)$.

Nhận thấy đường thẳng Δ luôn nằm trên mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$.

Nếu (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn thì Δ chính là tiếp tuyến của đường tròn, mà từ một điểm chỉ có thể kẻ tối đa hai tiếp tuyến với đường tròn, nên khi đó chỉ có thể tồn tại tối đa hai tiếp tuyến Δ với (S). Do từ A kẻ được vô số tiếp tuyến Δ với (S) nên (P) phải tiếp xúc với (S) tại A.

Ta có $AI \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$, do đó $\frac{m-1}{1}=\frac{n+5}{1}=\frac{p+1}{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \end{cases} (1)$.

Ta lại có $MI = IA \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2+(p-1)^2=(m-1)^2+(n+5)^2+(p+1)^2$

$\Leftrightarrow 3n+p=-6 (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \\ 3n+p=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=0 \\ p=-6 \end{cases}$.

Bán kính mặt cầu (S): $R=IM=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm của hình tròn đáy của hình nón, đặt $x=IO, x>0$, khi đó hình nón có bán kính đáy là $r=\sqrt{R^2-IO^2}=\sqrt{75-x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(N)}=\frac{1}{3}\pi.r^2.x=\frac{\pi}{3}.(75x-x^3)$.

Xét hàm số: $f(x)=75x-x^3, x\in(0;+\infty)$, $f'(x)=75-3x^2$ với $x\in(0;5\sqrt{3})$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 75-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 (n) \\ x=-5 (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		5		$5\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	250	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{(0;5\sqrt{3})} f(x)=250$ tại $x=5$.

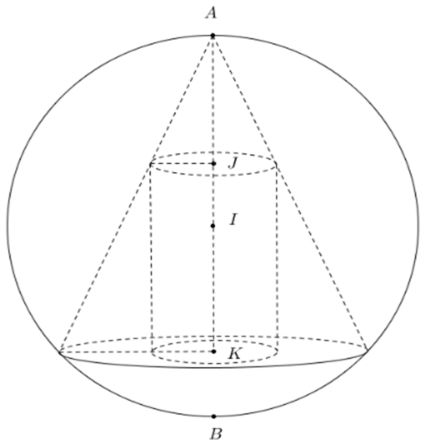
Do đó $\max V_{(N)}=\frac{250\pi}{3} \Rightarrow q=250$.

Vậy $m+n+p+q=6+0+(-6)+250=250$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;4;-1)$, $B(0;0;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z+1=0$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và (N) là hình nón có đỉnh A và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α); gọi (T) là hình trụ nội tiếp hình nón (N) và (β) là mặt phẳng chứa một trong hai đáy của hình trụ ((β) khác (α)). Khi thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất thì (β) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(1;1;\dfrac{1}{6}\right)$. **B.** $N(4;1;1)$. **C.** $P\left(\dfrac{10}{3};1;1\right)$. **D.** $Q(4;-1;-1)$.

Lời giải



Gọi $I(1;2;1)$ và $R=\dfrac{AB}{2}=3$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Gọi r, r' lần lượt là bán kính của đáy hình trụ và hình nón.

Gọi J, K là tâm của hai đáy hình trụ (T) như hình vẽ.

Ta có $d(I,(\alpha))=\dfrac{|1+2.2-2.1+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra $r'=\sqrt{R^2-\left[d(I;(\alpha))\right]^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{3}$

$AK=d(A,(\alpha))=\dfrac{13}{3}$.

Ta có $\dfrac{AJ}{AK}=\dfrac{r}{r'}\Rightarrow AJ=\dfrac{AK}{r'}r=\dfrac{\sqrt{65}}{5}r$.

Thể tích khối trụ: $V=\pi r^2.JK=\pi r^2(AK-AJ)=\pi r^2\left(\dfrac{13}{3}-\dfrac{\sqrt{65}}{5}r\right)$.

$\Rightarrow V'=\pi r\left(\dfrac{26}{3}-\dfrac{3\sqrt{65}}{5}r\right)$.

$V'=0\Leftrightarrow \dfrac{26}{3}-\dfrac{3\sqrt{65}}{5}r=0\Leftrightarrow r=\dfrac{2\sqrt{65}}{9}$.

Bảng biến thiên

r	0		$\frac{2\sqrt{65}}{9}$		6
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất khi $r=\dfrac{2\sqrt{65}}{9}$.

Suy ra $AJ=\dfrac{26}{9}$ và $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{26}{27}\overrightarrow{AI}$.

Do đó $J\left(\dfrac{28}{27};\dfrac{56}{27};\dfrac{25}{27}\right)$ và $(\beta): x+2y-2z-\dfrac{10}{3}=0$.

Vậy điểm $P\left(\dfrac{10}{3};1;1\right)\in(\beta)$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-1;2)$, $B(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P): z-2=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích lớn nhất. Khi đó giá trị a nằm trong khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Ta có $M(a;b;c)\in(P)$ nên ta có $c-2=0\Leftrightarrow c=2\Rightarrow M(a;b;2)$

Tam giác MAB vuông tại M nên ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Có $\overrightarrow{MA}(-2-a;-1-b;0)$ $\quad\overrightarrow{MB}(2-a;-1-b;2)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow a^2-4+(b+1)^2=0\Leftrightarrow a^2+(b+1)^2=4$ (1)

Do tam giác MAB vuông tại M nên diện tích tam giác MAB bằng $\dfrac{1}{2}MA.MB$

Ta có $\dfrac{1}{2}MA.MB\le\dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}$

Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{AB^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $MA=MB$. Suy ra $MA^2=\dfrac{AB^2}{2}$

Có $AB=\sqrt{20}\Rightarrow MA^2=10\Leftrightarrow(a+2)^2+(b+1)^2=10\Leftrightarrow a^2+4a+(b+1)^2=6(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+(b+1)^2=4 \\ a^2+4a+(b+1)^2=6 \end{cases}$

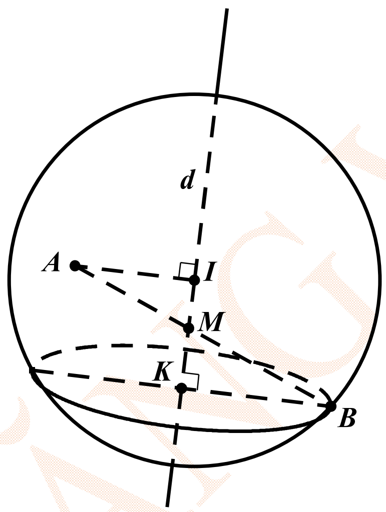
Giải hệ ta được $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-1\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

Vậy $a=\dfrac{1}{2}\in(0;1)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{29}$.	**B.** 27.	**C.** $\sqrt{724}$.	**D.** $5\sqrt{30}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.

Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30}\Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(1;4;0)$, độ dài đường sinh bằng 6 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z-3=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q):x-4y+z+3=0$ và M là một điểm di động trên (C). Hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

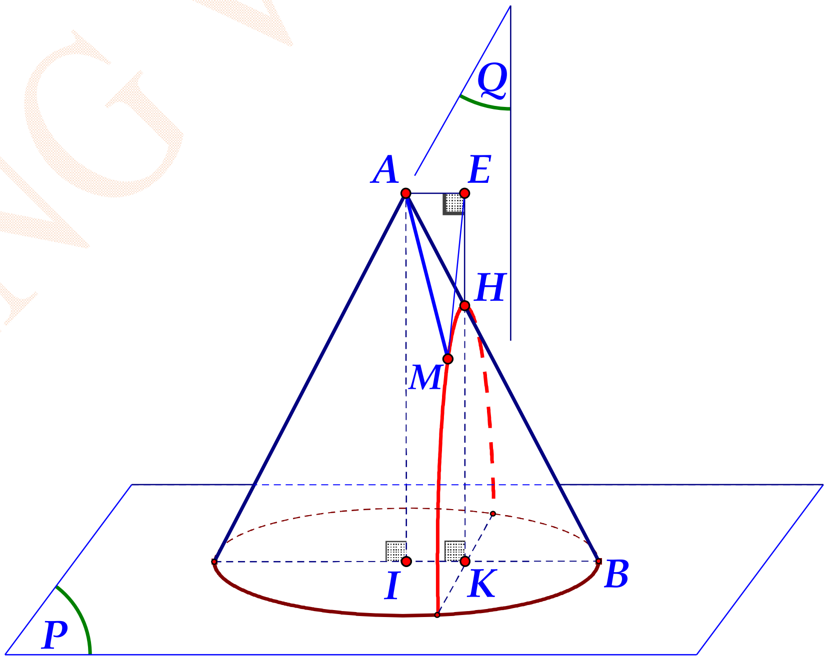
Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

Theo đề bài ta có $l=6$ và $h=d\left(A,(P)\right)=1$.

Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{35}$.

Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=(2;1;2)\\ \overrightarrow{n_Q}=(1;-4;1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\Rightarrow (P)\perp(Q)$.

Khi đó giao tuyến (C) là một parabol có đỉnh H (như hình vẽ).



Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên (Q).

Và $d\left(A,(Q)\right)=AE=2\sqrt{2}\,(=IK)$ do $IA\,//\,(Q)$.

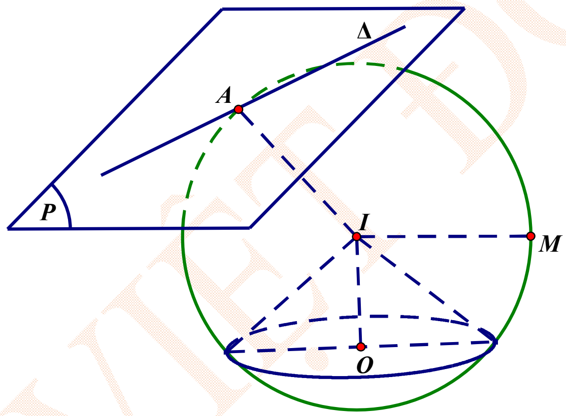
Ta có: $AM=\sqrt{AE^2+EM^2}=\sqrt{8+EM^2}$

Đồng thời $EM \geq EH$.
Do đó $AM_{\min} \Leftrightarrow AM = AH$ hay $M \equiv H$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên IB.
Vì $IA \,//\, HK \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IK}{IB}(Thales) \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}.6 = \frac{12\sqrt{70}}{35} \approx 2{,}87 \in (2;3)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng $(2;3)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a;-2;2+3a)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;1;a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m;n;p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)} = \frac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 250. **B.** 256. **C.** 252. **D.** 225.

Lời giải



Từ giả thiết ta có phương trình đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1+3a+at \\ y = -2+t \\ z = 2+3a+(a+1)t \end{cases}$.

Ta có đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;-5;-1), \forall a \in \mathbb{R}$. $(t=-3)$.
Nhận thấy đường thẳng Δ luôn nằm trên mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$.
Nếu (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn thì Δ chính là tiếp tuyến của đường tròn, mà từ một điểm chỉ có thể kẻ tối đa hai tiếp tuyến với đường tròn, nên khi đó chỉ có thể tồn tại tối đa hai tiếp tuyến Δ với (S). Do từ A kẻ được vô số tiếp tuyến Δ với (S) nên (P) phải tiếp xúc với (S) tại A.

Ta có $AI \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P} = (1;1;-1)$, do đó $\frac{m-1}{1} = \frac{n+5}{1} = \frac{p+1}{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \end{cases} (1)$.

Ta lại có $MI = IA \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2+(p-1)^2 = (m-1)^2+(n+5)^2+(p+1)^2$
$\Leftrightarrow 3n+p=-6\,(2)$.

Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \\ 3n+p=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=0 \\ p=-6 \end{cases}$.

Bán kính mặt cầu (S): $R=IM=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm của hình tròn đáy của hình nón, đặt $x=IO, x>0$, khi đó hình nón có bán kính đáy là $r=\sqrt{R^2-IO^2}=\sqrt{75-x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(N)}=\frac{1}{3}\pi.r^2.x=\frac{\pi}{3}.\left(75x-x^3\right)$.

Xét hàm số: $f(x)=75x-x^3, x\in(0;+\infty)$, $f'(x)=75-3x^2$ với $x\in\left(0;5\sqrt{3}\right)$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 75-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5\,(n) \\ x=-5\,(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		5		$5\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	250	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{\left(0;5\sqrt{3}\right)} f(x)=250$ tại $x=5$.

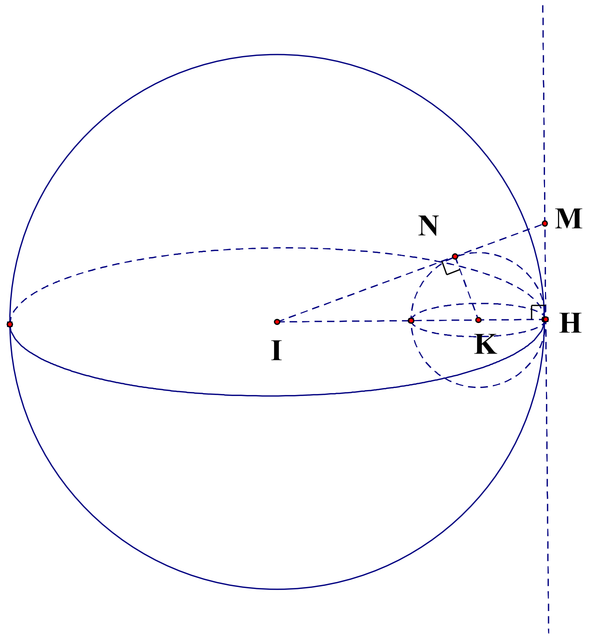
Do đó $\max V_{(N)}=\frac{250\pi}{3} \Rightarrow q=250$.

Vậy $m+n+p+q=6+0+(-6)+250=250$.

Câu 33: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=\frac{7}{3}$. **D.** $T=-\frac{7}{3}$.

Lời giải



Ta có mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1 = 4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2 = 1$.

Có $IK = 3$, suy ra $IK = R_1 - R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H.

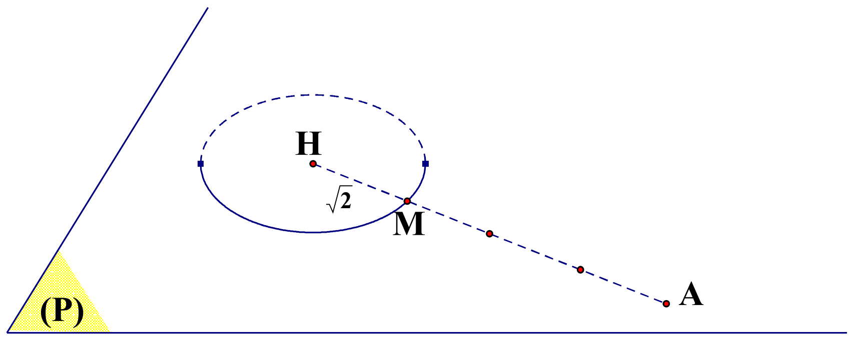
Suy ra $\overrightarrow{IH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IK} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IK} = (1;-2;-2)$.

Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vectơ $\overrightarrow{IK} = (1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến. Suy ra ra phương trình mặt phẳng (P) là $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2), tiếp điểm tương ứng là N.

Ta có ΔIKN và ΔIMH đồng dạng suy ra $\frac{IN}{IH} = \frac{NK}{HM}$ $(*)$.

Với $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$ nên $(*) \Leftrightarrow$
$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}$.



Mặt khác ta lại có $A\in(P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R=\sqrt{2}$ nên AM ngắn nhất bằng $HA-R=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ khi điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

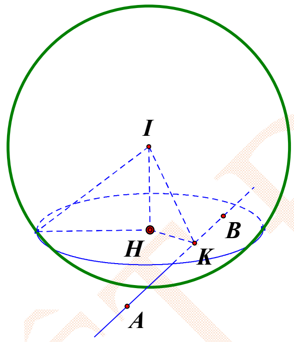
$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Suy ra $a=\frac{4}{3};b=-\frac{2}{3};c=-\frac{5}{3}\Rightarrow T=a+b+c=-1$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$ **B.** $T=5$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0)\in(P):b-2=0\Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB, H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K\in AB\Rightarrow K(t;1-t;2t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t-1;-t-1;2t-3)$

$IK\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}=0\Rightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(0;-2;-1)$.

$r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{25-d^2(I,(P))}=\sqrt{25-IH^2}$.

Ta có: $r_{\min}\Leftrightarrow IH_{\max}$.

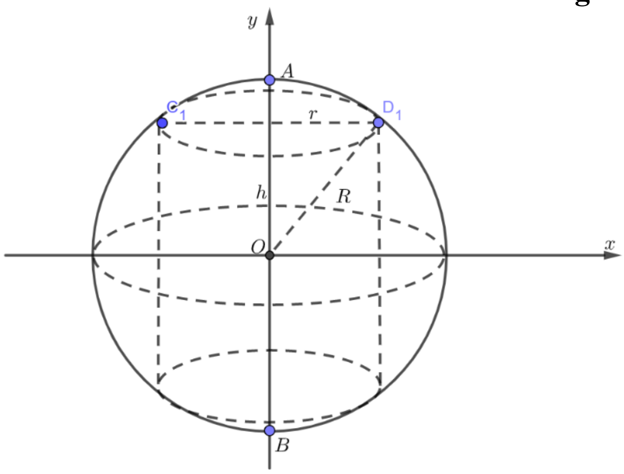
Mà $IH\le IK\Rightarrow IH_{\max}=IK\Leftrightarrow H\equiv K\Rightarrow(P)\perp IK\Rightarrow\vec{n}_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow\vec{n}_P=k.\overrightarrow{IK}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-2k\\c=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\k=-1\\c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\c=1\end{cases}\Rightarrow t=a+b+c=0+2+1=3.$$

Câu 35: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0)$, $B(0;-3;0)$. Mặt cầu (S) nhận AB là đường kính. Hình trụ (H) là hình trụ có trục thuộc trục tung, nội tiếp với mặt cầu và có thể tích lớn nhất. Khi đó mặt phẳng chứa đáy của hình trụ đi qua điểm nào sau đây?

A. $\left(\sqrt{3};0;0\right)$. **B.** $\left(\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)$. **C.** $\left(\sqrt{3};2;1\right)$. **D.** $\left(\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Lời giải



Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Gọi chiều cao của hình trụ là $2h$, $h>0$. Do đó bán kính của hình trụ là

$r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{9-h^2}$.

Thể tích khối trụ là $V=\pi.r^2.2h=\pi.\left(9-h^2\right).2h=\pi\sqrt{2}\sqrt{\left(9-h^2\right)\left(9-h^2\right).2h^2}$.

$V\le\pi\sqrt{2}.\sqrt{\left(\dfrac{9-h^2+9-h^2+2h^2}{3}\right)^3}=\pi\sqrt{2}.6\sqrt{6}=12\pi\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 9-h^2=2h^2\Leftrightarrow h=\sqrt{3}$.

Khi đó hình trụ có thể tích lớn nhất là $12\pi\sqrt{3}$.

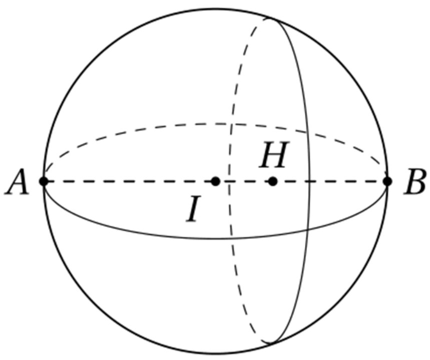
Vậy hai mặt đáy của trụ có phương trình tương ứng là $y=\sqrt{3};y=-\sqrt{3}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB , $I(3;2;-2)$ là trung điểm AB . Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn (C) ((C) là giao của (S) và (P)) có thể tích lớn nhất. Biết (C) có bán kính $r=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$, viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=40$. **B.** $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=5$.

C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\sqrt{5}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R, (C) có tâm H, bán kính r . Đặt $AH=x$ $(0<x<2R)$, ta có

$$V_{(N)}=\frac{1}{3}AH\cdot S_{(C)}=\frac{1}{3}AH\cdot\pi r^2.$$

Do AB là đường kính nên ta có $r^2=AH\cdot HB=x(2R-x)$. Khi đó

$$V_{(N)}=\frac{\pi}{3}x^2(2R-x)=\frac{\pi}{3}(-x^3+2Rx^2)=\frac{\pi}{3}f(x).$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+2Rx^2$ trên $(0;2R)$, $f'(x)=-3x^2+4Rx$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{4}{3}R.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	0		$\frac{4}{3}R$		$2R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{(N)}$ lớn nhất khi $x=\frac{4}{3}R$ hay $AH=\frac{2}{3}AB$. Mà $AH\cdot HB=r^2=\frac{40}{9}$. Suy ra

$$\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AB=\frac{40}{9}\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\Rightarrow R=\sqrt{5}.$$

Suy ra $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=5.$